VI.3.1. Definition (Verallgemeinerte Eigenräume). Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ linear und λ ein Eigenwert von φ. Unter dem *verallgemeinerten Eigenraum* von φ zum Eigenwert λ verstehen wir den Teilraum

$$\tilde{E}_\lambda := \big\{v \in V \bigm| \exists N \in \mathbb{N} : (\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)^N(v) = 0\big\} = \bigcup_{N\geq 1} \ker\big((\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)^N\big).$$

Beachte, dass $\tilde{E}_\lambda$ wegen der offensichtlichen Inklusionen $\ker\big((\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)^N\big) \subseteq \ker\big((\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)^{N+1}\big)$ tatsächlich einen Teilraum von V bildet, der den Eigenraum zum Eigenwert λ enthält, $E_\lambda \subseteq \tilde{E}_\lambda$. Unter den verallgemeinerten Eigenräumen einer Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ verstehen wir die verallgemeinerten Eigenräume der damit assoziierten linearen Abbildung, $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $x \mapsto Ax$.

VI.3.2. Beispiel. Die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

hat charakteristisches Polynom $p = (5-z)^3$ und daher nur einen Eigenwert, $\lambda = 5$, mit algebraischer Vielfachheit 3. Der entsprechende Eigenraum, $E_5 = \ker(A - 5I) = \langle e_1\rangle$, ist ein dimensional. Da

$$A - 5I_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad (A-5I_3)^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad (A-5I_3)^3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),$$

ist der verallgemeinerte Eigenraum, $\tilde{E}_5 = \ker((A-5)^3) = \mathbb{K}^3$, echt größer als E_5.

VI.3.3. Beispiel. Die reelle Matrix

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & & & & \\ & 3 & 0 & & & \\ & & 3 & 1 & & \\ & & & 3 & 0 & \\ & & & & 5 & 0 \\ & & & & & 5 \end{smallmatrix}\right)$$

hat charakteristisches Polynom $p = (3-z)^4(5-z)^2$, also zwei Eigenwerte, nämlich $\lambda_1 = 3$ mit algebraischer Vielfachheit 4 und $\lambda_2 = 5$ mit algebraischer Vielfachheit 2. Aus

$$A - 3I_5 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & 2 & 0 \\ & & & & & 2 \end{smallmatrix}\right), \quad (A-3I_5)^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & & & & \\ & 0 & 0 & & & \\ & & 0 & 0 & & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & 4 & 0 \\ & & & & & 4 \end{smallmatrix}\right),$$

erhalten wir $E_3 = \ker(A-3I) = \langle e_1, e_3\rangle$ und $\tilde{E}_3 = \ker\big((A-3I)^2\big) = \langle e_1, e_2, e_3, e_4\rangle$, der verallgemeinerte Eigenraum ist daher echt größer als der Eigenraum. Ebenso,

$$A - 5I_5 = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 1 & & & & \\ & -2 & 0 & & & \\ & & -2 & 1 & & \\ & & & -2 & & \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad (A-5I_5)^2 = \left(\begin{smallmatrix} 4 & * & & & & \\ & 4 & 0 & & & \\ & & 4 & * & & \\ & & & 4 & & \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{smallmatrix}\right),$$

und daher $E_5 = \tilde{E}_5 = \ker(A - 5I) = \langle e_5, e_6\rangle$, für diesen Eigenwert stimmt der verallgemeinerte Eigenraum also mit dem Eigenraum überein.

Wir untersuchen zunächst verallgemeinerte Eigenräume zum Eigenwert 0.

VI.3.4. Lemma. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $\varphi\colon V \to V$ linear. Dann existiert $N \in \{0, \dots, n\}$, sodass*

$$\ker(\varphi^N) = \ker(\varphi^{N+1}).$$

Es gilt dann für jedes $k \in \mathbb{N}$,

$$\ker(\varphi^N) = \ker(\varphi^{N+k}) \quad \textit{und} \quad \operatorname{img}(\varphi^N) = \operatorname{img}(\varphi^{N+k}).$$

Darüber hinaus gilt

$$V = \ker(\varphi^N) \oplus \operatorname{img}(\varphi^N),$$

und diese Zerlegung ist invariant unter φ, d.h.

$$\varphi\big(\ker(\varphi^N)\big) \subseteq \ker(\varphi^N) \quad \textit{und} \quad \varphi\big(\operatorname{img}(\varphi^N)\big) \subseteq \operatorname{img}(\varphi^N).$$

Weiters ist die Einschräkung $\varphi|_{\ker(\varphi^N)}\colon \ker(\varphi^N) \to \ker(\varphi^N)$ triangulierbar mit 0 als einzigem Eigenwert, und die Einschränkung $\varphi|_{\operatorname{img}(\varphi^N)}\colon \operatorname{img}(\varphi^N) \to \operatorname{img}(\varphi^N)$ ist invertierbar. Bezeichnet m die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 0 von φ, so ist

$$\dim\big(\ker(\varphi^N)\big) = m, \quad \ker(\varphi^N) = \ker(\varphi^m) \quad \textit{und} \quad \operatorname{img}(\varphi^N) = \operatorname{img}(\varphi^m).$$

Schließlich existiert eine Basis B von V, sodass

$$[\varphi]_{BB} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m\times m}(\mathbb{K}), \quad C \in \mathrm{GL}_{n-m}(\mathbb{K}).$$

Beweis. Betrachte die aufsteigende Kette von Teilräumen:

$$\{0\} = \ker(\mathrm{id}_V) = \ker(\varphi^0) \subseteq \ker(\varphi^1) \subseteq \ker(\varphi^2) \subseteq \cdots \subseteq \ker(\varphi^n) \subseteq \ker(\varphi^{n+1}) \subseteq V.$$

Indirekt angenommen $\ker(\varphi^N) \neq \ker(\varphi^{N+1})$, für alle $N \in \{0, \dots, n\}$. Dann gilt

$$\dim\ker(\varphi^N) < \dim\ker(\varphi^{N+1}), \qquad N = 0, 1, \dots, n,$$

wir erhalten

$$0 = \dim\ker\varphi^0 < \dim\ker\varphi^1 < \dim\ker\varphi^2 < \cdots < \dim\ker\varphi^n < \dim\ker\varphi^{n+1},$$

und somit $\dim\ker(\varphi^{n+1}) \geq n + 1$. Da dies $\dim\ker(\varphi^{n+1}) \leq \dim(V) = n$ widerspricht, muss also ein $N \in \{0, \dots, n\}$ mit $\ker(\varphi^N) = \ker(\varphi^{N+1})$ existieren.

