V. Determinanten

Wir werden in diesem Kapitel jeder quadratischen Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ihre Determinante, $\det(A) \in \mathbb{K}$, zuordnen. Die Determinante ist multiplikativ, es gilt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B),$$

für je zwei $(n \times n)$-Matrizen A und B. Auch ist eine Matrix A genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt. Es ist keineswegs offensichtlich, dass eine Abbildung mit diesen Eigenschaft überhaupt existiert.

In Abschnitt V.1 werden wir eine (rekursive) Konstruktion der Determinante besprechen, ihre wichtigsten Eigenschaften herleiten, und auch einen effektiven Algorithmus zur Berechnung kennen lernen. Dort werden wir auch die geometrische Bedeutung reeller Determinante klären, sie stimmt mit dem orientierten Volumen des von den Spalten der Matrix aufgespannten Parallelepipeds überein. Aus diesem Grund tritt die Determinante in der Transformationsformel für Mehrfachintegrale auf.

Mit Hilfe von Determinanten kann die Inverse einer invertierbaren Matrix A explizit angegeben werden, und die Cramer'sche Regel liefert eine explizite Lösungsformel für das lineare Gleichungssystem $Ax = y$, siehe Abschnitt V.2.

In Abschnitt V.3 werden wir eine nach Leibniz benannte explizite Formel für die Determinante einer Matrix angeben, und so eine weitere, unabhängige Konstruktion der Determinantenfunktion kennen lernen. Diese Formel besteht aus sehr vielen Termen und ist daher bei der Berechnung großer Determinanten nicht hilfreich. Für (3×3)-Matrizen liefert sie die Regel von Sarrus:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

In Abschnitt V.4 werden wir den Begriff der Determinante auf lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ ausdehnen, wobei V einen endlich-dimensionalen Vektorraum bezeichnet. Im letzten Abschnitt V.5 werden wir mit Hilfe von Determinanten den Begriff der Orientierungen eines endlich-dimensionalen reellen Vektorraums präzise fassen und kurz auf die wichtigsten Eigenschaften eingehen.

Vieles in diesem Kapitel findet sich etwa [**3**].

V.1. Determinantenfunktionen. Eine Funktion

$$\delta\colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \qquad A \mapsto \delta(A),$$

wird *linear in der k-ten Spalte* genannt, falls für alle $a_i \in \mathbb{K}^n$ die Abbildung

$$\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}, \qquad x \mapsto \delta\big(a_1|\cdots|a_{k-1}|x|a_{k+1}|\cdots|a_n\big)$$

linear ist, d.h. wenn für alle $a_i, x, y \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

$$\delta(\cdots|a_{k-1}|x+y|a_{k+1}|\cdots) = \delta(\cdots|a_{k-1}|x|a_{k+1}|\cdots) + \delta(\cdots|a_{k-1}|y|a_{k+1}|\cdots)$$
$$\delta(\cdots|a_{k-1}|\lambda x|a_{k+1}|\cdots) = \lambda\delta(\cdots|a_{k-1}|x|a_{k+1}|\cdots)$$

Gilt dies für jedes $k = 1, \dots, n$, dann wird δ *multlinear* genannt, wir sagen auch $\delta(A)$ ist linear in jeder Spalte von A. Offensichtlich bilden die multlinearen Abbildungen $M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ einen Teilraum des Vektorraums aller $\mathbb{K}$-wertigen Funktion auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, siehe Aufgabe 1.

V.1.1. Lemma. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $\delta\colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ eine Funktion, die folgende beiden Eigenschaften hat:*

(a) δ ist multilinear, d.h. $\delta(A)$ ist linear in jeder Spalte von A.
(b) Sind zwei benachbarte Spalten von A gleich, so gilt $\delta(A) = 0$.

Dann besitzt δ auch folgende Eigenschaften:

(c) Bei Vertauschung zweier Spalten von A wechselt $\delta(A)$ das Vorzeichen.
(d) Sind zwei beliebige Spalten von A gleich, so gilt $\delta(A) = 0$.
(e) Addieren wir ein Vielfaches einer Spalte von A zu einer anderen Spalte, dann bleibt $\delta(A)$ unverändert.
(f) Ist $\operatorname{rank}(A) < n$, *dann gilt $\delta(A) = 0$.*
(g) Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ und jede Matrix A gilt

$$\delta(A) = \sum_{i=1}^{n} \delta\big(A_{(ij)}\big).$$

Dabei bezeichnet $A_{(ij)}$ jene $(n \times n)$-Matrix, die wir aus A erhalten wenn wir jeden Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte, außer A_{ij}, durch 0 *ersetzen.*[4]

(h) Bezeichnet $\delta'\colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ eine weitere Funktion, die die beide die Eigenschaften (a) und (b) hat, und ist $\delta(I_n) = \delta'(I_n)$, dann gilt schon $\delta(A) = \delta'(A)$, für alle A.
(i) Es gilt $\delta(BA)\delta(I_n) = \delta(B)\delta(A)$, für je zwei Matrizen A und B.
(j) Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ und jede Matrix A gilt

$$\delta(A) = \sum_{j=1}^{n} \delta\big(A_{(ij)}\big).$$

---

[4] D.h. $A_{(ij)} = \begin{pmatrix} & & & 0 & & & \\ & A & & \vdots & & A & \\ & & & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & A_{ij} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 0 & & & \\ & A & & \vdots & & A & \\ & & & 0 & & & \end{pmatrix}$, wobei A_{ij} den Eintrag von A in der i-ten Zeile und j-ten Spalte bezeichnet. Die mit A symbolisierten Blöcke stehen jeweils für den entsprechenden Teil von A, diese bleiben unverändert.

(k) $\delta(A)$ *ist linear in jeder Zeile von* A.
(l) $\delta(A^t) = \delta(A)$, *für jede Matrix* A.
(m) Sind zwei beliebige Zeilen von A *gleich, so gilt* $\delta(A) = 0$.
(n) Bei Vertauschung zweier Zeilen von A *wechselt* $\delta(A)$ *das Vorzeichen.*
(o) Addieren wir ein Vielfaches einer Zeile von A *zu einer anderen Zeile, dann bleibt* $\delta(A)$ *unverändert.*

Beweis. Wir beobachten zunächst, dass $\delta(A)$ bei Vertauschung zweier benachbarter Spalten das Vorzeichen wechselt, d.h. es gilt

$$\delta(\cdots|x|y|\cdots) = -\delta(\cdots|y|x|\cdots),$$

denn aus (a) und (b) folgt sofort:

$$\begin{aligned}0 &= \delta(\cdots|x+y|x+y|\cdots)\\ &= \delta(\cdots|x|x|\cdots) + \delta(\cdots|x|y|\cdots) + \delta(\cdots|y|x|\cdots) + \delta(\cdots|y|y|\cdots)\\ &= \delta(\cdots|x|y|\cdots) + \delta(\cdots|y|x|\cdots).\end{aligned}$$

Sind nun $1 \leq i < j \leq n$, dann folgt durch sukzessives Vertauschen von Spalten:

$$\begin{aligned}\delta(\cdots\overbrace{|x|\cdots|y|}^{\text{Sp. } i \text{ bis } j}\cdots) &= (-1)^{j-i-1}\delta(\cdots|x|y|\cdots)\\ &= -(-1)^{j-i-1}\delta(\cdots|y|x|\cdots) = -\delta(\cdots\underbrace{|y|\cdots|x|}_{\text{Sp. } i \text{ bis } j}\cdots)\end{aligned}$$

Dies zeigt (c). Zusammen mit (b) erhalten wir daraus auch (d), denn

$$\delta(\cdots|x|\cdots|x|\cdots) = \pm\delta(\cdots|x|x|\cdots) = 0.$$

Unter Verwendung von (a) folgt weiters

$$\begin{aligned}\delta(\cdots|x|\cdots|y+\lambda x|\cdots) &= \delta(\cdots|x|\cdots|y|\cdots) + \lambda\delta(\cdots|x|\cdots|x|\cdots)\\ &= \delta(\cdots|x|\cdots|y|\cdots),\end{aligned}$$

für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$. Somit ist auch (e) gezeigt.

