VI.2.4. Lemma. *Ist* $0 \neq p \in \mathbb{K}[z]$ *ein nicht-triviales Polynom, dann existieren* $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ *und ein Polynom* $q \in \mathbb{K}[z]$*, ohne Nullstellen in* $\mathbb{K}$*, sodass*

$$p = (z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_k) q.$$

Beweis. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach dem Grad des Polynoms p. Der Induktionsanfang, $\deg(p) = 0$, ist trivial. Nun zum Induktionsschritt: Besitzt p keine Nullstelle in $\mathbb{K}$, dann haben $k = 0$ und $q = p$ die gewüschten Eigenschaften. O.B.d.A. sei daher $\lambda_1 \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von p. Nach Lemma VI.2.3 existiert ein Polynom $\tilde{p} \in \mathbb{K}[z]$, sodass $p = (z - \lambda_1)\tilde{p}$. Beachte $\tilde{p} \neq 0$ und $\deg(\tilde{p}) = \deg(p) - 1$. Nach Induktionsvoraussetzung existieren daher $\lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ und ein Nullstellen-freies Polynom $q \in \mathbb{K}[z]$, sodass

$$\tilde{p} = (z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_k) q.$$

Insgesamt folgt $p = (z - \lambda_1)\tilde{p} = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_k) q$. Damit ist der Induktionsschritt gezeigt und das Lemma bewiesen. □

VI.2.5. Proposition. *Sei* $\mathbb{K}$ *ein Körper und* $0 \neq p \in \mathbb{K}[z]$ *ein Polynom vom Grad* n*. Dann hat* p *höchstens* n *verschiedene Nullstellen in* $\mathbb{K}$*. Bezeichnen* $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ *alle, paarweise verschiedenen, Nullstellen von* p*, dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen* $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ *und ein eindeutig bestimmtes Polynom* $q \in \mathbb{K}[z]$ *ohne Nullstellen in* $\mathbb{K}$*, sodass*

$$p = (z - \lambda_1)^{n_1} \cdots (z - \lambda_k)^{n_k} q. \tag{VI.9}$$

Weiters gilt $n = n_1 + \cdots + n_k + \deg(q)$ *und daher auch* $n_1 + \cdots + n_k \leq n$*.*

Beweis. Durch Zusammenfassen mehrfach auftretender Linearfaktoren in Lemma VI.2.4 erhalten wir $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, ein Nullstellen-freies Polynom $q \in \mathbb{K}[z]$ und paarweise verschiedene $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, sodass

$$p = (z - \lambda_1)^{n_1} \cdots (z - \lambda_k)^{n_k} q.$$

Offensichtlich ist jedes λ_i eine Nullstelle von p. Andererseits sind dies schon alle Nullstellen von p, denn aus $p(\lambda) = 0$ folgt $(\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k} q(\lambda) = 0$, also $\lambda = \lambda_i$ für ein i, da ja $q(\lambda) \neq 0$. Für den Grad von p erhalten wir

$$n = \deg(p) = n_1 + \cdots + n_k + \deg(q) \geq n_1 + \cdots + n_k.$$

Insbesondere folgt $k \leq n$, also kann p höchstens n verschiedene Nullstellen haben.

Um die Eindeutigkeit von n_i und q zu beweisen werden wir folgende Kürzungsregel verwenden: Ist $sr = s\tilde{r}$, wobei $s, r, \tilde{r} \in \mathbb{K}[z]$ und $s \neq 0$, dann gilt schon $r = \tilde{r}$. Dies folgt sofort aus der Eindeutigkeitsaussage in Lemma VI.2.1.

Sei nun $p = (z - \lambda_1)^{\tilde{n}_1} \cdots (z - \lambda_k)^{\tilde{n}_k} \tilde{q}$ eine weitere solche Darstellung, d.h. $\tilde{n}_1, \dots, \tilde{n}_k \in \mathbb{N}$ und $\tilde{q} \in \mathbb{K}[z]$ Nullstellen-frei. O.B.d.A. sei $\tilde{n}_1 \geq n_1$. Wenden wir oben erwähnte Kürzungsregel mit $s = (z - \lambda_1)^{n_1}$ auf

$$(z - \lambda_1)^{n_1} \cdots (z - \lambda_k)^{n_k} q = p = (z - \lambda_1)^{\tilde{n}_1} \cdots (z - \lambda_k)^{\tilde{n}_k} \tilde{q}$$

an, so erhalten wir

$$(z-\lambda_2)^{n_2}\cdots(z-\lambda_k)^{n_k}q=(z-\lambda_1)^{\tilde n_1-n_1}(z-\lambda_2)^{\tilde n_2}\cdots(z-\lambda_k)^{\tilde n_k}\tilde q.$$

Da die linke Seite für $z=\lambda_1$ nicht verschwindet, muss dies auch für die rechte Seite gelten. Daraus folgt $\tilde n_1=n_1$ und dann

$$(z-\lambda_2)^{n_2}\cdots(z-\lambda_k)^{n_k}q=(z-\lambda_2)^{\tilde n_2}\cdots(z-\lambda_k)^{\tilde n_k}\tilde q.$$

Induktiv fortfahrend, erhalten wir $n_i=\tilde n_i$, für jedes i und schließlich $q=\tilde q$. □

VI.2.6. Definition (Algebraische Vielfachheit). Sei $0\neq p\in\mathbb{K}[z]$ ein Polynom vom Grad n und $p=(z-\lambda_1)^{n_1}\cdots(z-\lambda_k)^{n_k}q$ wie in Proposition VI.2.5. Dann wird n_i die *algebraische Vielfachheit* der Nullstelle λ_i genannt. Beachte, dass dies nach der Eindeutigkeitsaussage in Proposition VI.2.5 wohldefiniert ist.