Wir zeigen nun $\ker(\varphi^N) = \ker(\varphi^{N+k})$ mittels Induktion nach k. Der Induktionsanfang, $k = 0$, ist trivial. Für den Induktionsschritt sei nun $k \geq 1$. Da offensichtlich $\ker(\varphi^N) \subseteq \ker(\varphi^{N+k})$, genügt es die umgekehrte Inklusion,

$$\ker(\varphi^N) \supseteq \ker(\varphi^{N+k}),$$

zu zeigen. Sei dazu $v \in \ker(\varphi^{N+k})$. Dann gilt $\varphi^{N+1}(\varphi^{k-1}(v)) = \varphi^{N+k}(v) = 0$, also $\varphi^{k-1}(v) \in \ker(\varphi^{N+1}) = \ker(\varphi^N)$ und daher $v \in \ker(\varphi^{N+k-1}) = \ker(\varphi^N)$, wobei wir im letzten Gleichheitszeichen, die Induktionsvoraussetzung verwendet haben. Damit ist $\ker(\varphi^N) = \ker(\varphi^{N+k})$ gezeigt. Insbesondere gilt

$$\dim(\ker(\varphi^N)) = \dim(\ker(\varphi^{N+k}))$$

und wegen der Dimensionsformel, $\dim(V) = \dim(\ker(\varphi^l)) + \dim(\mathrm{img}(\varphi^l))$, auch

$$\dim(\mathrm{img}(\varphi^N)) = \dim(\mathrm{img}(\varphi^{N+k}))$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Da $\mathrm{img}(\varphi^{N+k}) \subseteq \mathrm{img}(\varphi^N)$ folgt $\mathrm{img}(\varphi^N) = \mathrm{img}(\varphi^{N+k})$.

Wir zeigen nun

$$\ker(\varphi^N) \cap \mathrm{img}(\varphi^N) = \{0\}. \tag{VI.21}$$

Sei dazu $v \in \ker(\varphi^N) \cap \mathrm{img}(\varphi^N)$. Dann existiert $w \in V$, sodass $v = \varphi^N(w)$. Somit $\varphi^{N+N}(w) = \varphi^N(v) = 0$, also $w \in \ker(\varphi^{N+N}) = \ker(\varphi^N)$. Dies bedeutet $v = \varphi^N(w) = 0$. Damit ist (VI.21) gezeigt. Zusammen mit der Dimensionsformel

$$\dim(V) = \dim(\ker(\varphi^N)) + \dim(\mathrm{img}(\varphi^N))$$

folgt, dass V direkte Summe der Teilräume $\ker(\varphi^N)$ und $\mathrm{img}(\varphi^N)$ ist. Die Invarianz der Zerlegung ist offensichtlich, denn $\varphi(\ker(\varphi^N)) \subseteq \ker(\varphi^{N-1}) \subseteq \ker(\varphi^N)$ und $\varphi(\mathrm{img}(\varphi^N)) = \mathrm{img}(\varphi^{N+1}) = \mathrm{img}(\varphi^N)$. Daraus folgt auch, dass die Einschränkung $\varphi|_{\mathrm{img}(\varphi^N)} \colon \mathrm{img}(\varphi^N) \to \mathrm{img}(\varphi^N)$ surjektiv, also invertierbar ist. Wähle eine Basis $b_1, \dots, b_{k_1}$ von $\ker(\varphi)$, ergänze sie zu einer Basis $b_1, \dots, b_{k_1}, \dots, b_{k_2}$ von $\ker(\varphi^2)$, ergänze weiter zu einer Basis $b_1, \dots, b_{k_1}, \dots, b_{k_2}, \dots, b_{k_3}$ von $\ker(\varphi^3)$, u.s.w. bis wir bei einer Basis $\tilde{B} := (b_1, \dots, b_k)$ von $\ker(\varphi^N)$ angelangt sind, wobei $k := \dim(\ker(\varphi^N))$. Bezüglich dieser Basis hat $\varphi|_{\ker(\varphi^N)}$ folgende Blockdiagonalgestalt:

$$A := [\varphi|_{\ker(\varphi^N)}]_{\tilde{B}\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{k\times k}(\mathbb{K}). \tag{VI.22}$$

Dies zeigt, dass die Einschränkung $\varphi|_{\ker(\varphi^N)}$ triangulierbar ist mit 0 als einzigem Eigenwert. Sei nun $b_{k+1}, \dots, b_n$ eine Basis von $\mathrm{img}(\varphi^N)$, und betrachte die Basis $B := (b_1, \dots, b_n)$ von V. Da φ auf $\mathrm{img}(\varphi^N)$ invertierbar ist, gilt

$$[\varphi]_{BB} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

mit obigem A und $C \in \mathrm{GL}_{n-k}(\mathbb{K})$. Insbesondere ist 0 nicht Eigenwert von C. Nach Lemma VI.2.14(d) gilt $p_\varphi = p_A p_C$, also muss der Eigenwert 0 von A algebraische Vielfachheit m haben, und wir erhalten $k = m$, vgl. (VI.22). Daraus folgt nun auch $A^m = 0$, also $[\varphi^m]_{BB} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C^m \end{smallmatrix}\right)$ mit $C^m \in \mathrm{GL}_{n-m}(\mathbb{K})$. Daraus lesen wir $\ker(\varphi^N) = \ker(\varphi^m)$ und $\mathrm{img}(\varphi^N) = \mathrm{img}(\varphi^m)$ ab. Damit ist der Beweis des Lemmas vollständig. □

Aus dem vorangehenden Lemma erhalten wir sofort eine analoge Aussage über verallgemeinerte Eigenräume zu beliebigen Eigenwerten:

VI.3.5. LEMMA. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $\varphi\colon V \to V$ linear. Weiters sei λ Eigenwert von φ mit algebraischer Vielfachheit m und verallgemeinerten Eigenraum $\tilde{E}_\lambda$. Dann gilt*

$$\dim(\tilde{E}_\lambda) = m \quad \textit{und} \quad \tilde{E}_\lambda = \ker\big((\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)^m\big).$$

Weiters existiert ein invarianter komplementärer Teilraum W, d.h.

$$V = \tilde{E}_\lambda \oplus W, \qquad \varphi(\tilde{E}_\lambda) \subseteq \tilde{E}_\lambda, \qquad \varphi(W) \subseteq W.$$

Darüber hinaus ist die Einschränkung $\varphi|_{\tilde{E}_\lambda}\colon \tilde{E}_\lambda \to \tilde{E}_\lambda$ triangulierbar mit λ als einzigen Eigenwert, und λ ist kein Eigenwert der Einschräkung $\varphi|_W\colon W \to W$, d.h.

$$\sigma(\varphi|_{\tilde{E}_\lambda}) = \{\lambda\} \qquad \textit{und} \qquad \sigma(\varphi|_W) = \sigma(\varphi) \setminus \{\lambda\}.$$

Schließlich existiert eine Basis B von V, sodass

$$[\varphi]_{BB} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_{m\times m}(\mathbb{K}), \tag{VI.23}$$

und $C \in M_{(n-m)\times(n-m)}(\mathbb{K})$ mit $\sigma(C) = \sigma(\varphi) \setminus \{\lambda\}$.

