Übungen zu “Einführung in die lineare Algebra und Geometrie”

Wintersemester 2011/12

Stefan Haller

1. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$\psi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

linear ist, d.h. für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\psi(x + \tilde{x}) = \psi(x) + \psi(\tilde{x}) \quad \text{und} \quad \psi(\lambda x) = \lambda\psi(x).$$

2. Sei $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, d.h. es gelte $\psi(x+\tilde{x}) = \psi(x)+\psi(\tilde{x})$ und $\psi(\lambda x) = \lambda\psi(x)$, für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Menge

$$L := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) = 0\}$$

einen Teilraum bildet, d.h. für alle $x, \tilde{x} \in L$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $x+\tilde{x} \in L$ und $\lambda x \in L$. Zeige weiters, dass auch

$$W := \operatorname{img}(\psi) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : \psi(x) = y\}$$

ein Teilraum ist, d.h. für alle $y, \tilde{y} \in W$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $y+\tilde{y} \in W$ und $\lambda y \in W$.

3. Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & = & y_1 \\ 2x_1 & +5x_2 & +8x_3 & +3x_4 & = & y_2 \\ 3x_1 & +8x_2 & +14x_3 & +8x_4 & = & y_3 \\ & +3x_2 & +8x_3 & +14x_4 & = & y_4 \end{array}$$

für jedes $y \in \mathbb{R}^4$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^4$ besitzt und bestimme diese Lösung. Was bedeutet dies für die Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \qquad \psi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 \\ 3x_1 + 8x_2 + 14x_3 + 8x_4 \\ +3x_2 + 8x_3 + 14x_4 \end{pmatrix}?$$

4. Für welche $y \in \mathbb{R}^4$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & -3x_2 & 2x_3 & = & y_1 \\ 4x_1 & -6x_2 & -4x_3 & = & y_2 \\ 6x_1 & -9x_2 & -6x_3 & = & y_3 \\ -2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & y_4 \end{array}$$

wenigstens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$. Gib ein Gleichungssystem mit möglichst wenigen Gleichungen für die Menge dieser y an.

5. Betrachte das homogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & & & +4x_4 & +5x_5 & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & & +10x_4 & +13x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & +3x_3 & +5x_4 & +8x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +16x_4 & +21x_5 & = & 0 \end{array}$$

Bestimme eines Basis des Lösungsraums

$$L := \big\{x \in \mathbb{R}^5 \mid x \text{ genügen allen vier Gleichungen oben}\big\},$$

d.h. bestimme Vektoren $b_1, \dots, b_l \in L$, sodass sich jedes $x \in L$ in der Form

$$x = s_1 b_1 + \dots + s_l b_l$$

schreiben lässt, für eindeutig bestimmte Skalare $s_1, \dots, s_l \in \mathbb{R}$. *Hinweis:* $l = 2$. Gib auch ein Gleichungssystem für L an, das nur aus drei Gleichungen besteht.

6. Sei $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, d.h. es gelte $\psi(x+\tilde{x}) = \psi(x) + \psi(\tilde{x})$ und $\psi(\lambda x) = \lambda\psi(x)$, für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Für $y \in \mathbb{R}^m$ betrachte

$$L_y := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) = y\}$$

und setze $L := L_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) = 0\}$. Weiters sei $\xi_y \in L_y$. Zeige, dass die Abbildung

$$\phi_y\colon L \xrightarrow{\cong} L_y, \quad \phi_y(x) := \xi_y + x,$$

eine Bijektion ist und schließe daraus

$$L_y = \{\xi_y + x \mid \psi(x) = 0\} = \xi_y + L.$$

Was bedeutet dies für ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen in n Variablen?

7. Sei $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear und $\xi \in \mathbb{R}^m$. Zeige, dass die Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad \phi(x) := \xi + \psi(x),$$

affin ist, d.h. es gilt

$$\phi\big(\lambda x + (1-\lambda)\tilde{x}\big) = \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(\tilde{x}),$$

für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Wann ist ϕ linear?

8. Bestimme alle komplexen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrcr} z_1 & +\mathbf{i}z_2 & +(1+\mathbf{i})z_3 & = & \mathbf{i}-1 \\ (2+\mathbf{i})z_1 & +(-3+\mathbf{i})z_2 & +2\mathbf{i}z_3 & = & -5 \end{array}$$

d.h. bestimme alle $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ die den beiden Gleichungen genügen.

9. Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} \mathbf{i}z_1 & +2\mathbf{i}z_2 & +(1+\mathbf{i})z_3 & = & w_1 \\ (1+\mathbf{i})z_1 & +(2+\mathbf{i})z_2 & +(3+2\mathbf{i})z_3 & = & w_2 \\ (2+\mathbf{i})z_1 & +(4+2\mathbf{i})z_2 & +(1+2\mathbf{i})z_3 & = & w_3 \end{array}$$

für jedes $w \in \mathbb{C}^3$ eine eindeutige Lösung $z \in \mathbb{C}^3$ besitzt und bestimme diese Lösung. Was bedeutet dies für die Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \qquad \psi\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{i}z_1 + 2\mathbf{i}z_2 + (1+\mathbf{i})z_3 \\ (1+\mathbf{i})z_1 + (2+\mathbf{i})z_2 + (3+2\mathbf{i})z_3 \\ (2+\mathbf{i})z_1 + (4+2\mathbf{i})z_2 + (1+2\mathbf{i})z_3 \end{pmatrix}?$$

10. Bestimme alle rationalen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{6}x_2 + \tfrac{2}{3}x_3 &= \tfrac{1}{3} \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{5}{6}x_3 &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

d.h. bestimme alle $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Q}^3$, die dieses System lösen.

11. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $\mathbb{K}^n$ bezüglich komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet, vgl. Beispiel II.1.3 aus der Vorlesung.

12. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$, wobei p eine Primzahl bezeichnet. Aus wievielen Elementen besteht der Vektorraum $\mathbb{K}^n$?

13. Sei X eine Menge und V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Zeige, dass die Menge aller Abbildungen $X \to V$ bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet. *Hinweis: In der Vorlesung haben wir bereits die Vektorraumaxiome (V1) – (V3) und (V6) überprüft, siehe Beispiel II.1.6. Zeige nun analog, dass auch die restlichen Axiome gelten.*

14. Sei X eine Menge und $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige, dass die punktweise Multiplikation $\mathbb{K}$-wertiger Funktionen $X \to \mathbb{K}$ folgende Eigenschaften besitzt:

(a) $f(gh) = (fg)h$
(b) $fg = gf$
(c) $1f = f = f1$, wobei $1\colon X \to \mathbb{K}$ die konstante Einsfunktion bezeichnet.
(d) $f(g_1 + g_2) = fg_1 + fg_2$ und $f(\lambda g) = \lambda(fg)$
(e) $(f_1 + f_2)g = f_1g + f_2g$ und $(\lambda f)g = \lambda(fg)$

für beliebige Funktionen $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2, h\colon X \to \mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Die Menge aller Funktion $X \to \mathbb{K}$ bildet daher eine kommutative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins, vgl. Bemerkung II.1.7 aus der Vorlesung.