Sei $0\neq p\in\mathbb{K}[z]$ ein Polynom vom Grad n. Nach Proposition VI.2.5 ist die Summe der algebraischen Vielfachheiten aller Nullstellen von p höchstens n. Dies wird oft auch so formuliert: p hat höchstens n Nullstellen, wenn diese entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden. Wir sagen das Polynom p *zerfällt (über* $\mathbb{K}$*) in Linearfaktoren,* wenn es sich in der Form

$$p=c(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_n) \tag{VI.10}$$

schreiben lässt, wobei $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ und $c\in\mathbb{K}$. Dies ist also genau dann der Fall, wenn das Polynom q in Proposition VI.2.5 konstant ist, d.h. wenn die Summe der algebraischen Vielfachheiten aller Nullstellen gleich n ist. Ein Polynom vom Grad n zerfällt daher in Linearfaktoren, wenn es genau n Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) besitzt. In diesem Fall ist die Darstellung (VI.10) bis auf Permutation der Linearfaktoren eindeutig, und $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, sind alle Nullstellen von p, wobei diese ihrer algebraischen Vielfachheit entsprechend oft auftreten.

VI.2.7. Beispiel. Betrachte das reelle Polynom $p\in\mathbb{R}[z]$,

$$p=z^6-5z^5+10z^4-12z^3+11z^2-7z+2.$$

Durch Erraten von Nullstellen und Polynomdivision erhalten wir

$$p=(z-1)^3(z-2)(z^2+1).$$

Das Polynom p hat daher zwei reelle Nullstellen, $\lambda_1=1$ mit Vielfachheit 3 und $\lambda_2=2$ mit Vielfachheit 1. Es zerfällt über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren, denn z^2+1 besitzt keine reelle Nullstelle. Fassen wir p als komplexes Polynom auf, $p\in\mathbb{C}[z]$, dann gilt

$$p=(z-1)^3(z-2)(z-\mathbf{i})(z+\mathbf{i}).$$

Über $\mathbb{C}$ zerfällt p daher in Linearfaktoren. Zu den bereits genannten reellen Nullstellen kommen nun noch zwei komplexe Nullstellen, $\lambda_3=\mathbf{i}$ und $\lambda_4=-\mathbf{i}$, jeweils mit Vielfachheit 1, hinzu.

VI.2.8. Definition (Algebraisch abgeschlossene Körper). Ein Körper $\mathbb{K}$ wird *algebraisch abgeschlossen* genannt, falls jedes nicht konstante Polynom $p \in \mathbb{K}[z]$ eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{K}$ besitzt, $p(\lambda) = 0$.

Aus Proposition VI.2.5 erhalten wir sofort:

VI.2.9. Proposition. *Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper zerfällt jedes nicht-triviale Polynom vom Grad n in Linearfaktoren und besitzt genau n Nullstellen, wenn diese ihrer Vielfachheit entsprechend oft gezählt werden.*

Der Körper $\mathbb{Q}$ ist nicht algebraisch abgeschlossen, denn das Polynom $p = z^2 - 2$ besitzt keine Nullstelle in $\mathbb{Q}$. Auch der Körper $\mathbb{R}$ ist nicht algebraisch abgeschlossen, denn das Polynom $p = z^2 + 1$ besitzt keine reelle Nullstelle.

VI.2.10. Satz (Fundamentalsatz der Algebra). *Der Körper $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.*

Beweis. Sei also $p = p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n$ ein komplexes Polynom, $p_i \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$ und $p_n \neq 0$. Es ist zu zeigen, dass $z \in \mathbb{C}$ existiert, für das $p(z) = 0$ gilt.

Wir leiten zunächst folgende Abschätzung her: Es existieren reelle Zahlen $0 < m \leq M$ und $R \geq 0$, sodass

$$m|z|^n \leq |p(z)| \leq M|z|^n, \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq R. \tag{VI.11}$$

Wir zeige, dass $m := |p_n|/2$, $M := \sum_{i=0}^n |p_i|$ und $R := \max\{1, 2M/|p_n|\}$ die gewünschte Eigenschaft haben. Sei dazu $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R$. Insbesondere gilt daher $|z| \geq 1$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir sofort:

$$|p(z)| = \Big|\sum_{i=0}^n p_i z^i\Big| \leq \sum_{i=0}^n |p_i||z^i| = \sum_{i=0}^n |p_i||z|^i \leq \sum_{i=0}^n |p_i||z|^n = M|z|^n.$$

Analog haben wir

$$\big|p_n z^n - p(z)\big| = \Big|-\sum_{i=0}^{n-1} p_i z^i\Big| = \Big|\sum_{i=0}^{n-1} p_i z^i\Big| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |p_i||z|^{n-1} \leq M|z|^{n-1} \leq \tfrac{|p_n|}{2}|z|^n,$$

wobei wir am Ende $|z| \geq R \geq 2M/|p_n|$, d.h. $M \leq \frac{|p_n|}{2}|z|$, verwendet haben. Zusammen mit der Dreiecksungleichung,

$$|p_n||z|^n = |p_n z^n| = |p_n z^n - p(z) + p(z)| \leq |p_n z^n - p(z)| + |p(z)|,$$

folgt daraus

$$|p(z)| \geq |p_n||z|^n - |p_n z^n - p(z)| \geq |p_n||z|^n - \tfrac{|p_n|}{2}|z|^n = \tfrac{|p_n|}{2}|z|^n = m|z|^n.$$

Damit ist also die Abschätzung (VI.11) gezeigt.