BEWEIS. Beachte, dass 0 Eigenwert der linearen Abbildung

$$\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V\colon V \to V$$

ist und algebraische Vielfachheit m besitzt. Wenden wir Lemma VI.3.4 auf diese lineare Abbildung an, so folgt $\dim(\tilde{E}_\lambda) = m$, $\tilde{E}_\lambda = \ker\big((\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)^m\big)$, und der Teilraum $W := \mathrm{img}\big((\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)^m\big)$ bildet ein Komplement,

$$V = \tilde{E}_\lambda \oplus W.$$

Da beide Teilräume unter $\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V$ invariant sind, sind sie auch invariant unter φ, d.h. $\varphi(\tilde{E}_\lambda) \subseteq \tilde{E}_\lambda$ und $\varphi(W) \subseteq W$. Nach Lemma ist $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)|_{\tilde{E}_\lambda}$ triangulierbar mit 0 als einzigen Eigenwert. Somit ist auch $\varphi|_{\tilde{E}_\lambda}$ triangulierbar mit λ als einzigen Eigenwert, insbesondere gilt $\sigma(\varphi|_{\tilde{E}_\lambda}) = \{\lambda\}$. Nach Lemma ist $(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)|_W$ invertierbar, folglich ist λ kein Eigenwert von $\varphi|_W$, d.h. $\lambda \notin \sigma(\varphi|_W)$. Aus der Invarianz der Zerlegung folgt $\sigma(\varphi) = \sigma(\varphi|_{\tilde{E}_\lambda}) \cup \sigma(\varphi|_W)$, also $\sigma(\varphi|_W) = \sigma(\varphi) \setminus \{\lambda\}$. Sei nun B eine Basis von V wie in Lemma VI.3.4, d.h.

$$[\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V]_{BB} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & \tilde{C} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{m\times m}(\mathbb{K}),$$

und $\tilde{C} \in \mathrm{GL}_{n-m}(\mathbb{K})$. Dann hat $[\varphi]_{BB}$ die Form (VI.23), wobei $A = \tilde{A} + \lambda I_m$ und $C = \tilde{C} + \lambda I_{n-m}$. □

VI.3.6. Bemerkung. Betrachte nochmals die Matrix A aus Beispiel VI.3.3. Sie hat $\lambda = 3$ als Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 4. Nach dem vorangehenden Lemma muss $\tilde{E}_3 = \ker\big((A - 3I)^4\big)$ gelten. Weiter oben haben wir gesehen, dass in diesem Fall sogar $\tilde{E}_3 = \ker\big((A - 3I)^2\big)$ gilt. I.A. ist daher die algebraische Vielfachheit, m, eines Eigenwerts λ, nicht die minimale Zahl mit $\tilde{E}_\lambda = \ker\big((A - \lambda I)^m\big)$.

VI.3.7. Satz (Primärzerlegung). *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $\varphi\colon V \to V$ linear. Weiters bezeichnen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ alle (paarweise verschiedenen) Eigenwerte, $m_1, \dots, m_k$ ihre algebraischen Vielfachheiten und $\tilde{E}_{\lambda_1}, \dots, \tilde{E}_{\lambda_k}$ die entsprechenden verallgemeinerten Eigenräume. Dann gilt*

$$\dim(\tilde{E}_{\lambda_i}) = m_i \qquad \textit{und} \qquad \tilde{E}_{\lambda_i} = \ker\big((\varphi - \lambda_i \,\mathrm{id}_V)^{m_i}\big), \tag{VI.24}$$

für alle $i = 1, \dots, k$. Darüber hinaus existiert ein invarianter Teilraum W, sodass

$$V = \tilde{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \tilde{E}_{\lambda_k} \oplus W, \qquad \varphi(\tilde{E}_{\lambda_i}) \subseteq \tilde{E}_{\lambda_i}, \qquad \varphi(W) \subseteq W. \tag{VI.25}$$

Die Einschränkung $\varphi|_{\tilde{E}_{\lambda_i}}\colon \tilde{E}_{\lambda_i} \to \tilde{E}_{\lambda_i}$ ist triangulierbar mit λ_i als einzigen Eigenwert, und $\varphi|_W$ hat keine Eigenwerte, also

$$\sigma(\varphi|_{\tilde{E}_{\lambda_i}}) = \{\lambda_i\} \qquad \textit{und} \qquad \sigma(\varphi|_W) = \emptyset.$$

Schließlich existiert eine Basis B von V, sodass

$$[\varphi]_{BB} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & A_k & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A \end{pmatrix}, \textit{wobei} \quad A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in M_{m_i \times m_i}(\mathbb{K})$$

und $A \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$ keine Eigenwerte besitzt, $\sigma(A) = \emptyset$, und $m = n - m_1 - \cdots - m_k$.

Zerfällt das charakteristische Polynom von φ in Linearfaktoren (etwa weil $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist), dann ist $W = \{0\}$, $V = \tilde{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \tilde{E}_{\lambda_k}$ und der letzte Block in der Matrixdarstellung, A, tritt nicht auf, d.h. $m = 0$.

Beweis. Wir gehen mittels Induktion nach der Anzahl der verschiedenen Eigenwerte vor. Der Induktionsanfang, $\sigma(\varphi) = \emptyset$, ist trivial. Für den Induktionsschritt sei nun λ ein Eigenwert von φ. Nach Lemma VI.3.5 existiert ein komplementärer Teilraum W', sodass

$$V = \tilde{E}_{\lambda_1} \oplus W', \qquad \varphi(\tilde{E}_{\lambda_1}) \subseteq \tilde{E}_{\lambda_1}, \qquad \varphi(W') \subseteq W'. \tag{VI.26}$$

Bezeichnet $\varphi' := \varphi|_{W'}\colon W' \to W'$ die Einschränkung, so gilt weiters

$$\sigma(\varphi|_{\tilde{E}_{\lambda_1}}) = \{\lambda_1\} \qquad \text{und} \qquad \sigma(\varphi') = \{\lambda_2, \dots, \lambda_n\}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung existiert ein Teilraum W von W', sodass

$$W' = \tilde{E}'_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus \tilde{E}'_{\lambda_k} \oplus W, \quad \varphi'(\tilde{E}'_{\lambda_i}) \subseteq \tilde{E}'_{\lambda_i}, \quad \varphi'(W) \subseteq W, \quad \sigma(\varphi'|_W) = \emptyset,$$

wobei $\tilde{E}'_{\lambda_i}$ die verallgemeinerten Eigenräume von φ' bezeichnen. Offensichtlich ist $\tilde{E}'_{\lambda_i} \subseteq \tilde{E}_{\lambda_i}$, es gilt aber auch die umgekehrte Inklusion, $\tilde{E}_{\lambda_i} \subseteq \tilde{E}'_{\lambda_i}$, für jedes $i = 2, \dots, k$. Sei dazu $v \in \tilde{E}_{\lambda_i}$ und N so, dass $(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_V)^N v = 0$. Bezeichnet $v = e + w'$ die eindeutige Zerlegung mit $e \in \tilde{E}_{\lambda_1}$ und $w' \in W'$, dann folgt $(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_V)^N e = 0 = (\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_V)^N w'$ wegen der Invarianz der Zerlegung (VI.26). Da λ_i nicht Eigenwert von $\varphi|_{\tilde{E}_{\lambda_1}}$ ist, muss $e = 0$ gelten, und daher $v = w' \in \tilde{E}'_{\lambda_i}$. Dies zeigt $\tilde{E}'_{\lambda_i} = \tilde{E}_{\lambda_i}$, und daher die invariante Zerlegung (VI.25). Zerfällt das charakteristische Polynom in Linearfaktoren, dann muss $W = \{0\}$ gelten, da ja $\sigma(\varphi'|_W) = \emptyset$. Wählen wir Basen von $\tilde{E}_{\lambda_i}$ wie in Lemma VI.3.5 und vereinigen diese mit einer Basis von W, so erhalten wir eine Basis B von V bezüglich der die Matrixdarstellung $[\varphi]_{BB}$ die gewünschte Form hat. □