Ad (f): Gilt $\operatorname{rank}(A) < n$, dann sind die Spalten von $A = (a_1|\cdots|a_n)$ linear abhängig, wenigstens eine lässt sich daher als Linearkombination der anderen schreiben. Durch Vertauschen zweier geeigneter Spalten dürfen wir o.B.d.A. $a_1 = \sum_{i=2}^n \lambda_i a_i$ annehmen, siehe (c). Mit (a) und (d) folgt dann

$$\delta(A) = \delta\Big(\sum_{i=2}^n \lambda_i a_i \Bigm| a_2 \Bigm| a_3 \Bigm| \cdots \Bigm| a_n\Big) = \sum_{i=2}^n \lambda_i\, \delta(a_i|a_2|a_3|\cdots|a_n) = 0.$$

Ad (g): Für die j-te Spalte von A gilt $a_j = \sum_{i=1}^n A_{ij}e_i$, wobei A_{ij} den Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von A bezeichnet. Mit (a) und (e) folgt

$$\delta(A) = \sum_{i=1}^n \delta\big(a_1|\cdots|a_{j-1}|A_{ij}e_i|a_{j+1}|\cdots|a_n\big) = \sum_{i=1}^n \delta\big(A_{(ij)}\big),$$

denn es gilt

$$\delta\big(a_1|\cdots|a_{j-1}|A_{ij}e_i|a_{j+1}|\cdots|a_n\big)=\delta\big(A_{(ij)}\big).\tag{V.1}$$

Für $A_{ij}=0$ ist die Gleichung (V.1) offensichtlich, denn in diesem Fall haben beide Matrizen eine verschwindende j-te Spalte, nach (a) verschwinden daher beide Seiten in (V.1). Ist $A_{ij}\neq 0$, dann können wir durch Addition geeigneter Vielfacher der j-ten Spalte von $\big(a_1|\cdots|a_{j-1}|A_{ij}e_i|a_{j+1}|\cdots|a_n\big)$ zu den anderen Spalten diese Matrix zu $A_{(ij)}$ umformen, und dabei bleibt δ unverändert, vgl. (e).

Ad (h): Beachte zunächst, dass auch die Funktion

$$\delta''\colon M_{n\times n}(\mathbb{K})\to\mathbb{K},\qquad \delta''(A):=\delta(A)-\delta'(A),$$

die beiden Eigenschaften (a) und (b) besitzt. Wie wir oben gezeigt haben, hat sie daher auch Eigenschaft (c) und (d). Nach Voraussetzung gilt weiters $\delta''(I_n)=0$. Sei nun A eine $(n\times n)$-Matrix und bezeichne A_{ij} den Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte. Aus (a) folgt

$$\begin{aligned}\delta''(A)=\delta''\Big(\sum_{i_1=1}^n A_{i_1,1}e_{i_1}\,\Big|\cdots\Big|\,\sum_{i_n=1}^n A_{i_n,n}e_{i_n}\Big)&\\ =\sum_{i_1=1}^n\cdots\sum_{i_n=1}^n A_{i_1,1}\cdots A_{i_n,n}\,\delta''(e_{i_1}|\cdots|e_{i_n}),&\end{aligned}$$

es genügt daher $\delta''(e_{i_1}|\cdots|e_{i_n})=0$ zu zeigen, für alle $i_1,\dots,i_n\in\{1,\dots,n\}$. Nach (d) genügt es dies für paarweise verschiedene $i_1,\dots,i_n$ zu verifizieren. In diesem Fall folgt durch sukzessives Vertauschen mittels (c)

$$\delta''(e_{i_1}|\dots|e_{i_n})=\pm\delta''(e_1|\dots|e_n)=\pm\delta''(I_n)=0.$$

Dies zeigt $\delta''(A)=0$, für jedes A, und daher $\delta(A)=\delta'(A)$.

Ad (i): Sei B fix. Beachte, dass die Funktionen

$$\delta'\colon M_{n\times n}(\mathbb{K})\to\mathbb{K},\qquad \delta'(A):=\delta(BA)\delta(I_n)$$

und

$$\delta''\colon M_{n\times n}(\mathbb{K})\to\mathbb{K},\qquad \delta''(A):=\delta(B)\delta(A)$$

beide die Eigenschaften (a) und (b) haben. Bezeichnen nämlich $A=(a_1|\cdots|a_n)$ die Spalten von A dann gilt $BA=(Ba_1|\cdots|Ba_n)$, also hängt die k-te Spalte von BA linear von der k-ten Spalte von A ab, und, falls die k-te Spalte von B mit der l-ten Spalte übereinstimmt, dann bleibt dies auch für BA richtig. Da offensichtlich auch $\delta'(I_n)=\delta''(I_n)$ gilt, erhalten wir aus (h) nun $\delta'(A)=\delta''(A)$, d.h. $\delta(BA)\delta(I_n)=\delta(B)\delta(A)$.

Ad (j): Beachte, dass die k-te Spalte von $A_{(ij)}$ linear von der k-ten Spalte von A abhängt. Daher stellt auch

$$\delta'\colon M_{n\times n}(\mathbb{K})\to\mathbb{K},\qquad \delta'(A):=\sum_{j=1}^n\delta\big(A_{(ij)}\big)$$

eine Funktion dar, die linear in den Spalten von A ist. Stimmen die Spalten mit Nummern k und l von A überein, $1 \leq k < l \leq n$, dann folgt

$$\delta'(A) = \delta\big(A_{(ik)}\big) + \delta\big(A_{(il)}\big) = 0,$$

denn für $j \neq k, l$ hat auch $A_{(ij)}$ zwei gleiche Spalten, also $\delta\big(A_{(ij)}\big) = 0$ nach (d), und die Matrix $A_{(il)}$ entsteht aus $A_{(ik)}$ durch Vertauschen der Spalten k und l, also $\delta\big(A_{(ik)}\big) = -\delta\big(A_{(il)}\big)$ wegen (c). Schließlich gilt auch $\delta'(I_n) = \delta(I_n)$, denn $(I_n)_{(ii)} = I_n$ und für $j \neq i$ ist $\delta\big((I_n)_{(ij)}\big) = 0$, da die j-te Spalte von $(I_n)_{(ij)}$ verschwindet. Aus (h) erhalten wir daher $\delta(A) = \delta'(A)$, d.h. $\delta(A) = \sum_{j=1}^{n} \delta\big(A_{(ij)}\big)$.

Ad (k): Beachte zunächst, dass die i-te Spalte von $A_{(ij)}$ linear von der i-ten Zeile von A abhängt. Folglich ist $\delta\big(A_{(ij)}\big)$ linear in der i-ten Zeile von A. Nach (j) ist daher auch $\delta(A)$ linear in der i-ten Zeile von A. Da i beliebig war, folgt die Behauptung.

Ad (l): Nach (k) ist die Funktion

$$\delta' \colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \qquad \delta'(A) := \delta(A^t),$$

linear in jeder Spalte. Ist $\operatorname{rank}(A) < n$, dann auch $\operatorname{rank}(A^t) < n$, also $\delta'(A) = \delta(A^t) = 0$ nach (f). Insbesondere verschwindet $\delta'(A)$, falls zwei Spalten von A übereinstimmen. Mit (h) folgt somit $\delta'(A) = \delta(A)$, denn offensichtlich gilt auch $\delta'(I_n) = \delta(I_n)$.

Die verbleibenden Behauptungen (m), (n) und (o) folgen sofort aus (c), (d) und (e) mittels (m). □

V.1.2. Bemerkung. Nach Lemma V.1.1 sind für eine multilineare Abbildung $\delta \colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ folgende Aussagen äquivalent:

(a) Stimmen zwei benachbarte Spalten von A überein, so gilt $\delta(A) = 0$.
(b) Stimmen zwei Spalten von A überein, so gilt $\delta(A) = 0$.
(c) Sind die Spalten von A linear abhängig, so gilt $\delta(A) = 0$.