15. Zeige, dass $\mathbb{K}[z]$, d.h. die Menge der Polynome mit Koeffizienten in einem Körper $\mathbb{K}$, tatsächlich einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet. Zeige weiters, dass die Multipikation von Polynomen folgende Eigenschaften besitzt:

(a) $p(qr) = (pq)r$

(b) $pq = qp$
(c) $1p = p = p1$, wobei $1 = 1 + 0z + 0z^2 + \cdots$ das Einspolynom bezeichnet.
(d) $r(p + q) = rp + rq$ und $p(\lambda q) = \lambda(pq)$
(e) $(p + q)r = pr + qr$ und $(\lambda p)q = \lambda(pq)$

für beliebige Polynome $p, q, r \in \mathbb{K}[z]$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Somit ist $\mathbb{K}[z]$ eine kommutative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins. *Hinweis: In der Vorlesung haben wir bereits die Assoziativität bewiesen, vgl. Bemerkung II.1.9.*

16. Welche der folgenden Teilmengen sind Teilräume von $\mathbb{R}^2$?

$$\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 7\right\} \qquad \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\right\}$$
$$\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\right\} \qquad \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 0\right\}$$
$$\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\right\} \qquad \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \text{ und } x - y = 0\right\}$$

17. Wieviele Elemente hat der Teilraum

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0 \right\},$$

über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ und wieviele im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$?

18. Zeige, dass die Menge der 1-periodischen Funktionen,

$$\left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \forall x \in \mathbb{R} : f(x + 1) = f(x) \right\},$$

einen Teilraum von $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bildet.

19. Seien W_1 und W_2 zwei Teilräume eines Vektorraums V. Zeige, dass die Vereinigung $W_1 \cup W_2$ genau dann einen Teilraum von V bildet, wenn $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$ gilt.

20. Sei W_i, $i \in I$, eine Familie von Teilräumen eines Vektorraums V, sodass für je zwei $i, j \in I$ stets $W_i \subseteq W_j$ oder $W_j \subseteq W_i$ gilt. Zeige, dass in dieser Situation $\bigcup_{i \in I} W_i$ einen Teilraum von V bildet.

21. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad \psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(v) = -v$$
$$\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \rho\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ 2x \end{pmatrix} \qquad \kappa\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \kappa\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \end{pmatrix}$$
$$\chi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \chi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = x - y + z \qquad f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x + 7$$

22. Sei $\varphi\colon V \to W$ eine Abbildung zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Zeige, dass φ genau dann linear ist, wenn es folgender Bedingung genügt:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}\, \forall v_1, v_2 \in V : \varphi(v_1 + \lambda v_2) = \varphi(v_1) + \lambda \varphi(v_2)$$

23. Sei $\varphi\colon V \to W$ eine Abbildung zwischen $\mathbb{Q}$-Vektorräumen. Zeige, dass φ genau dann linear ist, wenn es folgende Eigenschaft besitzt:

$$\forall v, w \in V : \varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$$

Hinweis: Zeige zunächst $\varphi(nv) = n\varphi(v)$, *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $v \in V$.

24. Sei V ein Vektorraum und $g\colon Y \to X$ eine Abbildung. Zeige, dass die Zuordnung $F(X, V) \to F(Y, V)$, $f \mapsto f \circ g$, eine lineare Abbildung ist. Schließe daraus, dass für jede Teilmenge $A \subseteq X$, die Abbildung $F(X, V) \to F(A, V)$, $f \mapsto f|_A$, linear ist. Folgere daraus auch, dass für jedes $x \in X$, die sogenannte Evaluationsabbildung, $\mathrm{ev}_x\colon F(X, V) \to V$, $\mathrm{ev}_x(f) := f(x)$, linear ist.

25. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Betrachte die beiden Abbildungen

$$\varphi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2, \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x + y \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \psi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2, \psi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass φ und ψ beide lineare Isomorphismen sind, und bestimme ihre Umkehrabbildungen. Zeige auch $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$, und schließe daraus, dass die Gruppe $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^2)$ nicht abelsch ist.

26. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und betrachte den Teilraum

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \,\middle|\, 7x - y + 8z = 0 \right\}$$

von $\mathbb{K}^3$. Konstruiere einen linearen Isomorphismus $\mathbb{K}^2 \cong W$.

27. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und betrachte den Teilraum

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \,\middle|\, \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 0 \\ 2x + 5y + z & = & 0 \end{array} \right\}$$

von $\mathbb{K}^3$. Konstruiere einen linearen Isomorphismus $\mathbb{K} \cong W$.

28. Sei W ein Teilraum eines Vektorraums V. Zeige, dass

$$\{\varphi \in \mathrm{end}(V) \mid \varphi(W) \subseteq W\}$$

einen Teilraum von $\mathrm{end}(V)$ bildet, der auch abgeschlossen unter der Komposition linearer Abbildungen ist. Zeige auch, dass

$$\{\varphi \in \mathrm{GL}(V) \mid \varphi(W) = W\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ bildet.

29 (Fünferlemma). Freiwilliges Beispiel! Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\rho_1"', "\cong"] & V_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\rho_2"', "\cong"] & V_3 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "\rho_3"] & V_4 \arrow[r, "\varphi_4"] \arrow[d, "\cong"', "\rho_4"] & V_5 \arrow[d, "\cong"', "\rho_5"] \\
W_1 \arrow[r, "\psi_1"] & W_2 \arrow[r, "\psi_2"] & W_3 \arrow[r, "\psi_3"] & W_4 \arrow[r, "\psi_4"] & W_5
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm linearer Abbildungen zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen mit exakten Zeilen. Genauer, sollen die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein:

(a) $V_1, \ldots, V_5$ und $W_1, \ldots, W_5$ sind $\mathbb{K}$-Vektorräume.
(b) $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$, $\psi_1, \ldots, \psi_4$ und $\rho_1, \ldots, \rho_5$ sind lineare Abbildungen.
(c) Das Diagramm kommutiert, d.h. für $i = 1, 2, 3, 4$ gilt

$$\rho_{i+1} \circ \varphi_i = \psi_i \circ \rho_i.$$

(d) Die Zeilen sind exakt, d.h. für $i = 1, 2, 3$ gilt

$$\operatorname{img}(\varphi_i) = \ker(\varphi_{i+1}) \quad \text{und} \quad \operatorname{img}(\psi_i) = \ker(\psi_{i+1}).$$

Zeige nun: Sind ρ_1, ρ_2, ρ_4 und ρ_5 Isomorphismen, dann muss auch ρ_3 ein Isomorphismus sein.