Daraus erhalten wir sofort:

VI.3.8. Korollar. *Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $\varphi\colon V \to V$ linear. Weiters bezeichnen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ alle (paarweise verschiedenen) Eigenwerte und $\tilde{E}_{\lambda_1}, \dots, \tilde{E}_{\lambda_k}$ die entsprechenden verallgemeinerten Eigenräume. Dann sind äquivalent:*

(a) Das charakteristische Polynom p_φ zerfällt über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren.
(b) $V = \tilde{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \tilde{E}_{\lambda_k}$.
(c) $\dim(V) = \sum_{i=1}^k \dim(\tilde{E}_{\lambda_i})$.

VI.3.9. Beispiel. Wir wollen die Primärzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Für das charakteristische Polynom erhalten wir

$$\begin{aligned} p &= \det \begin{pmatrix} 5-z & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1-z & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 6-z & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 4-z \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 5-z & 1 & 1 \\ -4 & 1-z & -2 \\ 0 & 0 & 3-z \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 6-z & 1 \\ -1 & 4-z \end{pmatrix} = (3-z)^3(5-z)^2, \end{aligned}$$

also $\sigma(A) = \{3, 5\}$. Dann ist

$$A - 5I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (A-5I)^2 = \begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 & 0 & 0 \\ 16 & 12 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$E_5 = \ker(A - 5I) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle, \quad \tilde{E}_5 = \ker\big((A-5I)^2\big) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle,$$

siehe (VI.24). Analog

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A-3I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & -12 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$E_3 = \ker(A - 3I) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle,$$

und

$$\tilde{E}_3 = \ker\big((A-3I)^2\big) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle.$$

Bezeichnen wir die gewonnene Basis von V mit

$$B = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \end{smallmatrix}\right), \quad \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

und die entsprechende Basiswechselmatrix mit

$$S = T_{EB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

dann gilt

$$[A]_{BB} = S^{-1}AS = \left(\begin{array}{cc|ccc} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

die gesuchte Primärzerlegung von A.

VI.3.10. Satz (Caley–Hamilton). *Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit charakteristischem Polynom p. Dann gilt $p(\varphi) = 0$.*

Beweis. Wir werden dies nur für algebraisch abgeschlossene Körper zeigen, der allgemeine Fall lässt sich dann durch Übergang zum algebraischen Abschluss von $\mathbb{K}$ beweisen. Sei also $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen. Es bezeichnen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ alle verschiedenen Eigenwerte, $m_1, \dots, m_k$ ihre algebraischen Vielfachheiten und $\tilde{E}_{\lambda_i}$ die entsprechenden verallgemeinerten Eigenräume. Für das charakteristische Polynom gilt dann $p = (\lambda_1 - z)^{m_1} \cdots (\lambda_k - z)^{m_k}$, und daher

$$p(\varphi) = (\lambda_1 \operatorname{id}_V - \varphi)^{m_1} \cdots (\lambda_k \operatorname{id}_V - \varphi)^{m_k}.$$

Nach Satz VI.3.7 ist

$$V = \tilde{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \tilde{E}_{\lambda_k} \qquad \text{und} \qquad \varphi(\tilde{E}_{\lambda_i}) \subseteq \tilde{E}_{\lambda_i}.$$

Schränken wir $p(\varphi)\colon V \to V$ auf den Teilraum $\tilde{E}_{\lambda_k} \subseteq V$ ein, erhalten wir

$$p(\varphi)|_{\tilde{E}_{\lambda_k}} = (\lambda_1 \operatorname{id}_V - \varphi)^{m_1} \cdots \underbrace{(\lambda_k \operatorname{id}_V - \varphi)^{m_k}|_{\tilde{E}_{\lambda_k}}}_{=0} = 0,$$

siehe (VI.24). Da die Faktoren $(\lambda_i \operatorname{id}_V - \varphi)^{m_i}$ miteinander kommutieren, gilt auch

$$p(\varphi)|_{\tilde{E}_{\lambda_i}} = (\lambda_1 \operatorname{id}_V - \varphi)^{m_1} \cdots \underbrace{(\lambda_i \operatorname{id}_V - \varphi)^{m_i}|_{\tilde{E}_{\lambda_i}}}_{=0} = 0,$$

und wir erhalten analog

$$p(\varphi)|_{\tilde{E}_{\lambda_i}} = 0, \qquad i = 1, \dots, k.$$

Nachdem die Teilräume $\tilde{E}_{\lambda_1}, \dots, \tilde{E}_{\lambda_k}$ ganz V aufspannen, folgt $p(\varphi) = 0$. □

VI.3.11. Bemerkung. Ist $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und bezeichnet p das charakteristische Polynom von A, dann gilt $p(A) = 0$. Dies folgt sofort aus aus Satz VI.3.10, siehe auch Aufgabe 60. Etwa hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

charakteristisches Polynom $p = -z^3 + 7z^2 - 16z + 12 = (2-z)^2(3-z)$ und es gilt tatsächlich

$$\begin{aligned} p(A) &= -A^3 + 7A^2 - 16A + 12I_3 \\ &= -\begin{pmatrix} -11 & -38 & -38 \\ 38 & 84 & 76 \\ -19 & -38 & -30 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} -1 & -10 & -10 \\ 10 & 24 & 20 \\ -5 & -10 & -6 \end{pmatrix} - 16\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} + 12\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 38 & 38 \\ -38 & -84 & -76 \\ 19 & 38 & 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & -70 & -70 \\ 70 & 168 & 140 \\ -35 & -70 & -42 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 & 32 & 32 \\ -32 & -96 & -64 \\ 16 & 32 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

VI.3.12. Bemerkung. Es scheint verlockend, den Beweis von Satz VI.3.10 wie folgt kürzer zu führen: Da $p(z) = \det(A - zI_n)$ ist $p(A) = \det(A - AI_n) = \det(A - A) = \det(0) = 0$. *Dies ist jedoch kein korrekter Beweis!* Das Problem liegt beim vermeintlichen Gleichheitszeichen, $p(A) = \det(A - AI_n)$, denn auf der linken Seite steht eine *Matrix*, $p(A)$, wohingegen auf der rechten Seite der *Skalar* $\det(A - AI_n)$ steht.