Eine multilineare Abbildung $\delta \colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, die diese Eigenschaften besitzt wird *alternierende multilineare Abbildung* genannt. Offensichtlich bilden die alternierenden multilinearen Abbildungen einen Teilraum des Vektorraums aller multilinearen Abbildungen $M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, vgl. Aufgabe 1. In Satz V.1.3 unten werden wir eine alternierende multilineare Abbildung $\det \colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ konstruieren, für die $\det(I_n) = 1$ gilt. Nach Lemma V.1.1(h) ist daher jede alternierende multilineare Abbildung $\delta \colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ von der Form $\delta(A) = \delta(I_n)\det(A)$. Der Vektorraum der alternierenden multilinearen Abbildungen $M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ hat daher Dimension 1 und det bildet eine Basis. Gilt $2 \neq 0 \in \mathbb{K}$, dann sind die Eigenschaften (a) bis (c) oben auch zu folgender Bedingung äquivalent:

(d) Bei Vertauschung zweier Spalten von A wechselt $\delta(A)$ das Vorzeichen.

Für allgemeine Körper bleibt dies jedoch nicht richtig, siehe Aufgabe 2.

V.1.3. Satz. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert eine eindeutige Funktion* $\det \colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, *die folgende drei Eigenschaften besitzt:*

(a) det *ist multilinear, d.h.* $\det(A)$ *ist linear in jeder Spalte von A.*
(b) Sind zwei benachbarte Spalten von A gleich, dann gilt $\det(A) = 0$.
(c) $\det(I_n) = 1$, *wobei* I_n *die Einheitsmatrix bezeichnet.*

Diese Funktion hat darüber hinaus folgende Eigenschaften:

(d) Bei Vertauschung zweier Spalten von A wechselt $\det(A)$ *das Vorzeichen.*
(e) Addieren wir ein Vielfaches einer Spalte von A zu einer anderen Spalte, so bleibt $\det(A)$ *unverändert.*
(f) $\det(A)$ *ist linear in jeder Zeile von A.*
(g) Bei Vertauschung zweier Zeilen von A wechselt $\det(A)$ *das Vorzeichen.*
(h) Addieren wir ein Vielfaches einer Zeile von A zu einer anderen Zeile, so bleibt $\det(A)$ *unverändert.*
(i) Für je zwei Matrizen A und B gilt

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

(j) A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$. *In diesem Fall gilt*

$$\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}.$$

(k) Für jede Matrix A ist

$$\det(A^t) = \det(A).$$

(l) Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ *und jede Matrix A gilt*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det\bigl(\hat{A}_{(ij)}\bigr).$$

Diese Formel wird Entwicklung nach der i-ten Zeile *genannt. Dabei bezeichnet* A_{ij} *den Eintrag der Matrix A in der i-ten Zeile und j-ten Spalte, und* $\hat{A}_{(ij)}$ *bezeichnet jene* $(n-1) \times (n-1)$*-Matrix, die wir durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus A gewinnen.*

(m) Für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ *und jede Matrix A gilt*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det\bigl(\hat{A}_{(ij)}\bigr).$$

Diese Formel wird Entwicklung nach der j-ten Spalte *genannt.*

(n) Für Dreiecksmatrizen haben wir

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst mittels Induktion nach n, dass tatsächlich eine Funktion $\det\colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K})$ mit den Eigenschaften (a), (b) und (c) existiert. Der Fall $n = 1$ ist trivial, die Abbildung $\det\colon M_{1\times 1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $\det(a) := a$, hat offensichtlich alle gewünschten Eigenschaften. Für den Induktionsschritt sei nun

$\det\colon M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ eine Abbildung, sodass (a), (b) und (c) gelten. Weiters fixieren wir ein $i \in \{1,\dots,n\}$. Für $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ definieren wir nun

$$\det(A) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{ij} \det\bigl(\hat{A}_{(ij)}\bigr). \tag{V.2}$$

Dabei bezeichnet A_{ij} den Eintrag der Matrix A in der i-ten Zeile und j-ten Spalte, und $\hat{A}_{(ij)}$ bezeichnet jene $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die wir durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte aus A erhalten. Jedenfalls ist dadurch eine Abbildung $\det\colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definiert. Wir verifizieren nun, dass diese die Eigenschaften (a), (b) und (c) hat.

Ad (a): Seien $j,k \in \{1,\dots,n\}$. Es genügt zu zeigen, dass $A_{ij}\det\bigl(\hat{A}_{(ij)}\bigr)$ linear in der k-ten Spalte von A ist, vgl. (V.2). Wir unterscheiden zwei Fälle. Für $k=j$ hängt $\det\bigl(\hat{A}_{(ij)}\bigr)$ nicht von der k-ten Spalte ab, denn diese wurde ja gestrichen, und A_{ij} ist offensichtlich linear in der k-ten Spalte. Ist $j \neq k$, so ist A_{ij} unbhängig von der k-ten Spalte und nach Induktionsvoraussetzung hängt $\det\bigl(\hat{A}_{(ij)}\bigr)$ linear von der k-ten Spalte von A ab. In beiden Fällen folgt, dass $A_{ij}\det\bigl(\hat{A}_{(ij)}\bigr)$ linear in der k-ten Spalte von A ist.

Ad (b): Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine Matrix deren k-te Spalte mit der $(k+1)$-ten Spalte übereinstimmt, $1 \leq k < n$. Ist nun $j \neq k$ und $j \neq k+1$, dann hat auch $\hat{A}_{(ij)}$ zwei gleiche benachbarte Spalten, nach Induktionsvoraussetzung gilt daher $\det(\hat{A}_{(ij)}) = 0$ für diese j. In der Summe (V.2) bleiben daher nur zwei Terme übrig,

$$\det(A) = (-1)^{i+k} A_{ik} \det\bigl(\hat{A}_{(ik)}\bigr) + (-1)^{i+k+1} A_{i,k+1} \det\bigl(\hat{A}_{(i,k+1)}\bigr).$$

Weiters ist $\hat{A}_{(ik)} = \hat{A}_{(i,k+1)}$, die beiden Terme auf der rechten Seite stimmen also bis auf ihr Vorzeichen überein, und es folgt $\det(A) = 0$.

Ad (c): Der einzige nicht verschwindende Eintrag der i-ten Zeile der Einheitsmatrix I_n ist $(I_n)_{ii} = 1$. Weiters gilt $(\hat{I}_n)_{(ii)} = I_{n-1}$ und nach Induktionsvoraussetzung daher $\det\bigl((\hat{I}_n)_{(ii)}\bigr) = \det(I_{n-1}) = 1$. Aus (V.2) erhalten wir daher

$$\det(I_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} (I_n)_{ij} \det\bigl((\hat{I}_n)_{(ij)}\bigr) = (-1)^{i+i} (I_n)_{ii} \det\bigl((\hat{I}_n)_{(ii)}\bigr) = 1.$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt, also existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $\det\colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, die die Eigenschaften (a), (b) und (c) besitzt. Die Eindeutigkeit dieser Funktion folgt aus Lemma V.1.1(h). Aus (V.2) erhalten wir auch sofort (l).

Die Behauptungen (d), (e), (f), (g), (h), (i) und (k) folgen sofort aus den entsprechenden Aussagen in Lemma V.1.1.

Ad (j): Ist A invertierbar, so erhalten wir mit (c) und (i)

$$1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}).$$

Es folgt $\det(A) \neq 0$ und $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$. Ist A nicht invertierbar, dann gilt $\operatorname{rank}(A) < n$ und daher $\det(A) = 0$ nach Lemma V.1.1(f).

Ad (m): Dies folgt aus Lemma V.1.1(g), denn mit (l) erhalten wir $\det\big(A_{(ij)}\big) = (-1)^{i+j} A_{ij} \det\big(\hat{A}_{(ij)}\big)$. Alternativ lässt sich (m) auch aus (l) mittels (k) herleiten.