Daraus werden wir nun ableiten, dass $z_0 \in \mathbb{C}$ existiert, sodass

$$|p(z)| \geq |p(z_0)|, \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \tag{VI.12}$$

Dies bedeutet gerade, dass die stetige Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f(z) := |p(z)|$, ein globales Minimum besitzt. Sei dazu $\tilde{R} := \max\{R, \sqrt[n]{|p(0)|/m}\}$. Da die abgeschlossene Scheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \tilde{R}\}$ kompakt ist, nimmt f darauf ein Minimum an, d.h. es existiert $z_0 \in \mathbb{C}$, sodass

$$|p(z)| \geq |p(z_0)|, \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \leq \tilde{R}.$$

Es gilt aber auch

$$|p(z)| \geq |p(z_0)|, \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \geq \tilde{R},$$

denn für diese z folgt aus (VI.11): $|p(z)| \geq m|z|^n \geq m\tilde{R}^n \geq |p(0)| \geq |p(z_0)|$. Damit ist also (VI.12) bewiesen.

Wir werden nun $p(z_0) = 0$ zeigen, und damit den Beweis des Satzes abschließen. Wir gehen indirekt vor und nehmen $p(z_0) \neq 0$ an. Beachte, dass dann auch $\tilde{p}(z) = p(z + z_0)/p(z_0)$ ein nicht-konstantes Polynom vom Grad n darstellt, es ist daher von der Form

$$\tilde{p}(z) = 1 + \tilde{p}_k z^k + \cdots + \tilde{p}_n z^n,$$

wobei $k \geq 1$, $\tilde{p}_i \in \mathbb{C}$ und $\tilde{p}_k \neq 0$. Nach (VI.12) gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$:

$$|\tilde{p}(z)| = \frac{|p(z + z_0)|}{|p(z_0)|} \geq \frac{|p(z_0)|}{|p(z_0)|} = 1.$$

Sei nun $w \in \mathbb{C}$ mit $w^k = -1/\tilde{p}_k$,[5] und betrachte das Polynom $q(z) := \tilde{p}(wz)$. Nach Konstruktion ist q von der Form

$$q(z) = 1 - z^k + q_{k+1} z^{k+1} + \cdots + q_n z^n, \tag{VI.13}$$

wobei $q_i \in \mathbb{C}$. Aus der entsprechenden Eigenschaft von $\tilde{p}$ folgt sofort

$$|q(z)| \geq 1, \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \tag{VI.14}$$

Sei nun $C := \sum_{i=k+1}^{n} |q_i|$ und $\rho := \min\{1, 1/2C\}$. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \leq \rho$ gilt daher $|z| \leq 1$ und $C|z| \leq 1/2$, folglich

$$\left| q_{k+1} z^{k+1} + \cdots + q_n z^n \right| \leq \sum_{i=k+1}^{n} |q_i||z|^i \leq \sum_{i=k+1}^{n} |q_i||z|^{k+1} = C|z|^{k+1} \leq \tfrac{1}{2}|z|^k.$$

Zusammen mit (VI.13) erhalten wir aus der Dreiecksungleichung,

$$|q(z)| \leq |1 - z^k| + \tfrac{1}{2}|z|^k, \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| \leq \rho.$$

Für reelle $t \in (0, \rho]$ folgt daraus

$$|q(t)| \leq |1 - t^k| + \tfrac{1}{2}|t|^k = 1 - t^k + \tfrac{1}{2}t^k = 1 - \tfrac{1}{2}t^k < 1,$$

im Widerspruch zu (VI.14).

Da die Annahme $p(z_0) \neq 0$ auf einen Widerspruch führt, muss also $p(z_0) = 0$ gelten. Somit hat p eine Nullstelle und der Beweis ist vollständig. □

[5] Jedes $z \in \mathbb{C}$ besitzt eine k-te Wurzel, d.h. es existiert $w \in \mathbb{C}$ mit $w^k = z$. Schreiben wir $z = re^{\mathbf{i}\theta}$, wobei $r \geq 0$ und $\theta \in \mathbb{R}$, dann hat $w = \sqrt[k]{r}e^{\mathbf{i}\theta/k}$ die gewünschte Eigenschaft.

VI.2.11. Bemerkung (Algebraischer Abschluss). Zu jedem Körper $\mathbb{K}$ existiert ein algebraisch abgeschlossener Körper $\hat{\mathbb{K}}$, der $\mathbb{K}$ enthält und für den die Inklusion $\mathbb{K} \to \hat{\mathbb{K}}$ mit Addition und Multiplikation verträglich ist. Dieser, i.W. eindeutige, Körper $\hat{\mathbb{K}}$ wird der *algebraische Abschluss* von $\mathbb{K}$ genannt. Aus dem Fundamentalsatz der Algebra folgt, dass der Körper $\mathbb{C}$ mit dem algebraischen Abschluss des Körpers $\mathbb{R}$ übereinstimmt, in Zeichen: $\mathbb{C} = \hat{\mathbb{R}}$. Der algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$ ist der Körper der algebraischen Zahlen.