VI.3.13. Definition (Nilpotente Abbildungen). Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ wird *nilpotent* genannt, falls $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\varphi^N = 0$. Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ wird nilpotent genannt, wenn die damit assoziierte lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $x \mapsto Ax$, nilpotent ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $A^N = 0$, für ein $N \in \mathbb{N}$.

Aus den vorangehenden Betrachtungen folgt sofort:

VI.3.14. Proposition. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:*
(a) φ ist nilpotent.
(b) $\tilde{E}_0 = V$.
(c) $\varphi^n = 0$.
(d) Es existieren ineinander geschachtelte Teilräume (Flagge)

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_r = V,$$

sodass $\varphi(V_i) \subseteq V_{i-1}$, für alle $i = 1, \dots, r$.
(e) Es existiert eine Basis B von V, bezüglich der die Matrixdarstellung von φ strikte obere Dreiecksgestalt hat, d.h.

$$[\varphi]_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, dann ist dies weiters äquivalent zu
(f) $\sigma(\varphi) \subseteq \{0\}$.
Eine Folge (strikt) geschachtelter Teilräume wie in (d) ist durch

$$\{0\} = \ker(\varphi^0) \subsetneq \ker(\varphi^1) \subsetneq \ker(\varphi^2) \subsetneq \cdots \subsetneq \ker(\varphi^r) = V$$

gegeben, wobei r die kleinste Zahl mit $\varphi^r = 0$ bezeichnet (Nilpotenzindex). Eine Basis wie in (e) lässt sich gewinnen, indem wir mit einer Basis von $\ker(\varphi)$ *beginnen, diese zu einer Basis von* $\ker(\varphi^2)$ *ergänzen, weiter zu einer Basis von* $\ker(\varphi^3)$ *ergänzen, u.s.w. bis wir schließlich bei einer Basis von V landen.*

VI.3.15. Korollar. *Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $\varphi\colon V \to V$ eine lienare Abbildung deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Dann existiert eine eindeutig bestimmte diagonalisierbare lineare Abildung $\psi\colon V \to V$ und eine eindeutig bestimmte nilpotente* *lineare Abbildung* $\nu\colon V \to V$*, sodass*

$$\varphi = \psi + \nu \qquad \text{und} \qquad \psi\nu = \nu\psi.$$

Darüber hinaus haben φ *und* ψ *das selbe charakteristische Polynom, also die gleichen Eigenwerte und algebraischen Vielfachheiten.*

Beweis. Die Existenz von ψ und ν folgt aus der Primärzerlegung. Ist B eine Basis von V bezüglich der $[\varphi]_{BB}$ von der Form in Satz VI.3.7 ist, dann definieren wir $[\psi]_{BB}$ (und damit ψ) durch die Diagonaleinträge von $[\varphi]_{BB}$ und $\nu := \varphi - \psi$. Eine einfache Überlegung zeigt, dass diese linearen Abbildungen alle gewünschten Eigenschaften haben.

Es bleibt daher nur noch die Eindeutigkeit zu zeigen. Seien dazu $\psi\colon V \to V$ diagonalisierbar und $\nu\colon V \to V$ nilpotent, sodass $\varphi = \psi + \nu$ und $\psi\nu = \nu\psi$. Da die verallgemeinerten Eigenräume von φ ganz V aufspannen, genügt es $\psi|_{\tilde{E}_\lambda} = \lambda \operatorname{id}_{\tilde{E}_\lambda}$ für jeden Eigenwert λ von φ zu zeigen, denn dadurch sind ψ und dann auch $\nu = \varphi - \psi$ eindeutig festgelegt. Da ψ und ν kommutieren gilt auch $\varphi\psi = \psi\varphi$ und $\varphi\nu = \nu\varphi$ und daher, siehe Aufgabe 61,

$$\psi(\tilde{E}_\lambda) \subseteq \tilde{E}_\lambda \qquad \text{und} \qquad \nu(\tilde{E}_\lambda) \subseteq \tilde{E}_\lambda.$$

Beachte, dass $\nu|_{\tilde{E}_\lambda}$ und $\varphi|_{\tilde{E}_\lambda} - \lambda \operatorname{id}_{\tilde{E}_\lambda}$ beide nilpotent sind. Da sie kommutieren ist auch ihre Differenz, $\psi|_{\tilde{E}_\lambda} - \lambda \operatorname{id}_{\tilde{E}_\lambda} = \varphi|_{\tilde{E}_\lambda} - \lambda \operatorname{id}|_{\tilde{E}_\lambda} - \nu|_{\tilde{E}_\lambda}$ nilpotent, siehe Aufgabe 62. Andererseits ist $\psi|_{\tilde{E}_\lambda} - \lambda \operatorname{id}_{\tilde{E}_\lambda}$ auch diagonalisierbar, siehe Aufgabe 63. Somit ist $\psi|_{\tilde{E}_\lambda} - \lambda \operatorname{id}_{\tilde{E}_\lambda}$ diagonalisierbar und nilpotent, also Null, siehe Aufgabe 64. Wir erhalten $\psi|_{\tilde{E}_\lambda} = \lambda \operatorname{id}_{\tilde{E}_\lambda}$. □

Nach Korollar VI.3.15, lässt sich jede Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, in der Form $A = D + N$ schreiben, wobei $D \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ diagonalisierbar, $N \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ nilpotent, und $DN = ND$. Die Matrizen D und N sind durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt, die Eigenwerte von A und D, und deren algebraische Vielfachheiten, stimmen überein.

VI.3.16. Satz. *Sei* V *ein* n*-dimensionaler* $\mathbb{K}$*-Vektorraum und* $\varphi\colon V \to V$ *eine nilpotente lineare Abbildung. Dann existieren Vektoren* $v_1, \dots, v_l \in V$ *und Zahlen* $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_l \geq 1$*, sodass* $\varphi^{r_i}(v_i) = 0$*, für jedes* $i = 1, \dots, l$*, und so, dass*

$$v_1, \varphi(v_1), \dots, \varphi^{r_1-1}(v_1), v_2, \varphi(v_2), \dots, \varphi^{r_2-1}(v_2), \dots, v_l, \varphi(v_l), \dots, \varphi^{r_l-1}(v_l)$$

eine Basis von V *bildet. Bezeichnet* B *diese Basis in umgekehrter Reihenfolge, dann ist die Matrixdartsellung von der Form*

$$[\varphi]_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{VI.27}$$

für gewisse $\varepsilon_i \in \{0,1\}$. Es gilt in diesem Fall

$$n = r_1 + \cdots + r_l \quad \textit{und} \quad l = \dim\ker\varphi = 1 + \sharp\{i \mid \varepsilon_i = 0\}.$$

Eine solche Basis kann durch Lösen linearer Gleichungssysteme algorithmisch konstruiert werden (siehe den Beweis unten).