Ad (n): Durch Entwicklung nach der ersten Zeile, siehe (l), erhalten wir

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \det\begin{pmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Mittels Induktion nach n folgt die zweite Gleichung in (n). Die erste lässt sich analog beweisen oder mit Hilfe von (k) aus der eben bewiesenen ableiten. □

V.1.4. Definition (Determinante einer Matrix). Die Abbildung

$$\det\colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \qquad A \mapsto \det(A),$$

aus Satz V.1.3 wird die *Determinantenfunktion* genannt, und $\det(A)$ als *Determinante* der Matrix A bezeichnet. Eine andere gängige Notation ist:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

V.1.5. Beispiel. Für 2×2-Matrizen erhalten wir durch Entwicklung nach der ersten Zeile, siehe Satz V.1.3(l),

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

V.1.6. Beispiel (Regel von Sarrus). Für 3×3-Matrizen gilt:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Auch dies folgt durch Entwicklung nach der ersten Zeile, siehe Satz V.1.3(l), zusammen mit der eben hergeleiteten Formel für die Determinante einer 2×2-Matrix:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

V.1.7. Bemerkung. Analog lassen sich rekursiv Formeln für größere Matrizen herleiten, etwa gilt:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
&\quad + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} \\
&\quad - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} \\
&\quad \pm 18 \text{ weitere ähnliche Terme.}
\end{aligned}$$

Die Anzahl der Terme wächst rapide, für eine $(n \times n)$-Matrix sind es $n!$ Summanden. In Abschnitt V.3 werden wir einen geschlossenen Ausdruck dafür angeben, siehe Satz V.3.6. Diese Formeln sind für die Berechnung der Determinanten nur von begrenzter Nützlichkeit.

V.1.8. Bemerkung (Volumen und Determinanten). Der orientierte Flächeninhalt des von zwei Vektoren $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$ aufgespannten Parallelogramms ist $\det(a_1|a_2)$. Um dies einzusehen, bezeichne $\delta(a_1|a_2)$ den orientierten Flächeninhalt dieses Parallelogramms. Offensichtlich gilt $\delta(I_2) = 1$, denn das Einheitsquadrat hat Fläche 1. Auch gilt $\delta(a|a) = 0$, denn in diesem Fall degeneriert das Parallelogramm zu einer Linie ohne Flächeninhalt. Eine einfache elementargeometrische Überlegung zeigt, dass $\delta(a_1|a_2)$ linear in beiden Spalten ist. Nach Satz V.1.3 muss daher $\delta(a_1|a_2) = \det(a_1|a_2)$ gelten, die Determinante $\det(a_1|a_2)$ berechnet also den orientierten Flächeninhalt des von a_1 und a_2 aufgespannten Parallelogramms. Völlig analog lässt sich zeigen, dass das orientierte Volumen des von drei Vektoren $b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}^3$ aufgespannten Parallelepipeds durch $\det(b_1|b_2|b_3)$ gegeben ist.

V.1.9. Bemerkung. Mit Satz V.1.3(j) erhalten wir folgende Beschreibung der allgemeinen linearen Gruppe durch eine (nicht lineare) Ungleichung:

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \bigl\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) : \det(A) \neq 0\bigr\}.$$

Die Determinante schränkt sich zu einem surjektiven Gruppenhomomorphismus,

$$\det\colon \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \setminus \{0\},$$

ein, wobei $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ mit der Multiplikation des Körpers als (abelsche) Gruppe aufgefasst wird. Der Kern dieses Homomorphismus,

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{K}) := \bigl\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) : \det(A) = 1\bigr\},$$

bildet daher eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, sie wird die *spezielle lineare Gruppe* genannt und ist durch eine (nicht lineare) Gleichung beschrieben.

Soll die Determinante einer Matrix berechnet werden ist es zweckmäßig diese durch Zeilen und oder Spaltenumformungen auf Dreiecksgestalt zu bringen und dann die Formel aus Satz V.1.3(n) zu verwenden.

V.1.10. Beispiel. Wir wollen die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ -1 & -5 & 1 & 6 \\ 2 & 12 & 22 & 29 \\ 3 & 17 & 30 & 43 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Mit den Rechenregeln in Satz V.1.3 folgt

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ -1 & -5 & 1 & 6 \\ 2 & 12 & 22 & 29 \\ 3 & 17 & 30 & 43 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & 16 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & 6 & 13 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 16 \\ 0 & 2 & 6 & 13 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 & 10 \\ 0 & 2 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 4 = -72,$$

d.h. $\det(A) = -72$. Beachte, dass diese Vorgehensweise wesentlich effektiver ist, als Einsetzen in die Formel aus Bemerkung V.1.7.

V.1.11. Beispiel. Wir wollen die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & -5 & 4 & 7 & 4 \\ -2 & -14 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Wie zuvor folgt mit Satz V.1.3

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & -5 & 4 & 7 & 4 \\ -2 & -14 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & -4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 9 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 7 \\ 0 & -2 & -5 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120,$$

also $\det(A) = 120$.

V.1.12. Beispiel. Wir wollen die Determinante der komplexen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 7+\mathbf{i} & 3-2\mathbf{i} \\ 2\mathbf{i} & 15+3\mathbf{i} & 8-\mathbf{i} \\ 1 & 2-6\mathbf{i} & 1-\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

bestimmen. Mit Satz V.1.3 erhalten wir

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & 7+\mathbf{i} & 3-2\mathbf{i} \\ 2\mathbf{i} & 15+3\mathbf{i} & 8-\mathbf{i} \\ 1 & 2-6\mathbf{i} & 1-\mathbf{i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & 7+\mathbf{i} & 3-2\mathbf{i} \\ 0 & 1+\mathbf{i} & 2+3\mathbf{i} \\ 0 & 1+\mathbf{i} & 3+2\mathbf{i} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & 7+\mathbf{i} & 3-2\mathbf{i} \\ 0 & 1+\mathbf{i} & 2+3\mathbf{i} \\ 0 & 0 & 1-\mathbf{i} \end{vmatrix} = \mathbf{i}(1+\mathbf{i})(1-\mathbf{i}) = 2\mathbf{i},$$

d.h. $\det(A) = 2\mathbf{i}$. Insbesondere sehen wir, dass A invertierbar ist.

V.1.13. Beispiel. Liegt eine Matrix vor, die eine Zeile oder Spalte mit vielen Nullern hat, so kann es für die Bestimmung der Determinante hilfreich sein nach dieser Spalte bzw. Zeile zu entwickeln. Durch Entwicklung nach der dritten Zeile erhalten wir etwa:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 17 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & 19 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 4 & 23 & 7 & 4 \\ -2 & -14 & 1 & 29 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & -4 & 31 & -3 & 5 \end{pmatrix} = (-1)^{3+4}\cdot 7\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & -5 & 4 & 7 & 4 \\ -2 & -14 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 5 & -4 & -3 & 5 \end{pmatrix} = -7\cdot 120 = 840.$$

wobei wir im vorletzten Gleicheitszeichen die Berechnung aus Beispiel V.1.11 verwendet haben.

V.1.14. Satz (Vandermonde-Determinante). *Für $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ gilt*

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{0\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch Induktion nach n. Die Fälle $n = 0$ und $n = 1$ sind trivial. Nun zum Induktionsschritt von $n-1$ nach n: Subtrahieren wir die vorletzte Spalte x_0 Mal von der letzten Spalte, und dann x_0 Mal die drittletzte Spalte von der vorletzten, etc. erhlaten wir:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}
&= \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1-x_0 & (x_1-x_0)x_1 & (x_1-x_0)x_1^2 & \cdots & (x_1-x_0)x_1^{n-1} \\ 1 & x_2-x_0 & (x_2-x_0)x_2 & (x_2-x_0)x_2^2 & \cdots & (x_2-x_0)x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n-x_0 & (x_n-x_0)x_n & (x_n-x_0)x_n^2 & \cdots & (x_n-x_0)x_n^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} x_1-x_0 & (x_1-x_0)x_1 & (x_1-x_0)x_1^2 & \cdots & (x_1-x_0)x_1^{n-1} \\ x_2-x_0 & (x_2-x_0)x_2 & (x_2-x_0)x_2^2 & \cdots & (x_2-x_0)x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n-x_0 & (x_n-x_0)x_n & (x_n-x_0)x_n^2 & \cdots & (x_n-x_0)x_n^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \prod_{0=i<j\leq n}(x_j - x_i)\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \prod_{0=i<j\leq n}(x_j - x_i)\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i) = \prod_{0\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)
\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Gleichheitszeichen die Induktionsvoraussetzung verwendet haben. □

V.1.15. Bemerkung. Aus dem vorangehenden Satz erhalten wir erneut, dass die Vandermonde-Matrix für paarweise verschiedene $x_0, x_1, \dots, x_n$ invertierbar ist, vgl. Satz IV.6.26.