Hinweis zur Surjektivität von ρ_3: Beginne etwa wie folgt: Sei $w_3 \in W_3$ beliebig. Da ρ_4 surjektiv ist, existiert $v_4 \in V_4$ mit $\rho_4(v_4) = \psi_3(w_3)$. Wegen der Kommutativität des rechten Quadrats, folgt $\rho_5(\varphi_4(v_4)) = \psi_4(\rho_4(v_4)) = \psi_4(\psi_3(w_3)) = 0$, denn aufgrund der Exaktheit bei W_4 gilt $\psi_4 \circ \psi_3 = 0$. Da ρ_5 injektiv ist, erhalten wir $\varphi_4(v_4) = 0$, also $v_4 \in \ker(\varphi_4)$. Wegen der Exaktheit bei V_4 existiert $v_3 \in V_3$ mit $\varphi_3(v_3) = v_4$. Wegen der Kommutativität des Diagramms folgt $\psi_3(w_3 - \rho_3(v_3)) = 0$, d.h. $w_3 - \rho_3(v_3) \in \ker(\psi_3)$. Verwende nun die Exaktheit bei W_3 und die Surjektivität von ρ_2 um ein Element $\tilde{v}_3 \in V_3$ mit $\rho_3(\tilde{v}_3) = w_3$ zu konstruieren.

Hinweis zur Injektivität von ρ_3: Zeige, dass ρ_3 trivialen Kern hat. Sei dazu $v_3 \in V_3$ so, dass $\rho_3(v_3) = 0$. Da ρ_4 injektiv ist, lässt sich daraus $\varphi_3(v_3) = 0$ folgern, also $v_3 \in \ker(\varphi_3)$. Verwende nun die Exaktheit bei V_3 ... dann die Exaktheit bei W_2 ... die Surjektivität von ρ_1 ... und schließlich die Exaktheit bei V_2.

30. Sofern diese definiert sind, berechne die Produkte AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB und CC folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme auch $A^4 = AAAA$.

31. Zeige, dass die folgenden Matrizen über den Körpern $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ invertierbar sind und bestimme ihre Inversen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Matrizen sind über den Körpern $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ und $\mathbb{Z}_7$ invertierbar?

32. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Unter einer *Diagonalmatrix* verstehen wir eine Matrix $D \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ der Gestalt

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

d.h. $a_{ij} = 0$ falls $i \neq j$. Zeige, dass die Diagonalmatrizen einen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bilden, der auch abgeschlossen unter Matrizenmultiplikation ist. Zeige, dass für zwei Diagonalmatrizen D und D' stets $DD' = D'D$ gilt. Formuliere ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für die Invertierbarkeit von Diagonalmatrizen. Wie sieht im invertierbaren Fall die Inverse aus?

33. Zeige, dass die folgenden beiden Matrizen (über jedem Körper) invertierbar sind und berechne ihre Inversen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

34. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Unter einer *oberen Dreiecksmatrix* verstehen wir eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, die folgende Gestalt hat

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

d.h. $a_{ij} = 0$ für alle $1 \leq j < i \leq n$. Zeige, dass die oberen Dreiecksmatrizen einen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bilden, der auch abgeschlossen unter Matrizenmultiplikation ist. Zeige weiters, dass eine obere Dreiecksmatrix genau dann invertierbar ist, wenn alle Diagonalelemente a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, verschieden von 0 sind und, dass in diesem Fall die Inverse Matrix wieder eine obere Dreiecksmatrix bildet. Was kann über die Diagonalelemente der Inversen ausgesagt werden?

35. Betrachte die Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = i+1, \text{ und} \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Berechne $A^k = A \cdots A$, für jedes $k \in \mathbb{N}$. *Hinweis: Vielleicht ist es hilfreich dies zunächst für kleine n, etwa* $A = \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$ *oder* $A = \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$ *durchzuführen.*

36. Unter der Spur einer quadratischen Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ verstehen wir den Skalar $\operatorname{tr}(A) := a_{11} + \cdots + a_{nn}$, d.h. die Summe der Diagonaleinträge. Berechne

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass die Spur eine surjektive lineare Abbildung $\operatorname{tr}\colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definiert. Zeige auch $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, $\operatorname{tr}(A^t) = \operatorname{tr}(A)$ und $\operatorname{tr}(I_n) = n$, für je zwei Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

37. Zeige, dass die Verknüpfung

$$M_{n\times n}(\mathbb{K}) \times M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to M_{n\times n}(\mathbb{K}), \quad (A, B) \mapsto [A, B] := AB - BA,$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) $[A_1 + A_2, B] = [A_1, B] + [A_2, B]$ und $[\lambda A, B] = \lambda[A, B]$.
(b) $[A, B_1 + B_2] = [A, B_1] + [A, B_2]$ und $[A, \lambda B] = \lambda[A, B]$.
(c) $[A, B] = -[B, A]$ und $[A, A] = 0$.
(d) $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$. (Jacobi-Identität)
(e) $[A, B]^t = -[A^t, B^t]$
(f) $\operatorname{tr}\big([A, B]C\big) = \operatorname{tr}\big(A[B, C]\big)$

Dabei sind $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Der Ausdruck $[A, B] = AB - BA$ wird als *Kommutator* der Matrizen A und B bezeichnet. Zeige auch, dass der Kommutator zweier schiefsymmetrischer Matrizen wieder schiefsymmetrisch ist, d.h. aus $A^t = -A$ und $B^t = -B$ folgt stets $[A, B]^t = -[A, B]$.

38. Betrachte die reellen (2×2)-Matrizen,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeige $[H, E] = 2E$, $[H, F] = -2F$ und $[E, F] = H$, wobei $[A, B] = AB - BA$ den Kommutator bezeichnet, vgl. Aufgabe 37. Zeige auch $[[H, H], E] \neq [H, [H, E]]$ und schließe daraus, dass die Verknüpfung $(A, B) \mapsto [A, B]$ nicht assoziativ ist.