Beweis. Sei r_1 die kleinste Zahl, sodass $\varphi^{r_1} = 0$ und $\varphi^{r_1-1} \neq 0$. Es existiert daher $v_1 \in V$, sodass $\varphi^{r_1}(v_1) \neq 0$. Wir zeigen zunächst, dass die Vektoren

$$v_1, \varphi(v_1), \varphi^2(v_1), \dots, \varphi^{r_1-1}(v_1) \tag{VI.28}$$

linear unabhängig in V sind. Seien dazu $\lambda_i \in \mathbb{K}$ mit

$$\lambda_0 v_1 + \lambda_1\varphi^1(v_1) + \lambda_2\varphi^2(v_1) + \cdots + \lambda_{r_1-1}\varphi^{r_1-1}(v_1) = 0.$$

Da $\varphi^{r_1}(v_1) = 0$, erhalten wir durch sukzessives Anwenden von φ, das System

$$\begin{aligned}
\lambda_0 v_1 + \lambda_1\varphi^1(v_1) + \lambda_2\varphi^2(v_1) + \cdots + \lambda_{r_1-1}\varphi^{r_1-1}(v_1) &= 0\\
\lambda_0\varphi^1(v_1) + \lambda_1\varphi^2(v_1) + \cdots + \lambda_{r_1-2}\varphi^{r_1-1}(v_1) &= 0\\
\lambda_0\varphi^2(v_1) + \cdots + \lambda_{r_1-3}\varphi^{r_1-1}(v_1) &= 0\\
&\vdots\\
\lambda_0\varphi^{r_1-2}(v_1) + \lambda_1\varphi^{r_1-1}(v_1) &= 0\\
\lambda_0\varphi^{r_1-1}(v_1) &= 0
\end{aligned}$$

Da $\varphi^{r_1-1}(v_1) \neq 0$ folgt daraus $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{r_1-1} = 0$ in dem wir Gleichungssystem von unten nach oben inspizieren. Dies zeigt, dass (VI.28) linear unabhängig sind. Bezeichne den davon aufgespannten Teilraum mit

$$U := \big\langle v_1, \varphi(v_1), \varphi^2(v_1), \dots, \varphi^{r_1-1}(v_1)\big\rangle.$$

Beachte, dass U invariant unter φ ist, d.h. $\varphi(U) \subseteq U$. Die Abbildung φ induziert daher eine Abbildung auf dem Quotientenraum,

$$\bar\varphi\colon \bar V \to \bar V, \qquad \bar\varphi([v]) = [\varphi(v)], \qquad \bar V := V/U.$$

Beachte $\bar\varphi^{r_1} = 0$, denn $\bar\varphi^{r_1}([v]) = [\varphi^{r_1}(v)] = [0] = 0$, für jedes $v \in V$. Insbesondere ist auch $\bar\varphi\colon \bar V \to \bar V$ nilpotent. Mittels Induktion nach der Dimension von V dürfen wir daher annehmen, dass Zahlen $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_l \geq 1$ und Vektoren $\bar v_2, \dots, \bar v_l \in \bar V$ existieren, sodass $\bar\varphi^{r_i}(\bar v_i) = 0$ für jedes $i = 2, \dots, l$, und so, dass

$$\bar v_2, \bar\varphi(\bar v_2), \dots, \bar\varphi^{r_2-1}(\bar v_2), \dots, \bar v_l, \bar\varphi(\bar v_l), \dots, \bar\varphi^{r_l-1}(\bar v_l) \tag{VI.29}$$

eine Basis von $\bar V$ bildet. Wähle Repräsentanten $\tilde v_2, \dots, \tilde v_l \in V$, d.h. $\bar v_i = [\tilde v_i]$. Es folgt $[\varphi^{r_i}(\tilde v_i)] = \bar\varphi^{r_i}(\bar v_i) = 0$, also $\varphi^{r_i}(\tilde v_i) \in U$. Es existieren daher $\mu_{i,j} \in \mathbb{K}$, sodass

$$\varphi^{r_i}(\tilde v_i) = \sum_{j=0}^{r_1-1} \mu_{i,j}\varphi^j(v_1), \qquad i = 2, \dots, l. \tag{VI.30}$$

Anwenden von $\varphi^{r_1-r_i}$ liefert, unter Verwendung von $\varphi^{r_1}=0$,

$$\begin{aligned}0=\varphi^{r_1}(\tilde v_i)=\varphi^{r_1-r_i}\big(\varphi^{r_i}(\tilde v_i)\big)&=\sum_{j=0}^{r_1-1}\mu_{i,j}\varphi^{r_1-r_i+j}(v_1)\\&=\sum_{j=r_1-r_i}^{r_1-1+r_1-r_i}\mu_{i,j-r_1+r_i}\varphi^j(v_1)=\sum_{j=r_1-r_i}^{r_1-1}\mu_{i,j-r_1+r_i}\varphi^j(v_1)\end{aligned}$$

Aus der linearen Unabhängigkeit des Systems (VI.28) folgt $\mu_{i,0}=\mu_{i,1}=\cdots=\mu_{i,r_i-1}=0$. Zusammen mit (VI.30) erhalten wir also

$$\varphi^{r_i}(\tilde v_i)=\sum_{j=r_i}^{r_1-1}\mu_{i,j}\varphi^j(v_1),\qquad i=2,\dots,l.$$

Setzen wir

$$v_i:=\tilde v_i-\sum_{j=r_i}^{r_1-1}\mu_{i,j}\varphi^{j-r_i}(v_1),$$

dann gilt somit

$$\varphi^{r_i}(v_i)=0\qquad\text{und}\qquad\bar v_i=[v_i],\qquad i=2,\dots,l.$$

Beachte, dass

$$v_2,\varphi(v_2),\dots,\varphi^{r_2-1}(v_2),\dots,v_l,\varphi(v_l),\dots,\varphi^{r_l-1}(v_l)\tag{VI.31}$$

unter der kanonischen Projektion $V\to\bar V$, $v\mapsto[v]$, bijektiv auf die Basis (VI.29) abgebildet wird. Somit ist (VI.31) linear unabhängig in V und bildet die Basis eines zu U komplementären Teilraums. Da $v_1,\varphi(v_1),\dots,\varphi^{r_1-1}(v_1)$ eine Basis von U ist, bildet

$$v_1,\varphi(v_1),\dots,\varphi^{r_1-1}(v_1),v_2,\varphi(v_2),\dots,\varphi^{r_2-1}(v_2),\dots,v_l,\varphi(v_l),\dots,\varphi^{r_l-1}(v_l)$$

also eine Basis von V. Damit ist der erste Teil des Satzes gezeigt. Die verbleibenden Aussagen sind nun offensichtlich. □

Für nilpotente Matrizen $A\in M_{n\times n}(\mathbb K)$, besagt der vorangehende Satz, dass eine invertierbare Matrix $S\in\mathrm{GL}_n(\mathbb K)$ und Skalare $\varepsilon_i\in\{0,1\}$ existieren, sodass $S^{-1}AS$ die Form (VI.27) hat.