V.2. Determinanten und Gleichungssysteme. Mit Hilfe von Determinanten lassen sich die Lösungen eines eindeutig lösbaren Gleichungssystems explizit angeben:

V.2.1. Satz (Cramer'sche Regel). *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix und $y \in \mathbb{K}^n$. Dann besitzt das Gleichungssystem*

$$Ax = y$$

eine eindeutige Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ und für die i-te Komponente von x gilt

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \det\bigl(a_1|\cdots|a_{i-1}|y|a_{i+1}|\cdots|a_n\bigr),$$

wobei $A = (a_1|\cdots|a_n)$ die Spalten von A bezeichnen, $1 \leq i \leq n$.

Beweis. Da A invertierbar ist, existiert ein eindeutiges $x \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax = y$. Sei nun $i \in \{1, \dots, n\}$ fix und betrachte die $(n \times n)$-Matrix

$$X = \bigl(e_1|\cdots|e_{i-1}|x|e_{i+1}|\cdots|e_n\bigr).$$

Dann gilt

$$AX = \bigl(Ae_1|\cdots|Ae_{i-1}|Ax|Ae_{i+1}|\cdots|Ae_n\bigr) = \bigl(a_1|\cdots|a_{i-1}|y|a_{i+1}|\cdots|a_n\bigr)$$

und nach Satz V.1.3(i) daher

$$\det(A)\det(X) = \det(AX) = \det\bigl(a_1|\cdots|a_{i-1}|y|a_{i+1}|\cdots|a_n\bigr).$$

Mit den Rechenregeln in Satz V.1.3 folgt $\det(X) = x_i$ und damit der Satz. □

V.2.2. Beispiel. Wir wollen das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Cramer'schen Regel lösen. Dazu berechnen wir folgende Determinanten, vgl. Beispiel V.1.6:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 6 - 10 - 45 + 1 + 4 = -53$$

$$\det(y|a_2|a_3) = \begin{vmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \\ 9 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 24 - 18 + 25 - 135 + 8 - 10 = -106$$

$$\det(a_1|y|a_3) = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 24 - 90 - 75 + 9 + 16 = -159$$

$$\det(a_1|a_2|y) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ -2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 27 + 30 - 16 - 72 - 5 + 36 = 0$$

Nach Satz V.2.1 gilt daher

$$x = \frac{1}{-53}\begin{pmatrix}-106\\-159\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}. \tag{V.3}$$

Zum Vergleich wollen wir das selbe Gleichungssystem nochmals mit Hilfe des in Abschnitt IV.4 beschriebenen Algorithmus lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&5&8\\-2&3&-1&5\\3&1&1&9\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&5&8\\0&7&9&21\\0&-5&-14&-15\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&5&8\\0&1&9/7&3\\0&-5&-14&-15\end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&5&8\\0&1&9/7&3\\0&0&-63/7&0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&5&8\\0&1&9/7&3\\0&0&1&0\end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&8\\0&1&0&3\\0&0&1&0\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&3\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

Wir erhalten so die selbe Lösung (V.3).

Mit Hilfe von Determinanten können wir auch eine explizite Formel für die Inverse einer Matrix angeben:

V.2.3. Satz. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und bezeichne $\tilde{A}$ die Matrix mit Einträgen $\tilde{A}_{ji} := (-1)^{i+j}\det(\hat{A}_{(ij)})$, d.h.*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} +\det\big(\hat{A}_{(11)}\big) & -\det\big(\hat{A}_{(12)}\big) & +\det\big(\hat{A}_{(13)}\big) & \cdots \\ -\det\big(\hat{A}_{(21)}\big) & +\det\big(\hat{A}_{(22)}\big) & -\det\big(\hat{A}_{(23)}\big) & \cdots \\ +\det\big(\hat{A}_{(31)}\big) & -\det\big(\hat{A}_{(32)}\big) & +\det\big(\hat{A}_{(33)}\big) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^t$$

wobei $\hat{A}_{(ij)}$ jene $(n-1)\times(n-1)$-Matrix bezeichnet, die wir aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte erhalten. Dann gilt

$$A\tilde{A} = \det(A)I_n.$$

Ist A invertierbar, so erhalten wir folgende explizite Formel für die Inverse:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\tilde{A}.$$

Beweis. Entwickeln nach der i-ten Zeile, siehe Satz V.1.3(l), liefert

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}A_{ij}\det\big(\hat{A}_{(ij)}\big) = \sum_{j=1}^{n}A_{ij}\tilde{A}_{ji} = (A\tilde{A})_{ii}.$$

Die Matrizen $A\tilde{A}$ und $\det(A)I_n$ stimmen daher längs der Diagonale überein. Sei nun $k \neq i$ und bezeichne A' die Matrix die wir erhalten, wenn wir die i-te Zeile von A durch die k-te Zeile von A ersetzen. Dann hat A' zwei gleiche Zeilen, es gilt daher $\det(A') = 0$. Nach Konstruktion gilt weiters $A'_{ij} = A_{kj}$. Schließlich haben wir $\hat{A}'_{(ij)} = \hat{A}_{(ij)}$, denn A' und A unterscheiden sich nur in der i-ten Zeile, und diese wird ja gestrichen. Entwickeln nach der i-ten Zeile liefert somit:

$$0 = \det(A') = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A'_{ij} \det\big(\hat{A}'_{(ij)}\big) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{kj} \det\big(\hat{A}_{(ij)}\big) = \sum_{j=1}^{n} A_{kj}\tilde{A}_{ji} = (A\tilde{A})_{ki}.$$

Die Matrizen $A\tilde{A}$ und $\det(A)I_n$ stimmen daher auch außerhalb der Diagonale überein. Dies zeigt $A\tilde{A} = \det(A)I_n$. Im invertierbaren Fall ist die Inverse also durch $A^{-1} = \det(A)^{-1}\tilde{A}$ gegeben. □

V.2.4. Bemerkung. Für die Inverse einer invertierbaren (2×2)-Matrix erhalten wir aus Satz V.2.3 erneut, siehe Beispiel II.4.8, die Formel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

V.2.5. Bemerkung. Für die Inverse einer invertierbaren (3×3)-Matrix erhalten wir aus Satz V.2.3 die Formel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}^{t}$$

Damit erhalten wir etwa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^{t}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ -5 & 4 & -1 \end{pmatrix}^{t} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

V.3. Permutationen und Leibniz'sche Formel. Es bezeichne $\mathfrak{S}_n$ die Menge aller *Permutationen* der Menge $\{1, \dots, n\}$, d.h. die Menge aller bijektiven Abbildungen $\sigma\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$. Bezüglich der Komposition von Abbildungen bildet $\mathfrak{S}_n$ eine Gruppe, die aus $n!$ Elementen besteht. Unter einer *Transposition* verstehen wir eine Permutation die zwei Elemente vertauscht und alle anderen fix lässt. Es bezeichne $\tau_{ij} \in \mathfrak{S}_n$ jene Transposition die die beiden Zahlen i und j vertauscht und alle anderen fix lässt, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$. Beachte, dass für jede Transposition $\tau \in \mathfrak{S}_n$ die Relation $\tau \circ \tau = 1$ gilt.

