80. Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$. Zeige

$$\operatorname{rank}(TAS) = \operatorname{rank}(A).$$

Hinweis: Betrachte die mit den Matrizen assoziierten linearen Abbildungen und verwende Proposition IV.2.23.

81. Sei W ein Teilraum eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, und bezeichne $\iota\colon V \to V^{**}$, $\iota(v)(\alpha) = \alpha(v)$, die natürliche Abbildung, $v \in V$, $\alpha \in V^*$. Zeige $\iota(W) = W^{\circ\circ}$. *Hinweis: Proposition III.4.13.*

82. Seien $\varphi\colon V \to W$ und $\psi\colon W \to U$ zwei lineare Abbildungen mit endlichem Rang. Zeige, dass dann auch $\psi \circ \varphi\colon V \to U$ endlichen Rang hat und

$$\operatorname{rank}(\psi \circ \varphi) \leq \min\bigl\{\operatorname{rank}(\psi), \operatorname{rank}(\varphi)\bigr\}$$

gelten muss. Schließe daraus, dass für je zwei Matrizen $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n\times l}(\mathbb{K})$ folgende Ungleichung gilt:

$$\operatorname{rank}(AB) \leq \min\bigl\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\bigr\}$$

83. Bestimme die Dimension sowie eine Basis des von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0\\1\\2\\-1\\-1\\2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0\\1\\2\\1\\7\\4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0\\2\\4\\0\\6\\6 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0\\3\\6\\-5\\-11\\4 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0\\4\\8\\0\\12\\15 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Teilraums $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\rangle \subseteq \mathbb{R}^6$. Gib ein minimales Gleichungssystem für W an. Bestimme eine Basis von W, die aus gewissen der Vektoren v_i besteht. Gib schließlich auch ein Komplement von W an und beschreibe dieses mit einer Basis und durch ein Gleichungssystem. *Hinweis: siehe Beispiel IV.3.17.*

84. Zeige, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\-1\\2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2\\3\\-1\\6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3\\3\\-3\\6 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4\\4\\-2\\8 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 6\\11\\0\\24 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$ bilden, und bestimme vier dieser Vektoren v_i, die eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden. *Hinweis: siehe Beispiel IV.3.22.*

85. Zeige, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1\\-1\\1\\-1\\1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1\\2\\1\\2\\1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1\\2\\3\\1\\2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig in $\mathbb{R}^5$ sind und erweitere sie zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$. *Hinweis: Siehe Beispiel IV.3.18.*

86. Es bezeichne W den Teilraum aller $y \in \mathbb{R}^6$, für die das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrcl} 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & +6x_4 & +10x_5 & = & y_1 \\ 3x_1 & +x_2 & +x_3 & +5x_4 & +7x_5 & = & y_2 \\ 5x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +11x_4 & +17x_5 & = & y_3 \\ 7x_1 & +3x_2 & +x_3 & +11x_4 & +15x_5 & = & y_4 \\ 11x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +21x_4 & +31x_5 & = & y_5 \\ 13x_1 & +8x_2 & +9x_3 & +30x_4 & +47x_5 & = & y_6 \end{array}$$

lösbar ist. Bestimme $\dim(W)$ und eine Basis von W. Gib auch ein minimales Gleichungssystem für W an. *Hinweis: Siehe Beispiel IV.3.23.*

87. Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^6$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrcl} x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & -2x_5 & +2x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & -4x_5 & +4x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +3x_4 & -3x_5 & +3x_6 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +5x_4 & -5x_5 & +5x_6 & = & 0 \end{array}$$

Bestimme $\dim(L)$ und eine Basis von L. Gib auch ein minimales Gleichungssystem für L an. Bestimme auch ein minimales Gleichungssystem für L, das aus einigen der ursprünglichen Gleichungen besteht. Bestimme ein Komplement von L und beschreibe es mit Hilfe einer Basis als auch durch ein Gleichungssystem. *Hinweis: Siehe Beispiel IV.3.19.*

88. Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrcr} 3x_1 & -3x_2 & -3x_3 & -12x_4 & -12x_5 & = & -21 \\ x_1 & -3x_2 & -5x_3 & -18x_4 & -20x_5 & = & -41 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +6x_5 & = & 15 \\ -x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +16x_4 & +17x_5 & = & 35 \end{array}$$

und gib diese in Parameterform an. Bestimme auch ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum. Welche Dimension hat dieser? *Hinweis: Siehe Beispiel IV.4.2.*

89. Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & +x_2 & +3x_3 & +3x_4 & +5x_5 & = & 37 \\ x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +6x_4 & +8x_5 & = & 60 \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +8x_5 & = & 59 \\ -x_1 & -3x_2 & -7x_3 & -9x_4 & -8x_5 & = & -59 \end{array}$$

Gib auch eine Basis des Lösungsraums für das assoziierte homogene System an.