Wir kommen nun zur Definition des charakteristischen Polynoms einer quadratischen Matrix. Wir wollen jeder Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ein Polynom $p_A \in \mathbb{K}[z]$ zuordnen, sodass

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n),$$

für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$. Aus der Leibniz'schen Formel folgt sofort, dass $\lambda \mapsto \det(A-\lambda I_n)$ eine *Polynomfunktion* bildet, d.h. es existieren $p_i \in \mathbb{K}$ mit

$$\det(A - \lambda I_n) = p_0 + p_1\lambda + \cdots + p_n\lambda^n,$$

für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$. *Die Koeffizienten p_i sind durch diese Bedingung aber i.A. nicht eindeutig bestimmt, das Polynom p_A kann daher nicht einfach durch $p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n$ definiert werden!* Betrachten wir etwa den Körper $\mathbb{Z}_2$ und das Polynom $p = z + z^2 \in \mathbb{Z}_2[z]$, dann gilt $p(\lambda) = 0$, für jedes $\lambda \in \mathbb{Z}_2$, obwohl $0 \neq p \in \mathbb{Z}_2[z]$. Für unendliche Körper ist die Abbildung $\mathbb{K}[z] \to F(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, die einem Polynom p die Polynomfunktion $\lambda \mapsto p(\lambda)$ zuordnet, injektiv, siehe Korollar IV.6.27. Für unendliche Körper kann das charakteristische Polynom also durch $p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I_n)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, definiert werden, es ist dadurch eindeutig bestimmt. I.A. müssen wir vorsichtiger vorgehen.

Ist $P \in M_{n\times n}(\mathbb{K}[z])$ eine Matrix von Polynomen, dann definieren wir deren Determinante, $\det(P) \in \mathbb{K}[z]$, durch die Leibniz-Formel,

$$\det(P) := \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) P_{1,\sigma(1)} \cdots P_{n,\sigma(n)} \in \mathbb{K}[z],$$

wobei $P_{ij} \in \mathbb{K}[z]$ das Polynom in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von P bezeichnet. Aus Satz V.3.6 folgt

$$(\det(P))(\lambda) = \det(P(\lambda)), \qquad \lambda \in \mathbb{K}, \tag{VI.15}$$

wobei $P(\lambda) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ die Matrix mit Eintragungen $P(\lambda)_{ij} = P_{ij}(\lambda)$ bezeichnet. Für beliebige Matrizen von Polynomen, $P, Q \in M_{n\times n}(\mathbb{K}[z])$, gilt

$$\det(PQ) = \det(P)\det(Q) \in \mathbb{K}[z], \tag{VI.16}$$

wobei das Produkt von Polynommatrizen analog zum gewöhnlichen Matrizenprodukt definiert ist, $(PQ)_{ij} = \sum_k P_{ik}Q_{kj} \in \mathbb{K}[z]$. Über unendlichen Körpern folgt dies aus (VI.15), für beliebige Körper siehe Aufgabe 38. Beachte, dass auch $M_{n\times n}(\mathbb{K}[z])$ eine assoziative Algebra bildet. Indem wir Matrizen mit Eintragungen in $\mathbb{K}$ als Matrizen konstanter Polynome auffassen erhalten wir $M_{n\times n}(\mathbb{K}) \subseteq$

$M_{n\times n}(\mathbb{K}[z])$, und dies ist mit Addition, Skalarmultiplikation, Matrizenmultiplikation und der Determinante verträglich.

VI.2.12. Definition (Charakteristisches Polynom einer Matrix). Unter dem *charakteristischen Polynom* einer Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ verstehen wir das Polynom $p_A \in \mathbb{K}[z]$,

$$p_A := \det(A - zI_n) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma)(A - zI_n)_{1,\sigma(1)} \cdots (A - zI_n)_{n,\sigma(n)}. \tag{VI.17}$$

Dabei bezeichnet $(A - zI_n)_{ij} \in \mathbb{K}[z]$ das Polynom in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von $A - zI_n \in M_{n\times n}(\mathbb{K}[z])$. Für $i \neq j$ ist $(A - zI_n)_{ij} = A_{ij}$ ein konstantes Polynom und $(A - zI_n)_{ii} = A_{ii} - z$ hat Grad 1.

VI.2.13. Beispiel. Betrachte die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2)$ über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$. Für ihr charakteristische Polynom $p_A \in \mathbb{Z}_2[z]$ gilt

$$p_A = \det(A - zI_2) = \det\begin{pmatrix} 0 - z & 0 \\ 0 & 1 - z \end{pmatrix} = -z(1 - z) = z + z^2.$$

Beachte $p_A(\lambda) = 0$, für jedes $\lambda \in \mathbb{Z}_2$, denn $p_A(0) = 0+0^2 = 0$ und $p_A(1) = 1+1^2 = 0$. Das charakteristische Polynom ist jedoch nicht trivial, $0 \neq p_A \in \mathbb{Z}_2[z]$.

VI.2.14. Lemma. *Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Dann gilt:*

(a) $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$, für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.
(b) $\deg(p_A) = n$. Bezeichnen wir die Koeffizienten mit $p_A = p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n$, dann gilt $p_n = (-1)^n$, $p_{n-1} = (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A)$ und $p_0(A) = \det(A)$.
(c) $p_{S^{-1}AS} = p_A$, für jedes $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
(d) Ist $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$ und $C \in M_{(n+m)\times(n+m)}(\mathbb{K})$ eine Blockmatrix der Form $C = \left(\begin{smallmatrix} A & * \\ 0 & B \end{smallmatrix}\right)$, dann gilt $p_C = p_A p_B$.
(e) Für das charakteristische Polynom einer Dreiecksmatrix,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

gilt $p_D = (\lambda_1 - z)(\lambda_2 - z)\cdots(\lambda_n - z)$.