Wir beginnen mit folgendem einfachen Hilfsatz, den wir eigenlich schon im Beweis von Lemma V.1.1(h) verwendet haben:

V.3.1. LEMMA. *Jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ lässt sich als Produkt von Transpositionen schreiben. Dabei genügt es Transpositionen zu verwenden, die jeweils nur benachbarte Zahlen vertauschen.*

BEWEIS. Wir führen den Beweis durch Induktion nach n. Die Fälle $n = 1$ und $n = 2$ sind trivial. Für den Induktionsschritt sei nun $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ und $i := \sigma(n)$. Nach Konstruktion lässt die Permutation

$$\tilde{\sigma} := \tau_{n-1,n} \circ \tau_{n-2,n-1} \circ \cdots \circ \tau_{i+1,i+2} \circ \tau_{i,i+1} \circ \sigma \tag{V.4}$$

die Zahl n fix, d.h. $\tilde{\sigma}(n) = n$. Sie kann daher als Permutation von $\{1, \dots, n-1\}$ aufgefasst werden. Nach Induktionsvoraussetzung lässt sich $\tilde{\sigma}$ in der Form $\tilde{\sigma} = \tilde{\tau}_1 \circ \cdots \circ \tilde{\tau}_N$ schreiben, wobei jedes $\tilde{\tau}_j$ eine Transposition bezeichnet, die zwei benachbarte Zahlen vertauscht. Mit (V.4) erhalten wir die gesuchte Darstellung,

$$\sigma = \tau_{i,i+1} \circ \cdots \circ \tau_{n-1,n} \circ \tilde{\sigma} = \tau_{i,i+1} \circ \cdots \circ \tau_{n-1,n} \circ \tilde{\tau}_1 \circ \cdots \circ \tilde{\tau}_N.$$

Damit ist der Induktionsschritt gezeigt und das Lemma bewiesen. □

V.3.2. LEMMA. *Die Abbildung*

$$\operatorname{sgn}\colon \mathfrak{S}_n \to \{1, -1\}, \qquad \operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\sharp\{(i,j) \,|\, i < j \text{ und } \sigma(i) > \sigma(j)\}},$$

ist ein Gruppenhomomorphismus, der jede Transposition auf -1 abbildet. Dabei fassen wir $\{1, -1\}$ bezüglich Multiplikation als (abelsche) Gruppe auf. Jeder weitere Gruppenhomomorphismus $\mathfrak{S}_n \to \{1, -1\}$ mit dieser Eigenschaft muss mit sgn *übereinstimmen.*

BEWEIS. Sei $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ und $\tau = \tau_{k,k+1}$, wobei $1 \leq k < n$. Dann gilt

$$\sharp\big\{(i,j) \bigm| i < j,\, (\sigma \circ \tau)(i) > (\sigma \circ \tau)(j)\big\} = \sharp\big\{(i,j) \bigm| i < j,\, \sigma(i) > \sigma(j)\big\} \pm 1$$

je nachdem, ob $\sigma(k) > \sigma(k+1)$ oder $\sigma(k) < \sigma(k+1)$. Jedenfalls folgt

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = -\operatorname{sgn}(\sigma). \tag{V.5}$$

Sei nun $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$. Nach Lemma V.3.1 lässt sich σ' in der Form $\sigma' = \tau'_N \circ \cdots \circ \tau'_1$ schreiben, wobei jedes τ'_i eine Transposition bezeichnet, die zwei benachbarte Zahlen vertauscht. Induktiv erhalten wir aus (V.5)

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\big(\sigma \circ \sigma'\big) &= \operatorname{sgn}\big(\sigma \circ \tau'_N \circ \cdots \circ \tau'_1\big) \\ &= -\operatorname{sgn}\big(\sigma \circ \tau'_N \circ \cdots \circ \tau'_2\big) = \cdots = (-1)^N \operatorname{sgn}(\sigma) \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}\big(\sigma'\big) &= \operatorname{sgn}\big(\tau'_N \circ \cdots \circ \tau'_1\big) \\ &= -\operatorname{sgn}\big(\tau'_N \circ \cdots \circ \tau'_2\big) = \cdots = (-1)^N \operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = (-1)^N, \end{aligned}$$

denn $\mathrm{sgn}(\mathrm{id}) = 1$, da ja $\sharp\big\{(i,j) \bigm| i < j,\ \mathrm{id}(i) > \mathrm{id}(j)\big\} = 0$. Dies zeigt

$$\mathrm{sgn}(\sigma \circ \sigma') = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\sigma'),$$

für beliebige $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$, also ist $\mathrm{sgn}\colon \mathfrak{S}_n \to \{1,-1\}$ ein Homomorphismus. Sei nun $\tau = \tau_{k,l}$ eine beliebige Transposition, $k \neq l$. Dann existiert $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, sodass $\sigma(1) = k$ und $\sigma(2) = l$. Es folgt $\tau = \sigma \circ \tau_{12} \circ \sigma^{-1}$, und daher

$$\mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau_{12})\,\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\mathrm{sgn}(\tau_{12})\,\mathrm{sgn}(\sigma)^{-1} = \mathrm{sgn}(\tau_{12}) = -1.$$

Die Eindeutigkeitsaussage folgt sofort aus Lemma V.3.1. □

V.3.3. Bemerkung. Der Kern des Homomorphismus $\mathrm{sgn}\colon \mathfrak{S}_n \to \{1,-1\}$,

$$A_n := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{sgn}(\sigma) = 1\},$$

bildet eine Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$, sie wird die *alternierende Gruppe* genannt.

V.3.4. Bemerkung. Nach Lemma V.3.1 lässt sich jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ als Produkt von Transpositionen schreiben, $\sigma = \tau_N \circ \cdots \circ \tau_1$. Diese Darstellung ist allerdings nicht eindeutig, etwa haben wir auch $\sigma = \tau_{12} \circ \tau_{12} \circ \tau_N \circ \cdots \circ \tau_1$. Nach Lemma V.3.2 gilt jedoch $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^N$, d.h. die Parität der Anzahl der Faktoren ist unabhängig von der Darstellung. Für $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ muss N gerade sein, d.h. *jede* Darstellung von σ als Produkt von Transpositionen hat eine gerade Anzahl von Faktoren. Solche Permutationen werden als *gerade Permutationen* bezeichnet. Ist $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$, dann muss N ungerade sein, d.h. *jede* Darstellung von σ als Produkt von Transpositionen hat eine ungerade Anzahl von Faktoren. Solche Permutationen werden *ungerade Permutationen* genannt.

V.3.5. Beispiel. Die Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_3$, $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 1$, lässt sich in der Form $\sigma = \tau_{12} \circ \tau_{23}$ schreiben, es gilt daher $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$.

V.3.6. Satz (Leibniz'sche Formel). *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jede Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$*

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{1,\sigma(1)} A_{2,\sigma(2)} \cdots A_{n,\sigma(n)}.$$

Beweis. Wir bezeichnen die rechte Seite der Formel mit

$$\delta\colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}, \qquad \delta(A) := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{1,\sigma(1)} A_{2,\sigma(2)} \cdots A_{n,\sigma(n)}. \tag{V.6}$$

Offensichtlich ist $\delta(A)$ linear in jeder Spalte von A. Dies gilt sogar für jeden Ausdruck der Form $A_{1,\sigma(1)} A_{2,\sigma(2)} \cdots A_{n,\sigma(n)}$, denn er enthält aus jeder Spalte von A genau einen Faktor. Stimmen die Spalten k und l von A überein, $k \neq l$, und bezeichnet $\tau = \tau_{kl}$ die Transposistion, die k mit l vertauscht, dann gilt $A_{i,j} = A_{i,\tau(j)}$ und daher auch $A_{i,\sigma(i)} = A_{i,(\tau\circ\sigma)(i)}$, für alle $i, j \in \{1,\dots,n\}$. Die beiden Summanden in (V.6), die den Permutationen σ und $\tau \circ \sigma$ entsprechen, unterscheiden sich also nur durch ihr Vorzeichen, $\mathrm{sgn}(\tau \circ \sigma) = -\mathrm{sgn}(\sigma)$, und kürzen einander. Dies zeigt, dass $\delta(A) = 0$ gilt, wenn zwei Spalten von A übereinstimmen. Schließlich gilt auch $\delta(I_n) = 1$, denn für $A = I_n$ liefert nur $\sigma = \mathrm{id}$ einen nicht-trivialen Beitrag in der Summe (V.6), nämlich 1. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Satz V.1.3 folgt daher $\det(A) = \delta(A)$. $\square$

V.3.7. Bemerkung. Der Beweis von Satz V.3.6 liefert eine neue Konstruktion der Determinantenfunktion, die unabhängig von der im Beweis des Satzes V.1.3 besprochenen ist.

V.3.8. Beispiel. Für (3×3)-Matrizen erhalten wir:

σ	$\sigma(1)$	$\sigma(2)$	$\sigma(3)$	$\mathrm{sgn}(\sigma)$	Term in Leibniz' Formel
id	1	2	3	1	$a_{11}a_{22}a_{33}$
τ_{12}	2	1	3	-1	$-a_{12}a_{21}a_{33}$
τ_{13}	3	2	1	-1	$-a_{13}a_{22}a_{31}$
τ_{23}	1	3	2	-1	$-a_{11}a_{23}a_{32}$
$\tau_{12} \circ \tau_{23}$	2	3	1	1	$a_{12}a_{23}a_{31}$
$\tau_{23} \circ \tau_{12}$	3	1	2	1	$a_{13}a_{21}a_{32}$

Nach Satz V.3.6 gilt daher

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Wir erhalten also erneut die Regel von Sarrus, vgl. Bemerkung V.1.6.