VI.3.17. Beispiel. Die Matrix

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\2&0&1&0&0&0\\0&-2&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\\1&0&-1&2&0&1\\0&-3&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

ist nilpotent, denn

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = 0.$$

Wir wollen eine invertierbare Matrix S finden, sodass $S^{-1}AS$ die Gestalt (VI.27) hat. Wir gehen wie im Beweis des vorangehenden Satzes vor. Da $A^3 \neq 0$ und $A^4 = 0$ ist $r_1 = 4$. Es ist v_1 so zu wählen, dass $A^3 v_1 \neq 0$. Wir verwenden $v_1 = e_4$ und erhalten $A^4 v_1 = 0$ sowie

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Av_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^2 v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Nach dem Beweis des Satzes oben, sind diese Vektoren linear unabhängig und spannen daher einen 4-dimensionalen Teilraum U auf. Um den Nilpotenzindex der induzierten Abbildung auf dem Quotientenraum $\mathbb{K}^6/U$ zu bestimmen, beobachten wir, dass $\operatorname{img}(A^2)$ zur Gänze in U liegt, aber $\operatorname{img}(A) \not\subseteq U$, somit $r_2 = 2$. Es ist daher $\tilde{v}_2$ so zu bestimmen, dass $A\tilde{v}_2 \notin U$. Wir entscheiden uns für $\tilde{v}_2 = e_1$ und erhalten

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A^2\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} = 2A^3 v_1 \in U.$$

Setzen wir $v_2 := \tilde{v}_2 - 2Av_1$, dann gilt $A^2 v_2 = 0$ und

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Av_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten eine Basis B und die entsprechende Basiswechselmatrix S,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B}, \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mit der gewünschten Eigenschaft:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

VI.3.18. Definition (Jordanblock). Unter dem Jordanblock der Größe $m \in \mathbb{N}$ mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ verstehen wir die Matrix

$$J_m(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_{m\times m}(\mathbb{K}).$$

VI.3.19. Satz (Jordan Zerlegung). *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung, deren charakteristisches Polynom über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren zerfällt. Weiters bezeichnen $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ alle (paarweise verschiedenen) Eigenwerte von φ und $m_1, \dots, m_k$ ihre algebraische Vielfachheiten und $n_1, \dots, n_k$ ihre geometrischen Vielfachheiten. Dann existiert eine Basis B von V, sodass die Matrixdarstellung von φ folgende Blockdiagonalgestalt besitzt:*

$$[\varphi]_{BB} = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} J_{m_{1,1}}(\lambda_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J_{m_{1,n_1}}(\lambda_1) & & & & \\ \hline & & & \ddots & & & \\ \hline & & & & J_{m_{k,1}}(\lambda_k) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J_{m_{k,n_k}}(\lambda_k) \end{array}\right).$$

Dabei sind $m_{i,j} \in \mathbb{N}$ und $m_{i,1} + \cdots + m_{i,n_i} = m_i$, für jedes $i = 1, \dots, k$. Für die Anzahl der Jordanblöcke zum Eigenwert λ_i und Größe mindestens r gilt

$$\sharp\big\{j \bigm| m_{i,j} \geq r\big\} = \dim\ker\big((\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_V)^r\big) - \dim\ker\big((\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{r-1}\big).$$

Insbesondere ist diese Matrixdarstellung von φ, bis auf die Reihenfolge der Jordanblöcke, eindeutig betsimmt. Sie wird die Jordan'sche Normalform *von φ genannt.*

Beweis. Bezeichnen $\tilde{E}_{\lambda_i} = \ker\big((\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{m_i}\big)$ die verallgemeinerten Eigenräume von φ, so haben wir nach Satz VI.3.7 eine invariante Zerlegung,

$$V = \tilde{E}_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus \tilde{E}_{\lambda_k}, \qquad \varphi(\tilde{E}_{\lambda_i}) \subseteq \tilde{E}_{\lambda_i},$$

und die Einschränkung $\varphi|_{\tilde{E}_{\lambda_i}}$ ist triangulierbar mit einzigem Eigenwert λ_i. Somit ist die Einschränkung $\varphi|_{\tilde{E}_{\lambda_i}} - \lambda_i \operatorname{id}_{\tilde{E}_{\lambda_i}} : \tilde{E}_{\lambda_i} \to \tilde{E}_{\lambda_i}$ nilpotent. Nach Satz VI.3.16 existiert daher eine Basis B_i von $\tilde{E}_{\lambda_i}$ und Zahlen $\varepsilon_{i,j} \in \{0,1\}$, sodass

$$\big[\varphi|_{\tilde{E}_{\lambda_i}} - \lambda_i \operatorname{id}_{\tilde{E}_{\lambda_i}}\big]_{B_iB_i} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_{i,1} & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{i,m_i-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich:

$$\big[\varphi|_{\tilde{E}_{\lambda_i}}\big]_{B_iB_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & \varepsilon_{i,1} & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{i,m_i-1} \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Beachte,

$$\begin{aligned} n_i = \dim(E_{\lambda_i}) &= \dim\big(\ker(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_V)\big) \\ &= \dim\Big(\ker\big(\varphi|_{\tilde{E}_{\lambda_i}} - \lambda_i \operatorname{id}_{\tilde{E}_{\lambda_i}}\big)\Big) = 1 + \sharp\{j \mid \varepsilon_{i,j} = 0\}. \end{aligned}$$

Es existieren daher Zahlen $m_{i,1}, \dots, m_{i,n_i} \in \mathbb{N}$, sodass $m_{i,1} + \dots + m_{i,n_i} = m_i$ und

$$\big[\varphi|_{\tilde{E}_{\lambda_i}}\big]_{B_iB_i} = \underbrace{\begin{pmatrix} J_{m_{i,1}}(\lambda_i) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_{i,n_i}}(\lambda_i) \end{pmatrix}}_{m_i \times m_i}, \quad J_{m_{i,j}}(\lambda_i) = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix}}_{m_{i,j} \times m_{i,j}}.$$

Die Vereinigung $B := B_1, \dots, B_k$ bildet daher eine Basis von V, bezüglich der φ die gewünschte Form hat. Daraus erhalten wir sofort

$$\begin{aligned} \dim\big(\ker(\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_V)^r\big) &= \dim\Big(\ker\big(\varphi|_{\tilde{E}_{\lambda_i}} - \lambda_i \operatorname{id}_{\tilde{E}_{\lambda_i}}\big)^r\Big) \\ = \dim\ker \begin{pmatrix} J_{m_{i,1}}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{m_{i,n_i}}(0) \end{pmatrix}^r &= \sharp\{j \mid m_{i,j} \geq 1\} + \dots + \sharp\{j \mid m_{i,j} \geq r\}, \end{aligned}$$

und daher $\sharp\big\{j \;\big|\; m_{i,j} \geq r\big\} = \dim\ker\big((\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_V)^r\big) - \dim\ker\big((\varphi - \lambda_i \operatorname{id}_V)^{r-1}\big)$. $\square$

Für Matrizen $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, deren charakteristisches Polynom über $\mathbb{K}$ in Linearfaktoren zerfällt, besagt der vorangehende Satz gerade, dass eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ existiert, sodass $S^{-1}AS$ wie die Matrix in Satz VI.3.19

aussieht. Eine mögliche Jordan'sche Normalform ist etwa:

$$\begin{pmatrix}
3 & 1 & & & & & & & & \\
& 3 & 1 & & & & & & & \\
& & 3 & 1 & & & & & & \\
& & & 3 & & & & & & \\
& & & & 3 & 1 & & & & \\
& & & & & 3 & & & & \\
& & & & & & 3 & & & \\
& & & & & & & 5 & 1 & \\
& & & & & & & & 5 & \\
& & & & & & & & & 5
\end{pmatrix}$$

wobei, wie bisher, alle nicht spezifizierten Eintragungen Null sind.