Beweis. Behauptung (a) folgt aus (VI.15), denn

$$p_A(\lambda) = \big(\det(A - zI_n)\big)(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Daraus erhalten wir auch $p_0 = p_A(0) = \det(A - 0I_n) = \det(A)$. Weiters hat

$$(A - zI_n)_{1,\sigma(1)} \cdots (A - zI_n)_{n,\sigma(n)}$$

höchstens Grad $n - 2$, falls $\mathrm{id} \neq \sigma \in \mathfrak{S}_n$. Für $\mathrm{id} = \sigma \in \mathfrak{S}_n$ gilt

$$(A - zI_n)_{1,\sigma(1)} \cdots (A - zI_n)_{n,\sigma(n)} = (-1)^n z^n + (-1)^{n-1}(A_{11} + \cdots + A_{nn})z^{n-1} + q,$$

wobei $q \in \mathbb{K}[z]$ und $\deg(q) \leq n-2$. Mit (VI.17) erhalten wir also $\deg(p_A) = n$, $p_n = (-1)^n$ und $p_{n-1} = (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A)$. Behauptung (c) folgt aus (VI.16), denn

$$\begin{aligned} p_{S^{-1}AS} = \det(S^{-1}AS - zI_n) &= \det\big(S^{-1}(A - zI_n)S\big) \\ &= \det(S)^{-1}\det(A - zI_n)\det(S) = \det(A - zI_n) = p_A. \end{aligned}$$

Um (d) einzusehen, beobachten wir zunächst, dass

$$(C - zI)_{1,\sigma(1)} \cdots (C - zI)_{n+m,\sigma(n+m)} = 0,$$

falls ein $i > n$ existert, für das $\sigma(i) \leq n$ gilt. In der Definition von p_C ist daher nur über jene Permutationen $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+m}$ zu summieren, für die $\sigma(\{n+1, \ldots, n+m\}) \subseteq \{n+1, \ldots, n+m\}$ gilt. Solche Permutationen müssen aber auch $\sigma(\{1, \ldots, n\}) \subseteq \{1, \ldots, n\}$ genügen und können daher mit $\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m$ identifiziert werden. Somit

$$\begin{aligned} p_C &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{n+m}} \operatorname{sgn}(\sigma)(C - zI)_{1,\sigma(1)} \cdots (C - zI)_{n+m,\sigma(n+m)} \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n, \pi \in \mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^n (C - zI)_{i,\tau(i)} \prod_{j=1}^m (C - zI)_{n+j,n+\pi(j)} \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n, \pi \in \mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn}(\tau)\operatorname{sgn}(\pi) \prod_{i=1}^n (A - zI)_{i,\tau(i)} \prod_{j=1}^m (B - zI)_{j,\pi(j)} \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^n (A - zI)_{i,\tau(i)} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_m} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{j=1}^m (B - zI)_{j,\pi(j)} = p_A p_B \end{aligned}$$

Behauptung (e) lässt sich mittels Induktion nach n aus (d) herleiten. Wir geben einen anderen, direkteren Beweis. Beachte, dass wegen der Dreiecksform von D offensichtlich $(D - zI_n)_{1,\sigma(1)} \cdots (D - zI_n)_{n,\sigma(n)} = 0$, für jedes $\mathrm{id} \neq \sigma \in \mathfrak{S}_n$. Aus (VI.17) folgt daher

$$p_D = (D - zI_n)_{11} \cdots (D - zI_n)_{nn} = (\lambda_1 - z) \cdots (\lambda_n - z),$$

womit auch (e) gezeigt wäre. □

VI.2.15. Bemerkung. Nach Lemma VI.2.14(c) haben ähnliche Matrizen das selbe charakteristische Polynom, d.h. jeder Koeffizient p_i des charakteristischen Polynoms $p_A = p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n$ einer Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bleibt unverändert, wenn wir A durch eine ähnliche Matrix $B = S^{-1}AS$, $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ersetzen. Für die Koeffizienten p_{n-1} und p_0 bedeutet dies gerade $\operatorname{tr}(S^{-1}AS) = \operatorname{tr}(A)$ bzw. $\det(S^{-1}AS) = \det(A)$, vgl. Lemma VI.2.14(b).

VI.2.16. Definition (Charakteristisches Polynom eines Endomorphismus). Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Unter dem *charakteristischen Polynom von φ* verstehen wir das charakteristische Polynom der Matrix $[\varphi]_{BB}$, wobei B eine geordnete Basis von V bezeichnet. Beachte, dass dies nach Lemma VI.2.14(c) nicht von der Basis B abhängt und daher wohldefiniert ist. Wir bezeichnen das charakteristische Polynom von φ mit $p_\varphi \in \mathbb{K}[z]$.

VI.2.17. Bemerkung. Ist $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und bezeichnet $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $\varphi(x) = Ax$, die damit assoziierte lineare Abbildung, dann gilt $p_\varphi = p_A$, denn bezüglich der Standardbasis B von $\mathbb{K}^n$ gilt $[\varphi]_{BB} = A$.