V.4. Determinanten von Endomorphismen. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Sind B und $\tilde{B}$ zwei geordnete Basen von V, dann gilt $[\varphi]_{\tilde{B}\tilde{B}} = T[\varphi]_{BB}T^{-1}$, wobei $T = T_{\tilde{B}B} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $n = \dim(V)$, siehe Korollar IV.6.21. Mit Satz V.1.3 folgt

$$\det\bigl([\varphi]_{\tilde{B}\tilde{B}}\bigr) = \det\bigl(T[\varphi]_{\tilde{B}\tilde{B}}T^{-1}\bigr) = \det(T)\det\bigl([\varphi]_{BB}\bigr)\det(T)^{-1} = \det\bigl([\varphi]_{BB}\bigr),$$

d.h. die Determinanten der Matrixdarstellung von φ ist unabhängig von der Basis. Dies erlaubt es eine Determinante für Endomorphismen $\varphi\colon V \to V$ zu definieren:

V.4.1. Definition (Determinante eines Endomorphismus). Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Unter der Determinante von φ verstehen wir die Zahl

$$\det(\varphi) := \det\bigl([\varphi]_{BB}\bigr),$$

wobei B eine geordnete Basis von V bezeichnet. Nach den Ausführungen oben hängt dies nicht von der Wahl der Basis B ab, und ist daher wohldefiniert.

V.4.2. Korollar. *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und*

$$\det\colon \mathrm{end}(V) \to \mathbb{K}.$$

die eben definierte Abbildung, siehe Definititon V.4.1. Dann gilt

$$\det(\psi \circ \varphi) = \det(\psi)\det(\varphi) \qquad \textit{und} \qquad \det(\mathrm{id}_V) = 1,$$

für alle $\varphi, \psi \in \operatorname{end}(V)$. *Weiters ist* $\varphi \in \operatorname{end}(V)$ *genau dann invertierbar, wenn* $\det(\varphi) \neq 0$, *und in diesem Fall gilt*

$$\det(\varphi^{-1}) = \det(\varphi)^{-1}.$$

Die Determinante schränkt sich daher zu einem surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\det\colon \mathrm{GL}(V) \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

ein, deren Kern, $\mathrm{SL}(V) := \{\varphi \in \operatorname{end}(V) : \det(\varphi) = 1\}$, *eine Untergruppe von* $\mathrm{GL}(V)$ *bildet. Schließlich haben wir*

$$\det(\varphi^t) = \det(\varphi),$$

für jedes $\varphi \in \operatorname{end}(V)$, *wobei* $\varphi^t \in \operatorname{end}(V^*)$ *die zu* φ *duale Abbildung bezeichnet.*

Beweis. Es sei B eine geordnete Basis von V. Nach Korollar IV.6.21 gilt $[\psi \circ \varphi]_{BB} = [\psi]_{BB}[\varphi]_{BB}$ und mit Satz V.1.3(i) daher

$$\begin{aligned}\det(\psi \circ \varphi) = \det\big([\psi \circ \varphi]_{BB}\big) &= \det\big([\psi]_{BB}[\varphi]_{BB}\big) \\ &= \det\big([\psi]_{BB}\big)\det\big([\varphi]_{BB}\big) = \det(\psi)\det(\varphi).\end{aligned}$$

Da $[\mathrm{id}_V]_{BB} = I_n$, erhalten wir analog $\det(\mathrm{id}_V) = \det\big([\mathrm{id}_V]_{BB}\big) = \det(I_n) = 1$. Nach Korollar IV.6.21 ist φ genau dann invertierbar, wenn $[\varphi]_{BB}$ eine invertierbare Matrix ist. Nach Satz V.1.3(j) ist dies genau dann der Fall, wenn $\det(\varphi) = \det\big([\varphi]_{BB}\big) \neq 0$ gilt. Im invertierbaren Fall folgt

$$1 = \det(\mathrm{id}_V) = \det(\varphi^{-1} \circ \varphi) = \det(\varphi^{-1})\det(\varphi),$$

also $\det(\varphi^{-1}) = \det(\varphi)^{-1}$. Nach Korollar IV.6.21 gilt $[\varphi^t]_{B^*B^*} = [\varphi]_{BB}^t$, also

$$\det(\varphi^t) = \det\big([\varphi^t]_{B^*B^*}\big) = \det\big([\varphi]_{BB}^t\big) = \det\big([\varphi]_{BB}\big) = \det(\varphi),$$

wobei wir beim vorletzten Gleichheitszeichen Satz V.1.3(k) verwendet haben. □

V.4.3. Beispiel. Bezeichne $V = \mathbb{R}[z]_{\leq 3}$ den Vektorraum der reellen Polynome vom Grad kleiner gleich 3 und betrachte die lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$, $\varphi(p) := p' - p$. Wir wollen die Determinante von φ bestimmen. Dazu wählen wir eine geordnete Basis B von V, etwa $p_0 = 1$, $p_1 = z$, $p_2 = z^2$, $p_3 = z^3$. Dann folgt

$$[\varphi]_{BB} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

also $\det(\varphi) = \det\big([\varphi]_{BB}\big) = (-1)^4 = 1$.

V.5. Orientierung reeller Vektorräume. Die Euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ besitzt zwei Orientierungen: im Uhrzeigersinn oder gegen den Uhrzeigersinn. Auch auf $\mathbb{R}^3$ gibt es zwei Orientierungen: Korkenzieher für Links- bzw. Rechtshänder. Wir wollen diesen eher vagen Begriff der Orientierung nun präzisieren und auf beliebige Dimensionen ausweiten. Für den Rest dieses Abschnitts sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum und $n := \dim(V) \geq 1$.

Wir definieren auf der Menge der geordneten Basen von V eine Relation:

$$B \sim B' :\Leftrightarrow \det(T_{B'B}) > 0.$$

Dabei sind B und B' zwei geordnete Basen von von V und $T_{B'B}$ bezeichnet die Matrix zum Basiswechsel von B nach B', siehe Abschnitt IV.6.

V.5.1. Lemma. *Dies ist eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Die Relation ist reflexsiv, denn wegen $\det(T_{BB}) = \det(I_n) = 1 > 0$ gilt $B \sim B$. Die Relation ist symmetrisch, denn aus $B \sim B'$ folgt $\det(T_{B'B}) > 0$, also auch $\det(T_{BB'}) = \det(T_{B'B}^{-1}) = \det(T_{B'B})^{-1} > 0$ und damit $B' \sim B$. Gilt $B \sim B'$ und $B' \sim B''$, d.h. $\det(T_{B'B}) > 0$ und $\det(T_{B''B'}) > 0$, dann folgt $\det(T_{B''B}) = \det(T_{B''B'}T_{B'B}) = \det(T_{B''B'})\det(T_{B'B}) > 0$, also $B \sim B''$. Dies zeigt, dass die Relation auch transitiv ist. $\square$

Wir bezeichnen die Menge der Äquivalenzklassen dieser Relation mit $\mathcal{O}(V)$. Die Elemente von $\mathcal{O}(V)$ werden *Orientierungen* von V genannt. Ist B eine geordnete Basis von V, dann bezeichne $\mathfrak{o}_B \in \mathcal{O}(V)$, die von B repräsentierte Orientierung (Äquivalenzklasse). Zwei geordnete Basen B und B' werden *gleich-orientiert* genannt, wenn sie dieselbe Orientierung repräsentieren, d.h. wenn $\mathfrak{o}_B = \mathfrak{o}_{B'}$ gilt. Nach Definition ist dies genau dann der Fall, wenn $\det(T_{B'B}) > 0$ gilt.