90. Bestimme die Dimension des affinen Teilraums

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$$

von $\mathbb{R}^5$. Gib auch ein minimales Gleichungssystem für E an. *Hinweis: Siehe Beispiel IV.4.4.*

91. Bestimme die Inversen folgender reeller Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

92. Bestimme die Inverse folgender komplexer Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 3 & 2+\mathbf{i} \\ 2\mathbf{i} & 7 & -\mathbf{i} \\ -1 & -1+4\mathbf{i} & 7+\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

93. Bestimme die Inversen folgender Matrizen über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

94. Zeige, dass die Vektoren

$$b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 9 \end{smallmatrix}\right), \quad b_2 = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 8 \\ 8 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \quad b_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{smallmatrix}\right), \quad b_4 = \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden. *Hinweis: Siehe Beispiel IV.5.2.*

95. Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & y_1 \\ & x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & y_2 \\ & x_2 & +4x_3 & +9x_4 & = & y_3 \\ & x_2 & +8x_3 & +27x_4 & = & y_4 \end{array}$$

für alle $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist und gib diese Lösung an. *Hinweis: Siehe Beispiel IV.5.6.*

96. Es sei A eine invertierbare Matrix mit rationalen Einträgen. Erkläre warum dann auch die Inverse, A^{-1}, nur rationale Einträge besitzt. Gib eine invertierbare (2×2)-Matrix mit ganzzahligen Einträgen an, deren Inverse nicht-ganzzahlige Einträge hat.

97. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Weiters seien B und C zwei geordnete Basen von V und es bezeichnen B^* bzw. C^* die dazu dualen Basen von V^*. Zeige, dass aus $B^* = C^*$ schon $B = C$ folgt. *Hinweis: Betrachte die zu B^* und C^* dualen Basen B^{**} und C^{**} von V^{**} und verwende Lemma IV.6.7 aus der Vorlesung.*

98. Zeige, dass $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bildet, wobei

$$b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \quad b_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \quad b_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \quad b_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{smallmatrix}\right).$$

Bestimme die Basiswechselmatrix T_{BE}, wobei $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ die Standardbasis bezeichnet, und berechne damit die Koordinaten $[v]_B$ folgender Vektoren bezüglich B:

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

99. Zeige, dass $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bildet, wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Matrix (bezüglich der Standardbasis) einer linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, für die $\varphi(b_1) = b_1$, $\varphi(b_2) = 2b_2$ und $\varphi(b_3) = 3b_3$ gilt. Wieviele solche Abbildungen φ gibt es? *Hinweis: Ohne Rechnung lassen sich $[\varphi]_{BB}$ und T_{EB} angeben, wobei $E = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.*

100. Zeige, dass die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden. Schließe daraus, dass $\mathbb{R}^4$ direkte Summe der beiden Teilräume $W = \langle b_1, b_2 \rangle$ und $W' = \langle b_3, b_4 \rangle$ ist, $\mathbb{R}^4 = W \oplus W'$. Bestimme die Matrix (bezüglich der Standardbasis) des damit assoziierten Projektors $\pi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ auf W längs W'. Berechne damit auch die Matrix des komplementären Projektors, sowie die Matrizen der beiden damit assoziierten Spiegelungen. *Hinweis: Ohne Rechnung lassen sich $[\pi]_{BB}$ und T_{EB} angeben, wobei $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ bezeichnet.*

101. Zeige, dass die Funktionen $f_1(x) := \sin(2x)$, $f_2(x) := \cos(2x)$, $f_3(x) := \sin(3x)$ und $f_4(x) := \cos(3x)$ linear unabhängig in $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind und daher eine Basis $B = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ des von ihnen aufgespannten Teilraums $V := \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle \subseteq F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bilden. Zeige, dass die Ableitung eine lineare Abbildung $D\colon V \to V$, $D(f) := f'$, liefert, und bestimme die Matrix $[D]_{BB}$ von D bezüglich B.