VI.2.18. Proposition. *Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ linear und $p_\varphi \in \mathbb{K}[z]$ das charakteristische Polynom von φ. Dann gilt:*

(a) $p_\varphi(\lambda) = \det(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)$, für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.
(b) Die Eigenwerte von φ sind genau die Nullstellen von p_φ, für das Spektrum von φ gilt daher: $\sigma(\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{K} : p_\varphi(\lambda) = 0\}$.
(c) $\deg(p_\varphi) = n$. Bezeichnen wir die Koeffizienten mit $p_\varphi = p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n$, dann gilt $p_n = (-1)^n$, $p_{n-1} = (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(\varphi)$ und $p_0 = \det(\varphi)$.
(d) $p_{\psi^{-1}\varphi\psi} = p_\varphi$, für jeden linearen Isomorphismus $\psi\colon W \to V$.
(e) $p_{\lambda\,\mathrm{id}_V} = (\lambda - z)^n$, für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$.
(f) Sei W ein Teilraum von V, sodass $\varphi(W) \subseteq W$. Bezeichnet $\varphi|_W\colon W \to W$ die Einschränkung und $\bar\varphi\colon V/W \to V/W$, $\bar\varphi([v]) = [\varphi(v)]$ die induzierte lineare Abbildung auf dem Quotientenraum, dann gilt $p_\varphi = p_{\varphi|_W} p_{\bar\varphi}$.

Beweis. Behauptung (a) folgt sofort aus Lemma VI.2.14(a). Ist nämlich B eine Basis von V und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt

$$p_\varphi(\lambda) = p_{[\varphi]_{BB}}(\lambda) = \det([\varphi]_{BB} - \lambda I_n) = \det\bigl([\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V]_{BB}\bigr) = \det(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V).$$

Zusammen mit Proposition VI.1.3 erhalten wir daraus auch (b). Aussagen (c) folgt aus Lemma VI.2.14(b), denn $\det([\varphi]_{BB}) = \det(\varphi)$ und $\operatorname{tr}([\varphi]_{BB}) = \operatorname{tr}(\varphi)$, vgl. Aufgabe 23. Behauptung (d) folgt aus Lemma VI.2.14(c), denn für jede Basis C von W ist $S := [\psi]_{BC} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $[\psi^{-1}\varphi\psi]_{CC} = [\psi]_{CB}[\varphi]_{BB}[\psi]_{BC} = S^{-1}[\varphi]_{BB}S$, also

$$p_{\psi^{-1}\varphi\psi} = p_{[\psi^{-1}\varphi\psi]_{CC}} = p_{S^{-1}[\varphi]_{BB}S} = p_{[\varphi]_{BB}} = p_\varphi.$$

Behauputng (e) folgt aus Lemma VI.2.14(e), denn $[\lambda\,\mathrm{id}_V]_{BB} = \lambda I_n$, also $p_{\lambda\,\mathrm{id}_V} = p_{[\lambda\,\mathrm{id}_V]_{BB}} = p_{\lambda I_n} = (\lambda - z)^n$. Es bleibt daher nur noch (f) zu zeigen. Wir wählen dazu eine Basis $B' = (b_1, \dots, b_m)$ von W und ergänzen sie zu einer Basis $B = (b_1, \dots, b_m, b_{m+1}, \dots, b_n)$ von V. Bezeichnet $\pi\colon V \to V/W$ die kanonische Projektion, dann bildet $\bar B := (\pi(b_{m+1}), \dots, \pi(b_n))$ eine Basis von V/W, siehe Korollar II.6.7, und es gilt:

$$[\varphi]_{BB} = \begin{pmatrix} [\varphi|_W]_{B'B'} & * \\ 0 & [\bar\varphi]_{\bar B\bar B} \end{pmatrix}. \tag{VI.18}$$

Um dies einzusehen beginnen wir mit der Definition der Matrix $[\varphi]_{BB}$,

$$\varphi(b_j) = \sum_{i=1}^n ([\varphi]_{BB})_{ij} b_i. \tag{VI.19}$$

Für $j \leq m$ ist $b_j \in W$ und nach Voraussetzung an φ daher auch $\varphi(b_j) \in W$. Daraus folgt

$$([\varphi]_{BB})_{ij} = \begin{cases} ([\varphi|_W]_{B'B'})_{ij} & \text{für } j \leq m \text{ und } i \leq m \\ 0 & \text{für } j \leq m \text{ und } i > m. \end{cases}$$

Dies erklärt die linken beiden Blöcke in (VI.18). Sei nun $j > m$. Wenden wir auf (VI.19) die Projektion $\pi\colon V \to V/W$ an, so folgt

$$\bar{\varphi}(\pi(b_j)) = \pi(\varphi(b_j)) = \sum_{i=1}^{n}([\varphi]_{BB})_{ij}\pi(b_i) = \sum_{i=m+1}^{n}([\varphi]_{BB})_{ij}\pi(b_i),$$

denn $\pi(b_i) = 0$, für alle $i \leq m$. Daraus erhalten wir $([\varphi]_{BB})_{ij} = ([\bar{\varphi}]_{\bar{B}\bar{B}})_{i-m,j-m}$ für alle $i, j > m$, also den rechten unteren Block in (VI.18). Mit Lemma VI.2.14(d) erhalten wir aus (VI.18) nun $p_\varphi = p_{[\varphi]_{BB}} = p_{[\varphi|_W]_{B'B'}} p_{[\bar{\varphi}]_{\bar{B}\bar{B}}} = p_{\varphi|_W} p_{\bar{\varphi}}$. □

VI.2.19. Definition (Algebraische Vielfachheit von Eigenwerten). Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Unter der *algebraischen Vielfachheit* eines Eigenwerts λ von φ verstehen wir die Vielfachheit der Nullstelle λ des charakteristsichen Polynoms p_φ, vgl. Proposition VI.2.18(b). Für Matrizen $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ definieren wir die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte über die assoziierte lineare Abbildung, $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $x \mapsto Ax$. Offensichtlich stimmt dies mit der algebraischen Vielfachheit der Nullstelle λ von p_A überein.