V.5.2. Lemma. *Die Menge $\mathcal{O}(V)$ besteht aus genau zwei Elementen, d.h. V besitzt genau zwei Orientierungen. Ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine geordnete Basis von V und $\mathfrak{o}_B \in \mathcal{O}(V)$ die von ihr repräsentierte Orientierung, dann repräsentiert die Basis $\tilde{B} = (-b_1, b_2, \dots, b_n)$ die andere Orientierung, d.h. $\mathfrak{o}_B \neq \mathfrak{o}_{\tilde{B}}$.*

Beweis. Die beiden Basen B und $\tilde{B}$ sind nicht gleich-orientiert, denn

$$\det(T_{\tilde{B}B}) = \det\begin{pmatrix} -1 & \\ & I_{n-1} \end{pmatrix} = -1 < 0.$$

In anderen Worten $\mathfrak{o}_B \neq \mathfrak{o}_{\tilde{B}}$. Die Menge $\mathcal{O}(V)$ besitzt daher wenigstens zwei verschiedene Elemente. Sei nun B' eine weitere geordnete Basis von V und $\mathfrak{o}_{B'} \neq \mathfrak{o}_B$, d.h. $\det(T_{B'B}) \leq 0$. Da $T_{B'B}$ invertierbar ist, folgt $\det(T_{B'B}) < 0$ und daher $\det(T_{B'\tilde{B}}) = \det(T_{B'B}T_{B\tilde{B}}) = \det(T_{B'B})\det(T_{B\tilde{B}}) > 0$, also $\mathfrak{o}_{B'} = \mathfrak{o}_{\tilde{B}}$. Dies zeigt, dass V genau zwei Orientierungen besitzt, nämlich $\mathfrak{o}_B$ und $\mathfrak{o}_{\tilde{B}}$. $\square$

Ist $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}(V)$ eine Orientierung von V, dann bezeichne $-\mathfrak{o}$ die andere Orientierung von V. Mit der Notation aus Lemma V.5.2 gilt daher $-\mathfrak{o}_B = \mathfrak{o}_{\tilde{B}}$.

Unter einem *orientierten Vektorraum* verstehen wir einen Vektorraum zusammen mit einer Orientierung, d.h. ein Paar $(V, \mathfrak{o})$, wobei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum ist und $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}(V)$. In dieser Situation werden die Basen in $\mathfrak{o}$ als *positiv orientierte Basen* bezeichnet, die Basen in $-\mathfrak{o}$ werden negativ orientierte Basen genannt.

V.5.3. Beispiel. Unter der *Standardorientierung* von $\mathbb{R}^n$ verstehen wir die von der Standardbasis $E = (e_1, \dots, e_n)$ repräsentierte Orientierung $\mathfrak{o}_E$. Bezüglich der Standardorientierung von $\mathbb{R}^3$ ist die Basis

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

positiv orientiert, denn

$$\det\bigl(T_{EB}\bigr) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 31 > 0,$$

wobei $E = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

V.5.4. Lemma. *Ist $\varphi \colon V \to W$ ein linearer Isomorphismus zwischen endlich-dimensionalen reellen Vektorräumen, und sind $B \sim B'$ zwei gleichorientierte Basen von V, dann sind auch $\varphi(B)$ und $\varphi(B')$ gleichorientierte Basen von W. Wir erhalten daher eine induzierte Bijketion*

$$\varphi \colon \mathcal{O}(V) \to \mathcal{O}(W), \qquad \varphi(\mathfrak{o}_B) := \mathfrak{o}_{\varphi(B)}.$$

Dabei bezeichnet $\varphi(B)$ die Basis $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)$ von W, falls $B = (b_1, \dots, b_n)$.

Beweis. Seien also B und B' gleichorientiert, d.h. $\det(T_{B'B}) > 0$. Offensichtlich gilt $[\varphi]_{\varphi(B)B} = I_n = [\varphi]_{\varphi(B')B'}$. Somit ist

$$\begin{aligned} T_{\varphi(B')\varphi(B)} &= [\mathrm{id}_W]_{\varphi(B')\varphi(B)} \\ &= [\varphi \circ \mathrm{id}_V \circ \varphi^{-1}]_{\varphi(B')\varphi(B)} \\ &= [\varphi]_{\varphi(B')B'} [\mathrm{id}_V]_{B'B} [\varphi^{-1}]_{B\varphi(B)} \\ &= [\varphi]_{\varphi(B')B'} [\mathrm{id}_V]_{B'B} [\varphi]^{-1}_{\varphi(B)B} \\ &= I_n T_{B'B} I_n = T_{B'B} \end{aligned}$$

also $\det(T_{\varphi(B')\varphi(B)}) = \det(T_{B'B}) > 0$, d.h. die Basen $\varphi(B)$ und $\varphi(B')$ sind gleichorientiert. $\square$

Für einen linearen Isomorphismus $\varphi \colon V \to V$ tritt genau einer der folgenden beiden Fälle ein:

(a) $\det(\varphi) > 0$: In diesem Fall gilt $\varphi(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}$ für alle $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}(V)$, und φ wird *orientierungsbewahrend* genannt.

(b) $\det(\varphi) < 0$: In diesem Fall gilt $\varphi(\mathfrak{o}) = -\mathfrak{o}$ für alle $\mathfrak{o} \in \mathcal{O}(V)$ und φ wird *orientierungumkehrend* genannt.

Dies folgt aus der Gleichung $[\varphi]_{BB} = T_{B\varphi(B)}$, wobei B eine Basis von V bezeichnet.

V.5.5. Beispiel. Die Rotationen $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\rho\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

ist für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ orientierungsbewahrend, denn $\begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix} = 1 > 0$.

V.5.6. Beispiel. Seien W und W' zwei komplementäre Teilräume von V, d.h. $V = W \oplus W'$. Bezeichnet $\sigma\colon V \to V$ die Spiegelung an W längs W', dann gilt $\det(\sigma) = (-1)^{\dim(W')}$, siehe Aufgabe 24. Diese Spiegelung ist also orientierungserhaltend falls W' gerade Dimension hat, und sie ist orientierungsumkehrend, wenn W' ungerade Dimension hat. Insbesondere ist jede Spiegelung an einer Hyperebene orientierungsumkehrend. Auch folgt daraus, dass die Spiegelung am Ursprung, $-\operatorname{id}_V\colon V \to V$, genau dann orientierungsbewahrend ist, wenn V gerade Dimension hat, anderenfalls ist sie orientierungsumkehrend.

V.5.7. Bemerkung. Die Menge der Orientierungsbewahrenden Isomorphismen bildet eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$, siehe Aufgabe 26.

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Unter einer Kurve in V verstehen wir eine Abbildung $v\colon I \to V$, $t \mapsto v(t)$. Eine solche Kurve wird stetig genannt, falls ihre Koordinaten bezüglich einer geordneten Basis B von V stetig sind, d.h. die Abbildung $I \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto [v(t)]_B$, stetig ist. Dies bleibt dann für jede weitere Basis B' von V richtig, denn mit $[v(t)]_B$ ist auch $[v(t)]_{B'} = T_{B'B}[v(t)]_B$ stetig in t.

Eine Familie geordneter Basen, $B(t) = \big(b_1(t), \dots, b_n(t)\big)$, $t \in I$, wird stetig genannt, falls jede der Kurven $b_i\colon I \to V$ stetig ist, $i = 1, \dots, n$. Dies ist genau dann der Fall, wenn jede Komponente der Basiswechselmatrix $T_{B'B(t)}$ stetig von t abhängt, wobei B' eine beliebige geordnete Basis von V bezeichnet.

V.5.8. Satz. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $B(t)$, $t \in I$, eine stetige Kurve geordneter Basen von V. Dann sind je zwei Basen dieser Familie gleichorientiert, d.h. es gilt $\mathfrak{o}_{B(t_1)} = \mathfrak{o}_{B(t_2)}$, für alle $t_1, t_2 \in I$.*

Beweis. Aufgrund der Leibniz'schen Formel ist die Abbildung

$$\omega\colon I \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad \omega(t) := \det\big(T_{B(t_1)B(t)}\big),$$

stetig. Weiters ist $\omega(t_1) = 1 > 0$. Aus dem Zwischenwertsatz folgt $\omega(t) > 0$, für alle $t \in I$. Es gilt somit $\mathfrak{o}_{B(t)} = \mathfrak{o}_{B(t_1)}$, für alle $t \in I$. □