67. Sei V ein Vektorraum und $\in \mathbb{N}_0$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\dim(V) = n$.
(b) Es existieren n linear unabhängige Vektoren, und je $n+1$ Vektoren in V sind linear abhängig.
(c) Es existiert ein Erzeugendensystem von V mit n Vektoren, und je $n-1$ Vektoren erzeugen V nicht.

68. Sei X eine n-elementige Menge. Zeige $\dim(F(X,\mathbb{K})) = n$.

69. Sei X eine Menge mit unendlich vielen Elementen. Zeige, dass $F(X,\mathbb{K})$ unendlich-dimensional ist. *Hinweis: Für jedes $x \in X$ betrachte die Funktion $e_x\colon X \to \mathbb{K}$, $e_x(x) := 1$, $e_x(y) := 0$ falls $y \neq x$, und zeige, dass die Menge $\{e_x \mid x \in X\}$ linear unabhängig in $F(X,\mathbb{K})$ ist.*

70. Zeige: Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann linear unabhängig, wenn ihr Kreuzprodukt $z := x \times y$ verschieden von Null ist. In diesem Fall bilden die Vektoren x, y, z eine Basis von $\mathbb{R}^3$. *Hinweis: Es genügt die lineare Unabhängigkeit zu zeigen.* In diesem Fall gilt weiters

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 & = & 0 \\ y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3 & = & 0 \end{array} \right\} = \bigl\{\lambda z \bigm| \lambda \in \mathbb{R}\bigr\},$$

sowie

$$\bigl\{\lambda x + \mu y \bigm| \lambda, \mu \in \mathbb{R}\bigr\} = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z_1u_1 + z_2u_2 + z_3u_3 \right\}.$$

Hinweis: In beiden Fällen folgt eine Inklusion sofort aus $x^tz = 0 = y^tz$, siehe Aufgabe 43. Die Gleichheit folgt dann aus Dimensionsgründen.

71. Seien W_1 und W_2 zwei verschiedene $(n-1)$-dimensionale Teilräume von $\mathbb{K}^n$. Zeige $W_1 + W_2 = \mathbb{K}^n$ und $\dim(W_1 \cap W_2) = n - 2$. *Hinweis: Beispiel IV.2.6.*

72. Sei V ein Vektorraum und $\alpha, \beta \in V^*$ zwei nicht-triviale lineare Funktionale, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Zeige, dass die Hyperebenen $\ker(\alpha)$ und $\ker(\beta)$ genau dann übereinstimmen, wenn $\lambda \in \mathbb{K}$ existiert, sodass $\beta = \lambda\alpha$.

73. Sei $0 \to W \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} U \to 0$ eine kurze exakte Sequenz linearer Abbildungen, d.h. φ sei injektiv, ψ surjektiv und $\operatorname{img}(\varphi) = \ker(\psi)$. Zeige, dass V genau dann endlich-dimensional ist, wenn W und U beide endlich-dimensional sind, und in diesem Fall gilt

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(U).$$

Hinweis: Zeige $U \cong V/\operatorname{img}(\varphi)$, $W \cong \operatorname{img}(\varphi)$ und verwende Korollar IV.2.8.

74 (Kodimension und Durchschnitt). Ein Teilraum W eines Vektoraums V hat endliche *Kodimension in* V*,* falls V/W endlich-dimensional ist. In diesem Fall wird $\operatorname{codim}_V(W) := \dim(V/W)$ die *Kodimension von* W *in* V *genannt.* Seien nun W_1 und W_2 zwei Teilräume von V. Zeige, dass $W_1 \cap W_2$ genau dann endliche Kodimension in V hat, wenn W_1 und W_2 beide endliche Kodimension in V haben. Zeige weiters, dass in diesem Fall auch $W_1 + W_2$ endliche Kodimension in V hat und es gilt

$$\operatorname{codim}_V(W_1 \cap W_2) + \operatorname{codim}_V(W_1 + W_2) = \operatorname{codim}_V(W_1) + \operatorname{codim}_V(W_2).$$

Im transversalen Fall, d.h. wenn $W_1 + W_2 = V$ gilt, erhalten wir

$$\operatorname{codim}_V(W_1 \cap W_2) = \operatorname{codim}_V(W_1) + \operatorname{codim}_V(W_2).$$

Hinweis: $\operatorname{codim}_V(W) = \dim(V/W) = \dim(W^\circ)$*, Satz IV.2.1 und Satz III.4.9.*

75. Erläutere die Gleichungen

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n \quad \text{und} \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n.$$

Hinweis: $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$*, siehe auch Beispiel IV.1.12.*

76. Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V. Zeige, dass $b_1, \mathbf{i}b_1, b_2, \mathbf{i}b_2, \dots, b_n, \mathbf{i}b_n$ eine Basis des V zugrundeliegenden reellen Vektorraums $V^{\mathbb{R}}$ bildet, vgl. Bemerkung IV.2.21, und schließe daraus $\dim_{\mathbb{R}}(V^{\mathbb{R}}) = 2\dim_{\mathbb{C}}(V)$.

77. Führe die Details in Bemerkung IV.2.22 aus.

78. Es sei V ein reeller Vektorraum und $J\colon V \to V$ linear mit $J \circ J = -\operatorname{id}_V$. Zeige, dass V bezüglich der Skalarmultiplikation

$$\mathbb{C} \times V \xrightarrow{\cdot} V, \qquad (a + b\mathbf{i})v := av + bJ(v),$$

zu einem komplexen Vektorraum wird. Schließe daraus, dass dies nur möglich ist, wenn $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ gerade ist. *Hinweis: Für den letzten Teil verwende Aufgabe 76.*

79. Sei

$$\{0\} \xrightarrow{\varphi_{-1}=0} V_0 \xrightarrow{\varphi_0} V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \to V_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} V_n \xrightarrow{\varphi_n=0} \{0\}$$

eine Folge linearer Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen, sodass $\varphi_i \circ \varphi_{i-1} = 0$, für jedes i. Schließe daraus $\operatorname{img}(\varphi_{i-1}) \subseteq \ker(\varphi_i)$ und definiere Vektorräume $H_i := \ker(\varphi_i)/\operatorname{img}(\varphi_{i-1})$. Zeige nun

$$\sum_i (-1)^i \dim(V_i) = \sum_i (-1)^i \dim(H_i).$$

Hinweis: Verwende $\operatorname{img}(\varphi_i) \cong V_i/\ker(\varphi_i)$ *und Korollar IV.2.8.*