39. Seien $n_1, n_2, m_1, m_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} A &\in M_{n_1 \times m_1}(\mathbb{K}), & B &\in M_{n_1 \times m_2}(\mathbb{K}), \\ C &\in M_{n_2 \times m_1}(\mathbb{K}), & D &\in M_{n_2 \times m_2}(\mathbb{K}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &\in M_{m_1 \times k_1}(\mathbb{K}), & F &\in M_{m_1 \times k_2}(\mathbb{K}), \\ G &\in M_{m_2 \times k_1}(\mathbb{K}), & H &\in M_{m_2 \times k_2}(\mathbb{K}). \end{aligned}$$

Setze $n := n_1 + n_2$, $m := m_1 + m_2$, $k := k_1 + k_2$ und betrachte die Blockmatrizen

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{n \times m}(\mathbb{K}) \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \in M_{m \times k}(\mathbb{K}).$$

Zeige folgende Formel für das Matrizenprodukt:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix}$$

Berechne damit

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I_r \\ -I_r & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $I_r \in M_{r \times r}(\mathbb{K})$ die $(r \times r)$-Einheitsmatrix bezeichnet.

40. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und $n := n_1 + n_2$. Zeige, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{K}) \;\middle|\; A \in M_{n_1 \times n_1}(\mathbb{K}),\, D \in M_{n_2 \times n_2}(\mathbb{K}),\, B \in M_{n_1 \times n_2}(\mathbb{K}) \right\}$$

einen Teilraum von $M_{n \times n}(\mathbb{K})$ bildet, der auch abgeschlossen unter Matrizenmultiplikation ist. Zeige, dass diese Matrizen genau den linearen Abbildungen $\psi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ entsprechen, für die $\psi(\mathbb{K}^{n_1}) \subseteq \mathbb{K}^{n_1}$ gilt, wobei wir $\mathbb{K}^{n_1}$ in offensichtlicher Weise als Teilraum von $\mathbb{K}^n$ auffassen. Zeige, auch dass eine Matrix dieser Form invertierbar ist, falls A und D beide invertierbar sind und, dass in diesem Fall

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}$$

gilt. Schließe daraus, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in M_{n \times n}(\mathbb{K}) \;\middle|\; A \in \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{K}),\, D \in \mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{K}),\, B \in M_{n_1 \times n_2}(\mathbb{K}) \right\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ bildet, vgl. Aufgabe 28. *Hinweis: Aufgabe 39.*

41. Zeige, dass die folgende Matrix über jedem Körper invertierbar ist und bestimme ihre Inverse

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Verwende Aufgabe 40 und Beispiel II.4.8 aus der Vorlesung.

42. Ist $p \in \mathbb{K}[z]$ ein Polynom, d.h. $p = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$ mit Koeffizienten $p_i \in \mathbb{K}$, und ist $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine quadratische Matrix, dann können wir A in p einsetzen und erhalten eine Matrix $p(A) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$,

$$p(A) := p_0 I_n + p_1 A + p_2 A^2 + p_3 A^3 + \cdots$$

Für beliebige $p, q \in \mathbb{K}[z]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zeige

$$(p+q)(A) = p(A) + q(A), \quad (\lambda p)(A) = \lambda p(A) \quad \text{sowie} \quad (pq)(A) = p(A)q(A).$$

Was bedeutet dies für die Zuordnung $\mathbb{K}[z] \to F(M_{n\times n}(\mathbb{K}), M_{n\times n}(\mathbb{K}))$, die einem Polynom $p \in \mathbb{K}[z]$ die Abbildung $M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $A \mapsto p(A)$, zuordnet? Berechne auch $p(A)$, wobei $p = 2 - 3z + z^2$ und $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

43. Für Vektoren $x, y \in \mathbb{K}^3$ wird ihr Kreuzprodukt $x \times y \in \mathbb{K}^3$ durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

definiert. Zeige, dass das Kreuzprodukt folgenden Rechenregeln genügt:

(a) $x \times (y + \tilde{y}) = x \times y + x \times \tilde{y}$ und $x \times (\lambda y) = \lambda(x \times y)$.
(b) $(x + \tilde{x}) \times y = x \times y + \tilde{x} \times y$ und $(\lambda x) \times y = \lambda(x \times y)$.
(c) $x \times y = -y \times x$ und $x \times x = 0$.
(d) $(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = 0$. (Jacobi-Identität)
(e) $(x \times y)^t z = x^t (y \times z)$.
(f) $(x \times y) \times z = (z^t x) y - (y^t z) x$. (Graßmann-Identität)
(g) $x^t (x \times y) = 0 = y^t (x \times y)$.

Dabei sind $x, \tilde{x}, y, \tilde{y}, z \in \mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

44. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{K}^3 \to M_{3\times 3}(\mathbb{K}), \quad \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_2 \\ -x_3 & -x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

einen linearen Isomorphismus auf den Teilraum der schiefsymmetrischen Matrizen definiert. Für beliebige $x, y \in \mathbb{K}^3$ zeige weiters

$$\varphi(x \times y) = [\varphi(x), \varphi(y)].$$

Dabei bezeichnet $[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x)$ den Kommutator von Matrizen, vgl. Aufgabe 37.

45. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige $W + W' = \mathbb{K}^4$, wobei:

$$W := \{x \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}$$
$$W' := \{x \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

46. Seien W, W_1, W_2 und W_3 vier Teilräume eines Vektorraums V. Zeige

(a) $W_1 + W_2 = W_2 + W_1$
(b) $W_1 + (W_2 + W_3) = (W_1 + W_2) + W_3$
(c) $W + \{0\} = W$
(d) $W_1 + W_2 = W_2 \Leftrightarrow W_1 \subseteq W_2$

Warum bildet die Menge aller Teilräume mit dieser Verknüpfung + i.A. keine Gruppe? Gib einen Vektorraum V an, für den dies doch der Fall ist.

47. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und betrachte folgende Teilräume von $\mathbb{K}^5$,

$$W := \{x \in \mathbb{K}^5 \mid x_4 = x_5 = 0\} \quad \text{und} \quad W' := \{x \in \mathbb{K}^5 \mid x_1 = x_2 = x_3 = 0\},$$

wobei $x_i \in \mathbb{K}$ die Komponenten des Vektors $x \in \mathbb{K}^5$ bezeichnen. Zeige

$$\mathbb{K}^5 = W \oplus W'.$$

Bestimme die Matrizen zur Projektion auf W längs W', zur Projektion auf W' längs W, zur Spiegelung an W längs W' und zur Spiegelung an W' längs W.

48. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varepsilon\colon V \to \mathbb{K}$ linear und $g \in V$, sodass $\varepsilon(g) \neq 0$. Zeige, dass V innere direkte Summe der Teilräume $E := \{v \in V : \varepsilon(v) = 0\}$ und $G := \{\lambda g : \lambda \in \mathbb{K}\}$ ist. Gib auch Formeln für die Projektion auf E längs G, die Projektion auf G längs E und die Spiegelung an E längs G an. *Hinweis: Dies ist eine Verallgemeinerung von Beispiel II.5.10 aus der Vorlesung.*

49. Zeige, dass die Menge der spurfreien Matrizen, d.h.

$$W := \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) : \operatorname{tr}(A) = 0\},$$

einen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bildet. Zeige auch, dass die Vielfachen der Einheitsmatrix,

$$W' := \{\lambda I_n : \lambda \in \mathbb{K}\},$$

einen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bilden. Unter der Annahme $n \neq 0 \in \mathbb{K}$ zeige weiters

$$M_{n\times n}(\mathbb{K}) = W \oplus W',$$

und gib Formeln für die Projektion auf W längs W' sowie die Projektion auf W' längs W an.

50. Es sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ in dem $2 \neq 0$ gilt. Weiters sei $\sigma\colon V \to V$ linear, sodass $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_V$. Zeige, dass V innere direkte Summe der beiden Teilräume $W_+ = \{v \in V : \sigma(v) = v\}$ und $W_- = \{v \in V : \sigma(v) = -v\}$ ist. Zeige auch, dass die Projektion auf W_+ längs W_- und die Projektion auf W_- längs W_+ durch $\pi_+ = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_V + \sigma)$ bzw. $\pi_- = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_V - \sigma)$ gegeben sind. Inwiefern ist diese eine Verallgemeinerung von Beispiel II.5.12 aus der Vorlesung?

51. Betrachte die beiden Teilräume

$$W_1 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+y=0 \right\} \quad \text{und} \quad W_2 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x-2y=0 \right\}.$$

Zeige $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$ und bestimme die Matrix der Projektion auf W_1 längs W_2 sowie die Matrix der Projektion auf W_2 längs W_1. Bestimme auch die Matrix der Spiegelung an W_1 längs W_2 sowie die Matrix der Spiegelung an W_2 längs W_1.

52. Betrachte die beiden Teilräume

$$W_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x+y=0 \\ y+z=0 \end{matrix} \right\} \quad \text{und} \quad W_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+z=0 \right\}.$$

Zeige $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3$ und bestimme die Matrix der Projektion auf W_1 längs W_2 sowie die Matrix der Projektion auf W_2 längs W_1. Bestimme auch die Matrix der Spiegelung an W_1 längs W_2 sowie die Matrix der Spiegelung an W_2 längs W_1.

53. Für einen Teilraum W eines Vektorraums V zeige dass $V/W = \{0\}$ genau dann gilt, wenn $V = W$.

54. Sei $W := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ und bezeichne $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/W$ die kanonische Projektion. Zeige $\pi(u) = \pi(v)$ und $\pi(u) \neq \pi(w)$, wobei:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

55. Sei W ein Teilraum eines Vektorraums V und $\varphi\colon V \to V$ linear, sodass $\varphi(W) \subseteq W$. Zeige, dass es genau eine lineare Abbildung $\bar{\varphi}\colon V/W \to V/W$ gibt, sodass $\pi \circ \varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$, wobei $\pi\colon V \to V/W$ die kanonische Projektion bezeichnet.

56. Sind A und B zwei Teilmengen eines Vektorraums V, dann gilt für die lineare Hülle i.A. $\langle A \cap B \rangle \neq \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$. Erläutere dies an einem Beispiel.

57. Welche der folgenden Teilmengen bilden Erzeugendensysteme der angegebenen Vektorräume?

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 16 \\ 17 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ x \end{smallmatrix}\right) : x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{i} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{C}^2$$

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{i} \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -\mathbf{i} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -\mathbf{i} \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{C}^2$$

58. Zeige, dass die folgenden Teilmengen linear abhängig sind und gib jeweils ein Element an, das sich als Linearkombination der restlichen schreiben lässt:

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^4 \qquad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ \mathbf{i} \\ 4-\mathbf{i} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 7+7\mathbf{i} \\ \mathbf{i}-1 \\ 5+3\mathbf{i} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\mathbf{i} \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{C}^2$$

59. Zeige, dass die folgenden Teilmengen linear unabhängig sind:

$$\{\left(\begin{smallmatrix}9\\7\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}6\\5\end{smallmatrix}\right)\}\subseteq\mathbb{R}^2 \qquad \left\{\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^4 \qquad \left\{\begin{pmatrix}\mathbf{i}\\0\\1+\mathbf{i}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2+7\mathbf{i}\\3-\mathbf{i}\\5\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{C}^3$$

60. Fasse $V=\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ auf und zeige, dass $\{1,\sqrt{2}\}\subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge bildet.

61. Welche der folgenden Teilmengen bilden Basen der angegebenen Vektorräume?

$$\{\left(\begin{smallmatrix}1\\7\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}2\\13\end{smallmatrix}\right)\}\subseteq\mathbb{R}^2 \qquad \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$$

$$\{\left(\begin{smallmatrix}1\\\mathbf{i}\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{i}\\\mathbf{i}\end{smallmatrix}\right)\}\subseteq\mathbb{C}^2 \qquad \left\{1,1+z,1+2z+z^2\right\}\subseteq\mathbb{R}[z]_{\leq 2}$$

62. Erweitere den Vektor $\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.

63. Zeige, dass jede endliche totalgeordnete Menge ein eindeutiges Maximum besitzt. *Hinweis: Induktion nach der Anzahl der Elemente.*

64. Sei W ein Teilraum eines Vektorraums V. Zeige, dass ein zu W komplementärer Teilraum M in V existiert, d.h. $W\oplus M=V$, wie folgt:

(a) Sei U ein Teilraum von V, $W\cap U=\{0\}$ und $v\in V\setminus(W+U)$. Zeige, dass $U':=\langle v\rangle+U$ ein Teilraum von V ist, für den $U'\supsetneq U$ und $W\cap U'=\{0\}$ gilt.

(b) Die Mengeninklusion $\subseteq$ definiert eine Halbordnung auf der Menge

$$X=\left\{U\;\middle|\;U\text{ ist Teilraum von }V\text{ und }W\cap U=\{0\}\right\}.$$

Zeige, dass jede Kette in X eine obere Schranke besitzt. *Hinweis: Für jede totalgeordnete Teilmenge $K\subseteq X$ ist $S:=\bigcup_{U\in K}U$ ein Teilraum von V für den $W\cap S=\{0\}$ gilt, vgl. Aufgabe 20.*

(c) Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element $M\in X$. Zeige mit Hilfe von (a), dass $W\oplus M=V$ gilt.

65. Seien $U\xrightarrow{\varphi}V\xrightarrow{\psi}W$ linear und $U^*\xleftarrow{\varphi^t}V^*\xleftarrow{\psi^t}W^*$ die dazu dualen Abbildungen. Zeige

$$\operatorname{img}(\varphi)=\ker(\psi)\quad\Leftrightarrow\quad\operatorname{img}(\varphi^t)=\ker(\psi^t).$$

Hinweis: Verwende Satz III.4.10 aus der Vorlesung.