VI.3.20. Korollar. *Zwei Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, deren charakteristische Polynome in Linearfaktoren zerfallen, sind genau dann ähnlich, wenn ihre Jordan'schen Normalformen, bis auf die Reihenfolge der Jordanblöcke, gleich sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn A und B die selben Eigenwerte, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, haben und für jedes $i = 1, \dots, k$ und jedes r die folgende Relation gilt:*

$$\dim\ker\big((A - \lambda_i I_n)^r\big) = \dim\ker\big((B - \lambda_i I_n)^r\big).$$

VI.3.21. Bemerkung. Durch die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte ist die Jordan'sche Normalform noch nicht eindeutig festgelegt. Etwa haben die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix}
7 & 1 & & & & \\
& 7 & 0 & & & \\
& & 7 & 1 & & \\
& & & 7 & 1 & \\
& & & & 7 & 1 \\
& & & & & 7
\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix}
7 & 1 & & & & \\
& 7 & 1 & & & \\
& & 7 & 0 & & \\
& & & 7 & 1 & \\
& & & & 7 & 1 \\
& & & & & 7
\end{pmatrix}$$

beide nur einen Eigenwert, nämlich $\lambda = 7$ mit algebraischer Vielfachheit 6 und geometrischer Vielfachheit 2. Die beiden Matrizen sind jedoch nicht ähnlich, da ihre Jordan'schen Normalformen verschieden sind, es gibt daher *keine* invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_6(\mathbb{K})$, sodass $S^{-1}AS = B$. Dass A und B nicht ähnlich sein können, folgt auch direkt aus $(B - 7I)^3 = 0$ und $(A - 7I)^3 \neq 0$.

VI.3.22. Beispiel. Wir wollen die Jordan'sche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix}
7 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -15 \\
0 & 7 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 & 7 \\
0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & -2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7
\end{pmatrix}$$

bestimmen. Wir setzen $N := A - 7I_n$ und berechnen

$$N = \begin{pmatrix} 0&1&0&-1&0&0&-15\\ 0&0&0&0&-1&-2&0\\ 0&0&0&1&0&0&7\\ 0&0&0&0&1&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&-2\\ 0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&-2&-4&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&1&2&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

Somit $\dim\ker(N) = 3$, $\dim\ker(N^2) = 6$ und $\dim\ker(N^r) = 0$, für $r \geq 3$. Nach Satz VI.3.19 hat die Jordan'sche Normalform von A daher 3 Jordanblöcke der Größen $3, 2, 2$, und muss somit folgende Gestalt haben:

$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc} 7&1&&&&&\\ &7&1&&&&\\ &&7&&&&\\ \hline &&&7&1&&\\ &&&&7&&\\ \hline &&&&&7&1\\ &&&&&&7 \end{array}\right) \tag{VI.32}$$

Um auch eine Matrix S mit $S^{-1}AS = J$ zu bestimmen gehen wir wie im Beweis von Satz VI.3.16 vor. Da $N^2 \neq 0$ und $N^3 = 0$, ist $r_1 = 3$. Es daher v_1 so zu wählen, dass $N^2 v_1 \neq 0$. Wir verwenden $v_1 = e_5$ und erhalten:

$$v_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad Nv_1 = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad N^2v_1 = \begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad N^3v_1 = 0.$$

Da $\operatorname{img}(N^2) \subseteq U_1 := \langle v_1, Nv_1, N^2v_1\rangle$ aber $\operatorname{img}(N) \not\subseteq U_1$ ist $r_2 = 2$. Es daher v_2 so zu wählen, dass $Nv_2 \notin U_1$ und $N^2v_2 = 0$. Wir verwenden $v_2 = e_2$ und erhalten

$$v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad Nv_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad N^2v_2 = 0.$$

Da $\operatorname{img}(N) \not\subseteq \langle v_1, Nv_1, N^2v_1, v_2, Nv_2\rangle$, ist auch $r_3 = 2$. Es ist daher v_3 so zu wählen, dass $Nv_3 \notin \langle v_1, Nv_1, N^2v_1, v_2, Nv_2\rangle$ und $N^2v_3 = 0$. Wir verwenden $v_3 = e_7$ und erhalten

$$v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad Nv_3 = \begin{pmatrix}-15\\0\\7\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \quad N^2v_3 = 0.$$

Insgesamt erhalten wir folgende Basis und Transformationsmatrix:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-15\\0\\7\\0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}}_{B} \qquad S = \begin{pmatrix} -2&0&0&1&0&-15&0\\ 0&-1&0&0&1&0&0\\ 1&0&0&0&0&7&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&-2&0\\ 0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

Nach Konstruktion gilt $S^{-1}AS = J$, siehe (VI.32).

VI.3.23. Beispiel. Betrachte die Folge $0, 0, 1, 6, 24, 80, 240, 672\dots$ Genauer:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_n = 6x_{n-1} - 12x_{n-2} + 8x_{n-3}, \quad n \geq 3.$$

Wir wollen eine explizite Formel für x_n herleiten. Setzen wir

$$v_n := \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}, \qquad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 8 & -12 & 6 \end{pmatrix},$$

dann gilt $v_{n+1} = Av_n$ und daher $v_n = A^n v_0$. Da das gesuchte x_n den ersten Eintrag von v_n bildet, genügt es also A^n zu berechnen. Das charakteristische Polynom von A ist $p = (2-z)^3$, die Matrix hat also nur einen Eigenwert, nämlich 2. Es gilt

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 8 & -12 & 4 \end{pmatrix}, \quad (A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 1 \\ 8 & -8 & 2 \\ 16 & -16 & 4 \end{pmatrix}, \quad (A-2I)^3 = 0,$$

und daher

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (A-2I)b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad (A-2I)^2 b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Daraus lesen wir die Jordan'sche Normalform von A ab:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{wobei} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit können wir die Potenzen von A bestimmen, siehe Aufgabe 66,

$$A^n = S \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^n S^{-1} = S \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & \binom{n}{2}2^{n-2} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} S^{-1}$$

Somit

$$v_n = A^n v_0 = S \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & \binom{n}{2}2^{n-2} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \binom{n}{2}2^{n-2} \\ n2^{n-1} \\ 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \binom{n}{2}2^{n-2} \\ \binom{n+1}{2}2^{n-1} \\ \binom{n+2}{2}2^n \end{pmatrix}.$$

Der erste Eintrag liefert die gesuchte explizite Formel für x_n,

$$x_n = \binom{n}{2}2^{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2} = n(n-1)2^{n-3}.$$