VI.2.20. Beispiel. Algebraische und geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts sind i.A. verschieden. Betrachte dazu die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

mit charakteristischen Polynom $p_A = (3-z)^2(5-z)^2$. Diese Matrix hat zwei Eigenwerte, $\lambda_1 = 3$ und $\lambda_2 = 5$. Beide haben algebraische Vielfachheit 2. Auch die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_1 = 3$ ist 2, denn der zugehörige Eigenraum wird von den beiden Einheitsvektoren e_1 und e_2 aufgespannt, $E_{\lambda_1} = \ker(A - 3I_4) = \langle e_1, e_2\rangle$. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda_2 = 5$ ist allerdings nur 1, denn der entsprechende Eigenraum $\ker(A - 5I_4) = \langle e_3\rangle$ ist 1-dimensional.

VI.2.21. Proposition. *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Dann ist die algebraische Vielfachheit jedes Eigenwerts von φ mindestens so groß wie seine geometrische Vielfachheit.*

Beweis. Sei λ ein Eigenwert von φ, bezeichne $W = \ker(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ den entsprechenden Eigenraum und $m = \dim(W)$ die geometrische Vielfachheit von λ.

Es gilt daher $\varphi|_W = \lambda\,\mathrm{id}_W$, insbesondere ist W invariant unter φ. Es bezeichne $\bar\varphi\colon V/W \to V/W$, $\bar\varphi([v]) = [\varphi(v)]$, die induzierte lineare Abbildung. Nach Proposition VI.2.18(e)&(f) gilt für die charakteristischen Polynome

$$p_\varphi = p_{\varphi|_W} p_{\bar\varphi} = (\lambda - z)^m p_{\bar\varphi},$$

die algebraische Vielfachheit von λ ist daher mindestens m. □

Aus der vorangehenden Proposition folgt sofort, dass auch für quadratische Matrizen die algebraische Vielfachheit jedes Eigenwerts mindestens so groß wie seine geometrische Vielfachheit ist.

VI.2.22. Satz. *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn ihr charakteristisches Polynom über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren zerfällt und die algebraische Vielfachheit jedes Eigenwerts mit seiner geometrischen Vielfachheit übereinstimmt.*

Beweis. Es bezeichne p das charakteristische Polynom von φ. Zerfällt p in Linearfaktoren, dann stimmt die Summe der algebraischen Vielfachheiten aller Nullstellen von p mit $\deg(p) = \dim(V)$ überein. Somit ist die Summe der algebraischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von φ gleich $\dim(V)$. Stimmen darüber hinaus die algebraischen mit den geometrischen Vielfachheit überein, dann ist also auch die Summe der geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte gleich $\dim(V)$. Nach Satz VI.1.18 ist φ in diesem Fall diagonalisierbar. Die umgekehrte Implikation folgt sofort aus Lemma VI.2.14(e). □

VI.2.23. Definition (Triangulierbarkeit). Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ wird *triangulierbar* genannt, falls eine geordnete Basis B von V existiert, sodass die Matrixdarstellugn von φ bezüglich B obere Dreiecksgestalt hat, d.h.

$$[\varphi]_{BB} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Eine quadratische Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ wird triangulierbar genannt, wenn die damit assoziierte lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $x \mapsto Ax$, triangulierbar ist.

Eine quadratische Matrix ist genau dann triangulierbar, wenn sie ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ ist genau dann triangulierbar wenn ihre Matrixdarstellug bezüglich einer (und dann jeder) Basis triangulierbar ist. Offensichtlich ist jede diagonalisierbare lineare Abbildung auch triangulierbar. Umgekehrt muss eine triangulierbare Abbildung bzw. Matrix nicht diagonalisierbar sein. Beispielsweise ist die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ triangulierbar aber nicht diagonalisierbar, vgl. Beispiel VI.1.12. Nicht jede Matrix ist triangulierbar. Etwa hat die reelle Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ keinen einzigen reellen Eigenwert und kann daher über $\mathbb{R}$ nicht triangulierbar sein.

VI.2.24. Satz. *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ ist genau dann triangulierbar, wenn ihr charakteristisches Polynom über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren zerfällt.*