66. a) Sei $\pi\colon V\to V$ ein Projektor, d.h. $\pi\circ\pi=\pi$. Zeige, dass dann auch die duale Abbildung $\pi^t\colon V^*\to V^*$ ein Projektor ist, und beschreibe dessen Bild und Kern. b) Seien nun W_1 und W_2 zwei komplementäre Teilräume von V, d.h. $V=W_1\oplus W_2$. Weiters bezeichne $\pi_1\colon V\to W_1$ die damit assoziierte Projektion auf W_1 längs W_2 und $\pi_2\colon V\to W_2$ die Projektion auf W_2 längs W_1. Nach Satz III.4.9 ist dann auch $V^*=W_1^\circ\oplus W_2^\circ$. Zeige, dass π_1^t mit der Projektion auf W_2° längs W_1° übereinstimmt, und analog für π_2^t.

67. Sei V ein Vektorraum und $\in \mathbb{N}_0$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\dim(V) = n$.
(b) Es existieren n linear unabhängige Vektoren, und je $n+1$ Vektoren in V sind linear abhängig.
(c) Es existiert ein Erzeugendensystem von V mit n Vektoren, und je $n-1$ Vektoren erzeugen V nicht.

68. Sei X eine n-elementige Menge. Zeige $\dim(F(X,\mathbb{K})) = n$.

69. Sei X eine Menge mit unendlich vielen Elementen. Zeige, dass $F(X,\mathbb{K})$ unendlich-dimensional ist. *Hinweis: Für jedes $x \in X$ betrachte die Funktion $e_x\colon X \to \mathbb{K}$, $e_x(x) := 1$, $e_x(y) := 0$ falls $y \neq x$, und zeige, dass die Menge $\{e_x \mid x \in X\}$ linear unabhängig in $F(X,\mathbb{K})$ ist.*

70. Zeige: Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann linear unabhängig, wenn ihr Kreuzprodukt $z := x \times y$ verschieden von Null ist. In diesem Fall bilden die Vektoren x, y, z eine Basis von $\mathbb{R}^3$. *Hinweis: Es genügt die lineare Unabhängigkeit zu zeigen.* In diesem Fall gilt weiters

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{array}{rcl} x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 & = & 0 \\ y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3 & = & 0 \end{array} \right\} = \big\{\lambda z \bigm| \lambda \in \mathbb{R}\big\},$$

sowie

$$\big\{\lambda x + \mu y \bigm| \lambda, \mu \in \mathbb{R}\big\} = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z_1u_1 + z_2u_2 + z_3u_3 \right\}.$$

Hinweis: In beiden Fällen folgt eine Inklusion sofort aus $x^t z = 0 = y^t z$, siehe Aufgabe 43. Die Gleichheit folgt dann aus Dimensionsgründen.

71. Seien W_1 und W_2 zwei verschiedene $(n-1)$-dimensionale Teilräume von $\mathbb{K}^n$. Zeige $W_1 + W_2 = \mathbb{K}^n$ und $\dim(W_1 \cap W_2) = n - 2$. *Hinweis: Beispiel IV.2.6.*

72. Sei V ein Vektorraum und $\alpha, \beta \in V^*$ zwei nicht-triviale lineare Funktionale, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Zeige, dass die Hyperebenen $\ker(\alpha)$ und $\ker(\beta)$ genau dann übereinstimmen, wenn $\lambda \in \mathbb{K}$ existiert, sodass $\beta = \lambda\alpha$.

73. Sei $0 \to W \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} U \to 0$ eine kurze exakte Sequenz linearer Abbildungen, d.h. φ sei injektiv, ψ surjektiv und $\operatorname{img}(\varphi) = \ker(\psi)$. Zeige, dass V genau dann endlich-dimensional ist, wenn W und U beide endlich-dimensional sind, und in diesem Fall gilt

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(U).$$

Hinweis: Zeige $U \cong V/\operatorname{img}(\varphi)$, $W \cong \operatorname{img}(\varphi)$ und verwende Korollar IV.2.8.

74 (Kodimension und Durchschnitt). Ein Teilraum W eines Vektoraums V hat endliche *Kodimension in* V*,* falls V/W endlich-dimensional ist. In diesem Fall wird $\operatorname{codim}_V(W) := \dim(V/W)$ die *Kodimension von* W *in* V *genannt.* Seien nun W_1 und W_2 zwei Teilräume von V. Zeige, dass $W_1 \cap W_2$ genau dann endliche Kodimension in V hat, wenn W_1 und W_2 beide endliche Kodimension in V haben. Zeige weiters, dass in diesem Fall auch $W_1 + W_2$ endliche Kodimension in V hat und es gilt

$$\operatorname{codim}_V(W_1 \cap W_2) + \operatorname{codim}_V(W_1 + W_2) = \operatorname{codim}_V(W_1) + \operatorname{codim}_V(W_2).$$

Im transversalen Fall, d.h. wenn $W_1 + W_2 = V$ gilt, erhalten wir

$$\operatorname{codim}_V(W_1 \cap W_2) = \operatorname{codim}_V(W_1) + \operatorname{codim}_V(W_2).$$

Hinweis: $\operatorname{codim}_V(W) = \dim(V/W) = \dim(W^\circ)$*, Satz IV.2.1 und Satz III.4.9.*

75. Erläutere die Gleichungen

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n \quad \text{und} \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n.$$

Hinweis: $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$*, siehe auch Beispiel IV.1.12.*

76. Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V. Zeige, dass $b_1, \mathbf{i}b_1, b_2, \mathbf{i}b_2, \dots, b_n, \mathbf{i}b_n$ eine Basis des V zugrundeliegenden reellen Vektorraums $V^{\mathbb{R}}$ bildet, vgl. Bemerkung IV.2.21, und schließe daraus $\dim_{\mathbb{R}}(V^{\mathbb{R}}) = 2\dim_{\mathbb{C}}(V)$.