102. Zeige, dass die Polynome

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ h_1 &= z \\ h_2 &= z^2 - 1 \\ h_3 &= z^3 - 3z \\ h_4 &= z^4 - 6z^2 + 3 \end{aligned}$$

eine Basis $H = (h_0, h_1, h_2, h_3, h_4)$ von $\mathbb{R}[z]_{\leq 4}$ bilden. Bestimme die Matrix $[L]_{HH}$ der linearen Abbildung

$$L\colon \mathbb{R}[z]_{\leq 4} \to \mathbb{R}[z]_{\leq 4}, \qquad D(p) := p'' - zp'.$$

Berechne den Rang der linearen Abbildung L und gib eine Basis ihres Kerns an. Bestimme jenes Polynom $p \in \mathbb{R}[z]_{\leq 4}$ für das $[p]_H = (1,0,1,0,1)^t$ gilt. Berechne auch die Koordinaten $[q]_H$ des Polynoms $q = z^4 + 2z^3 - 6z^2 - 6z - 6$.

103. Betrachte die drei linearen Funktionale $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\gamma_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2y + 3z, \quad \gamma_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 4y + 9z, \quad \gamma_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 8y + 27z.$$

Zeige, dass $C = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ eine Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$ bildet. Bestimme eine Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ von $\mathbb{R}^3$, deren duale Basis mit C übereinstimmt, $B^* = C$. *Hinweis: Ohne Rechnung lässt sich die Basiswechselmatrix $T_{E^*C} = T_{E^*B^*}$ angeben, wobei E^* die zur Standardbasis $E = (e_1, e_2, e_3)$ duale Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$ bezeichnet. Berechne daraus T_{EB}, siehe Korollar IV.6.21, und lies die Basis B ab.*

104. Es sei $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix. Zeige, dass geordnete Basen B und C von $\mathbb{K}^n$ existieren, sodass $T_{CB} = S$ gilt, wobei T_{CB} die Basiswechselmatrix bezeichnet. *Hinweis: Wir können für B (oder C) die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$ verwenden.*

105 (Äquivalente Matrizen). Zwei Matrizen $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ werden äquivalent genannt, falls invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ existieren, sodass $B = TAS$. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf der Menge der $(m \times n)$-Matrizen definiert. Zeige weiters: Ist $\psi \colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, $C, \tilde{C}$ geordnete Basen von V und $D, \tilde{D}$ geordnete Basis von W, dann sind die Matrizen $[\psi]_{DC}$ und $[\psi]_{\tilde{D}\tilde{C}}$ ähnlich. Zeige auch, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) A und B sind äquivalent.
(b) B lässt sich aus A durch Zeilen- und Spaltenumformungen gewinnen.
(c) Es existieren Basen C von $\mathbb{K}^m$ und D von $\mathbb{K}^n$, sodass $B = [\psi_A]_{DC}$, wobei ψ_A die lineare Abbildung $\psi_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi_A(x) = Ax$, bezeichnet.
(d) A und B haben gleichen Rang.

Schließe daraus, dass jede Matrix $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ äquivalent zu einer Matrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ist, wobei $k = \operatorname{rank}(A)$.

106 (Ähnliche Matrizen). Zwei quadratische Matrizen $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ werden ähnlich genannt, falls eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ existiert, sodass $B = SAS^{-1}$. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf der Menge der $(n \times n)$-Matrizen definiert. Zeige weiters: Ist $\varphi \colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V und sind B bzw. C zwei geordnete Basen von V, dann sind die Matrizen $[\varphi]_{BB}$ und $[\varphi]_{CC}$ ähnlich. Zeige auch, dass für fixes $\lambda \in \mathbb{K}$ die beiden Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ nicht ähnlich sind. *Hinweis: Sind A und B zwei ähnliche Matrizen, dann sind auch $A - \lambda I$ und $B - \lambda I$ ähnliche Matrizen.*