Beweis. Aus Lemma VI.2.14(e) folgt sofort, dass das charakteristische Polynom einer triangulierbaren Matrix in Linearfaktoren zerfällt. Für die umgekehrte Implikation sei nun φ eine lineare Abbildung, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Wir werden nun mittels Induktion nach der Dimension von V zeigen, dass φ triangulierbar ist. Der Induktionsanfang, $\dim(V) = 1$, ist trivial, denn jede 1×1-Matrix hat obere Dreiecksgestalt. Für den Induktionsschritt sei nun $\dim(V) \geq 2$. Da das charakteristische Polynom p_φ in Linearfaktoren zerfällt, existiert eine Nullstelle $\lambda \in \mathbb{K}$, d.h. $p_\varphi(\lambda) = 0$. Nach Proposition VI.2.18(b) ist λ Eigenwert von φ. Sei $0 \neq b_1 \in V$ ein entsprechender Eigenvektor, d.h. $\varphi(b_1) = \lambda_1 b_1$, und bezeichne $W := \langle b_1 \rangle$ den davon aufgespannten 1-dimensionalen Teilraum. Nach Proposition VI.2.18(f) gilt

$$p_\varphi = p_{\varphi|_W} p_{\bar\varphi} = (\lambda - z) p_{\bar\varphi},$$

wobei $p_{\bar\varphi}$ das charakteristische Polynom der linearen Abbildung $\bar\varphi\colon V/W \to V/W$, $\bar\varphi([v]) = [\varphi(v)]$, bezeichnet. Daraus schließen wir, dass auch $p_{\bar\varphi}$ in Linearfaktoren zerfällt. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\bar\varphi$ also triangulierbar, denn $\dim(V/W) = \dim(V) - 1 < \dim(V)$. Es existiert daher eine geordnete Basis $\bar B = (\bar b_2, \dots, \bar b_n)$ von V/W, sodass $[\bar\varphi]_{\bar B\bar B}$ obere Dreiecksgestalt hat:

$$[\bar\varphi]_{\bar B\bar B} = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{pmatrix}.$$

Wählen wir $b_2, \dots, b_n \in V$ mit $[b_i] = \bar b_i$, dann bildet $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ eine Basis von V, siehe Korollar II.6.7. Nach Konstruktion hat $[\varphi]_{BB}$ die Form

$$[\varphi]_{BB} = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & [\bar\varphi]_{\bar B\bar B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ & * & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & * \end{pmatrix},$$

denn $\varphi(b_1) = \lambda b_1 + 0b_2 + \cdots + 0b_n$ und, für $j \geq 2$,

$$\bar\varphi(\bar b_j) = \bar\varphi([b_j]) = [\varphi(b_j)] = \Big[\sum_{i=1}^n ([\varphi]_{BB})_{ij} b_i\Big] = \sum_{i=1}^n ([\varphi]_{BB})_{ij}[b_i] = \sum_{i=2}^n ([\varphi]_{BB})_{ij} \bar b_i,$$

da $[b_1] = 0 \in V/W$, folglich $([\varphi]_{BB})_{ij} = ([\bar\varphi]_{\bar B\bar B})_{i-1,j-1}$, für alle $i, j \geq 2$. Somit ist φ also triangulierbar. □

VI.2.25. KOROLLAR. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, d.h.*

$$p_\varphi = p_0 + p_1 z + \cdots + p_n z^n = (\lambda_1 - z)\cdots(\lambda_n - z), \tag{VI.20}$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von φ bezeichnen und ihrer algebraischen Vielfachheit entsprechend oft aufgelistet sind. Dann gilt

$$\sigma(q(\varphi)) = q(\sigma(\varphi))$$

für jedes Polynom $q \in \mathbb{K}[z]$. Weiters ist

$$(-1)^{n-j} p_{n-j} = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_j \le n} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_j},$$

für jedes $1 \le j \le n$. Insbesondere gilt

$$\operatorname{tr}(\varphi) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \quad \textit{und} \quad \det(\varphi) = \lambda_1 \cdots \lambda_n,$$

d.h. die Summe der Eigenwerte stimmt mit der Spur überein und ihr Produkt liefert die Determinante.

BEWEIS. Nach Satz VI.2.24 ist φ triangulierbar. Die erste Behauptung über das Spektrum von $q(\varphi)$ folgt daher aus Proposition VI.1.23. Die Formeln für p_j erhalten wir durch Ausmultiplizieren der rechten Seite von (VI.20). Für $j = n$ erhalten wir daraus $\det(\varphi) = p_0 = \lambda_1 \cdots \lambda_n$, und für $j = 1$ auch $\operatorname{tr}(\varphi) = (-1)^{n-1} p_{n-1} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$, vgl. Proposition VI.2.18(c). Diese Formeln für die Spur und die Determinante lassen sich, nach Wahl einer Basis in der φ obere Dreiecksgestalt hat, auch direkt ablesen, denn bezüglich einer solchen Basis stimmen die Diagonaleinträge mit den Eigenwerten überein. □

Für algebraisch abgeschlossene Körper erhalten wir daher:

VI.2.26. KOROLLAR. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{K}$. Dann ist jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ triangulierbar. Weiters gilt $\sigma(q(\varphi)) = q(\sigma(\varphi))$, für jedes Polynom $q \in \mathbb{K}[z]$. Bezeichnen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von φ, ihrer algebraischen Vielfachheit entsprechend oft angeführt, dann gilt* $\operatorname{tr}(\varphi) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ *sowie* $\det(\varphi) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$.

VI.3. Jordan'sche Normalform. Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Nach Satz VI.2.24 ist φ daher triangulierbar, d.h. es existiert eine Basis B von V, sodass $[\varphi]_{BB}$ obere Dreiecksgestalt hat. In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass sich die Matrix $[\varphi]_{BB}$ durch geschickte Wahl der Basis B noch erheblich vereinfachen lässt. Wie wir bereits weiter oben am Beispiel $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ beobachtet haben, wird φ i.A. nicht diagonalisierbar sein, d.h. es ist nicht immer möglich $[\varphi]_{BB}$ auf Diagonalgestalt zu bringen. Wir beginnen mit der sogenannten Primärzerlegung.