77. Führe die Details in Bemerkung IV.2.22 aus.

78. Es sei V ein reeller Vektorraum und $J\colon V \to V$ linear mit $J \circ J = -\operatorname{id}_V$. Zeige, dass V bezüglich der Skalarmultiplikation

$$\mathbb{C} \times V \xrightarrow{\cdot} V, \qquad (a + b\mathbf{i})v := av + bJ(v),$$

zu einem komplexen Vektorraum wird. Schließe daraus, dass dies nur möglich ist, wenn $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ gerade ist. *Hinweis: Für den letzten Teil verwende Aufgabe 76.*

79. Sei

$$\{0\} \xrightarrow{\varphi_{-1}=0} V_0 \xrightarrow{\varphi_0} V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \to V_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} V_n \xrightarrow{\varphi_n=0} \{0\}$$

eine Folge linearer Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen, sodass $\varphi_i \circ \varphi_{i-1} = 0$, für jedes i. Schließe daraus $\operatorname{img}(\varphi_{i-1}) \subseteq \ker(\varphi_i)$ und definiere Vektorräume $H_i := \ker(\varphi_i)/\operatorname{img}(\varphi_{i-1})$. Zeige nun

$$\sum_i (-1)^i \dim(V_i) = \sum_i (-1)^i \dim(H_i).$$

Hinweis: Verwende $\operatorname{img}(\varphi_i) \cong V_i/\ker(\varphi_i)$ *und Korollar IV.2.8.*

80. Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$. Zeige

$$\operatorname{rank}(TAS) = \operatorname{rank}(A).$$

Hinweis: Betrachte die mit den Matrizen assoziierten linearen Abbildungen und verwende Proposition IV.2.23.

81. Sei W ein Teilraum eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, und bezeichne $\iota\colon V \to V^{**}$, $\iota(v)(\alpha) = \alpha(v)$, die natürliche Abbildung, $v \in V$, $\alpha \in V^*$. Zeige $\iota(W) = W^{\circ\circ}$. *Hinweis: Proposition III.4.13.*

82. Seien $\varphi\colon V \to W$ und $\psi\colon W \to U$ zwei lineare Abbildungen mit endlichem Rang. Zeige, dass dann auch $\psi \circ \varphi\colon V \to U$ endlichen Rang hat und

$$\operatorname{rank}(\psi \circ \varphi) \leq \min\bigl\{\operatorname{rank}(\psi), \operatorname{rank}(\varphi)\bigr\}$$

gelten muss. Schließe daraus, dass für je zwei Matrizen $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n\times l}(\mathbb{K})$ folgende Ungleichung gilt:

$$\operatorname{rank}(AB) \leq \min\bigl\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\bigr\}$$

83. Bestimme die Dimension sowie eine Basis des von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0\\1\\2\\-1\\-1\\2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0\\1\\2\\1\\7\\4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0\\2\\4\\0\\6\\6 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0\\3\\6\\-5\\-11\\4 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0\\4\\8\\0\\12\\15 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Teilraums $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\rangle \subseteq \mathbb{R}^6$. Gib ein minimales Gleichungssystem für W an. Bestimme eine Basis von W, die aus gewissen der Vektoren v_i besteht. Gib schließlich auch ein Komplement von W an und beschreibe dieses mit einer Basis und durch ein Gleichungssystem. *Hinweis: siehe Beispiel IV.3.17.*

84. Zeige, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\-1\\2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2\\3\\-1\\6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3\\3\\-3\\6 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4\\4\\-2\\8 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 6\\11\\0\\24 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$ bilden, und bestimme vier dieser Vektoren v_i, die eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden. *Hinweis: siehe Beispiel IV.3.22.*

85. Zeige, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1\\-1\\1\\-1\\1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1\\2\\1\\2\\1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1\\2\\3\\1\\2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig in $\mathbb{R}^5$ sind und erweitere sie zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$. *Hinweis: Siehe Beispiel IV.3.18.*

86. Es bezeichne W den Teilraum aller $y \in \mathbb{R}^6$, für die das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrcl} 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & +6x_4 & +10x_5 & = & y_1 \\ 3x_1 & +x_2 & +x_3 & +5x_4 & +7x_5 & = & y_2 \\ 5x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +11x_4 & +17x_5 & = & y_3 \\ 7x_1 & +3x_2 & +x_3 & +11x_4 & +15x_5 & = & y_4 \\ 11x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +21x_4 & +31x_5 & = & y_5 \\ 13x_1 & +8x_2 & +9x_3 & +30x_4 & +47x_5 & = & y_6 \end{array}$$

lösbar ist. Bestimme $\dim(W)$ und eine Basis von W. Gib auch ein minimales Gleichungssystem für W an. *Hinweis: Siehe Beispiel IV.3.23.*

87. Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^6$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrcl} x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & -2x_5 & +2x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & -4x_5 & +4x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +3x_4 & -3x_5 & +3x_6 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +5x_4 & -5x_5 & +5x_6 & = & 0 \end{array}$$

Bestimme $\dim(L)$ und eine Basis von L. Gib auch ein minimales Gleichungssystem für L an. Bestimme auch ein minimales Gleichungssystem für L, das aus einigen der ursprünglichen Gleichungen besteht. Bestimme ein Komplement von L und beschreibe es mit Hilfe einer Basis als auch durch ein Gleichungssystem. *Hinweis: Siehe Beispiel IV.3.19.*

88. Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrcr} 3x_1 & -3x_2 & -3x_3 & -12x_4 & -12x_5 & = & -21 \\ x_1 & -3x_2 & -5x_3 & -18x_4 & -20x_5 & = & -41 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +6x_5 & = & 15 \\ -x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +16x_4 & +17x_5 & = & 35 \end{array}$$

und gib diese in Parameterform an. Bestimme auch ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum. Welche Dimension hat dieser? *Hinweis: Siehe Beispiel IV.4.2.*

89. Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & +x_2 & +3x_3 & +3x_4 & +5x_5 & = & 37 \\ x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +6x_4 & +8x_5 & = & 60 \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +8x_5 & = & 59 \\ -x_1 & -3x_2 & -7x_3 & -9x_4 & -8x_5 & = & -59 \end{array}$$

Gib auch eine Basis des Lösungsraums für das assoziierte homogene System an.

90. Bestimme die Dimension des affinen Teilraums

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$$

von $\mathbb{R}^5$. Gib auch ein minimales Gleichungssystem für E an. *Hinweis: Siehe Beispiel IV.4.4.*

91. Bestimme die Inversen folgender reeller Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

92. Bestimme die Inverse folgender komplexer Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 3 & 2+\mathbf{i} \\ 2\mathbf{i} & 7 & -\mathbf{i} \\ -1 & -1+4\mathbf{i} & 7+\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

93. Bestimme die Inversen folgender Matrizen über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

94. Zeige, dass die Vektoren

$$b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 9 \end{smallmatrix}\right), \quad b_2 = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 8 \\ 8 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \quad b_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{smallmatrix}\right), \quad b_4 = \left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden. *Hinweis: Siehe Beispiel IV.5.2.*

95. Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & y_1 \\ & x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & y_2 \\ & x_2 & +4x_3 & +9x_4 & = & y_3 \\ & x_2 & +8x_3 & +27x_4 & = & y_4 \end{array}$$

für alle $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist und gib diese Lösung an. *Hinweis: Siehe Beispiel IV.5.6.*

96. Es sei A eine invertierbare Matrix mit rationalen Einträgen. Erkläre warum dann auch die Inverse, A^{-1}, nur rationale Einträge besitzt. Gib eine invertierbare (2×2)-Matrix mit ganzzahligen Einträgen an, deren Inverse nichtganzzahlige Einträge hat.

97. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Weiters seien B und C zwei geordnete Basen von V und es bezeichnen B^* bzw. C^* die dazu dualen Basen von V^*. Zeige, dass aus $B^* = C^*$ schon $B = C$ folgt. *Hinweis: Betrachte die zu B^* und C^* dualen Basen B^{**} und C^{**} von V^{**} und verwende Lemma IV.6.7 aus der Vorlesung.*

98. Zeige, dass $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bildet, wobei

$$b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \quad b_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \quad b_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \quad b_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{smallmatrix}\right).$$

Bestimme die Basiswechselmatrix T_{BE}, wobei $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ die Standardbasis bezeichnet, und berechne damit die Koordinaten $[v]_B$ folgender Vektoren bezüglich B:

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

99. Zeige, dass $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bildet, wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Matrix (bezüglich der Standardbasis) einer linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, für die $\varphi(b_1) = b_1$, $\varphi(b_2) = 2b_2$ und $\varphi(b_3) = 3b_3$ gilt. Wieviele solche Abbildungen φ gibt es? *Hinweis: Ohne Rechnung lassen sich $[\varphi]_{BB}$ und T_{EB} angeben, wobei $E = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.*

100. Zeige, dass die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden. Schließe daraus, dass $\mathbb{R}^4$ direkte Summe der beiden Teilräume $W = \langle b_1, b_2 \rangle$ und $W' = \langle b_3, b_4 \rangle$ ist, $\mathbb{R}^4 = W \oplus W'$. Bestimme die Matrix (bezüglich der Standardbasis) des damit assoziierten Projektors $\pi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ auf W längs W'. Berechne damit auch die Matrix des komplementären Projektors, sowie die Matrizen der beiden damit assoziierten Spiegelungen. *Hinweis: Ohne Rechnung lassen sich $[\pi]_{BB}$ und T_{EB} angeben, wobei $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ bezeichnet.*

101. Zeige, dass die Funktionen $f_1(x) := \sin(2x)$, $f_2(x) := \cos(2x)$, $f_3(x) := \sin(3x)$ und $f_4(x) := \cos(3x)$ linear unabhängig in $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind und daher eine Basis $B = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ des von ihnen aufgespannten Teilraums $V := \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle \subseteq F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bilden. Zeige, dass die Ableitung eine lineare Abbildung $D\colon V \to V$, $D(f) := f'$, liefert, und bestimme die Matrix $[D]_{BB}$ von D bezüglich B.

102. Zeige, dass die Polynome

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ h_1 &= z \\ h_2 &= z^2 - 1 \\ h_3 &= z^3 - 3z \\ h_4 &= z^4 - 6z^2 + 3 \end{aligned}$$

eine Basis $H = (h_0, h_1, h_2, h_3, h_4)$ von $\mathbb{R}[z]_{\leq 4}$ bilden. Bestimme die Matrix $[L]_{HH}$ der linearen Abbildung

$$L\colon \mathbb{R}[z]_{\leq 4} \to \mathbb{R}[z]_{\leq 4}, \qquad D(p) := p'' - zp'.$$

Berechne den Rang der linearen Abbildung L und gib eine Basis ihres Kerns an. Bestimme jenes Polynom $p \in \mathbb{R}[z]_{\leq 4}$ für das $[p]_H = (1, 0, 1, 0, 1)^t$ gilt. Berechne auch die Koordinaten $[q]_H$ des Polynoms $q = z^4 + 2z^3 - 6z^2 - 6z - 6$.

103. Betrachte die drei linearen Funktionale $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\gamma_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2y + 3z, \quad \gamma_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 4y + 9z, \quad \gamma_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 8y + 27z.$$

Zeige, dass $C = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ eine Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$ bildet. Bestimme eine Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ von $\mathbb{R}^3$, deren duale Basis mit C übereinstimmt, $B^* = C$. *Hinweis: Ohne Rechnung lässt sich die Basiswechselmatrix $T_{E^*C} = T_{E^*B^*}$ angeben, wobei E^* die zur Standardbasis $E = (e_1, e_2, e_3)$ duale Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$ bezeichnet. Berechne daraus T_{EB}, siehe Korollar IV.6.21, und lies die Basis B ab.*

104. Es sei $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix. Zeige, dass geordnete Basen B und C von $\mathbb{K}^n$ existieren, sodass $T_{CB} = S$ gilt, wobei T_{CB} die Basiswechselmatrix bezeichnet. *Hinweis: Wir können für B (oder C) die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$ verwenden.*

105 (Äquivalente Matrizen). Zwei Matrizen $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ werden äquivalent genannt, falls invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ existieren, sodass $B = TAS$. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf der Menge der $(m \times n)$-Matrizen definiert. Zeige weiters: Ist $\psi \colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, $C, \tilde{C}$ geordnete Basen von V und $D, \tilde{D}$ geordnete Basis von W, dann sind die Matrizen $[\psi]_{DC}$ und $[\psi]_{\tilde{D}\tilde{C}}$ ähnlich. Zeige auch, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) A und B sind äquivalent.
(b) B lässt sich aus A durch Zeilen- und Spaltenumformungen gewinnen.
(c) Es existieren Basen C von $\mathbb{K}^m$ und D von $\mathbb{K}^n$, sodass $B = [\psi_A]_{DC}$, wobei ψ_A die lineare Abbildung $\psi_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi_A(x) = Ax$, bezeichnet.
(d) A und B haben gleichen Rang.

Schließe daraus, dass jede Matrix $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ äquivalent zu einer Matrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ ist, wobei $k = \operatorname{rank}(A)$.

106 (Ähnliche Matrizen). Zwei quadratische Matrizen $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ werden ähnlich genannt, falls eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ existiert, sodass $B = SAS^{-1}$. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf der Menge der $(n \times n)$-Matrizen definiert. Zeige weiters: Ist $\varphi \colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V und sind B bzw. C zwei geordnete Basen von V, dann sind die Matrizen $[\varphi]_{BB}$ und $[\varphi]_{CC}$ ähnlich. Zeige auch, dass für fixes $\lambda \in \mathbb{K}$ die beiden Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ nicht ähnlich sind. *Hinweis: Sind A und B zwei ähnliche Matrizen, dann sind auch $A - \lambda I$ und $B - \lambda I$ ähnliche Matrizen.*