VI.4. Reelle Normalformen. Wir wollen hier die Primärzerlegung des vorangehenden Abschnitts verfeinern und anschließend die reelle Jordan'sche Normalform besprechen. Wir beginnen mit der Primfaktorzerlegung von Polynomen.

VI.4.1. Definition (Teiler). Seien $p, q \in \mathbb{K}[z]$ zwei Polynome. Wir sagen p *teilt* q, und schreiben $p|q$, falls ein Polynom $s \in \mathbb{K}[z]$ existiert, sodass $q = sp$. Jedes solche Polynom p wird als Teiler von q bezeichnet.

Jedes nicht-triviale konstante Polynom $0 \neq c \in \mathbb{K}[z]$ teilt jedes andere Polynom $p \in \mathbb{K}[z]$, denn $p = c(c^{-1}p)$, wobei $c^{-1}p \in \mathbb{K}[z]$. Auch gilt $cp|p$ für jedes Polynom p und jede Konstante $0 \neq c \in \mathbb{K}$, denn $p = c^{-1}(cp)$. Solche Teiler, d.h. konstante Polynome und konstante Vielfache von p, werden als *triviale Teiler* von p bezeichnet.

VI.4.2. Definition (Irreduzible Polynome). Ein Polynom p mit $\deg(p) \geq 1$ wird *irreduzibel* genannt, wenn es neben den trivialen Teilern (konstante Polynome und konstante Vielfache von p) keine weiteren Teiler besitzt.

VI.4.3. Beispiel. Jedes Polynom ersten Grades ist irreduzibel, denn für den Grad gilt $\deg(p_1p_2) = \deg(p_1) + \deg(p_2)$. Das Polynom $p = z^2 + 1 \in \mathbb{R}[z]$ ist nicht irreduzibel, denn es zerfällt über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren.

VI.4.4. Definition (Teilerfremde Polynome). Polynome $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{K}[z]$ werden *teilerfremd* oder *relativ prim* genannt, falls sie neben den konstanten Polynomen keine weiteren gemeinsamen Teiler besitzen, d.h. $q|p_1, \dots, q|p_k$ ist nur für konstante Polynome q möglich.

VI.4.5. Lemma. *Polynome $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{K}[z]$ sind genau dann teilerfremd, wenn Polynome $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{K}[z]$ existieren, sodass*

$$q_1p_1 + \cdots + q_kp_k = 1.$$

Beweis. Gilt $q_1p_1 + \cdots + q_kp_k = 1$ und ist $s \in \mathbb{K}[z]$ ein gemeinsamer Teiler aller p_i, d.h. $s|p_1, \dots, s|p_k$, dann folgt $s|1$, also muss s konstant sein. Dies zeigt, dass $p_1, \dots, p_k$ teilerfremde Polynome sind. Für die andere Implikation betrachte

$$J := \big\{q_1p_1 + \cdots + q_kp_k \bigm| q_i \in \mathbb{K}[z]\big\}.$$

Da wenigstens ein $p_i \neq 0$ gilt $J \neq \{0\}$. Sei nun $0 \neq a \in J$ mit minimalem Grad, d.h. $\deg(a) \leq \deg(b)$, für alle $0 \neq b \in J$. Wir zeigen nun, dass a jedes der Polynome p_i teilt, $i = 1, \dots, k$. Da $a \in J$ existieren $q_1, \dots, q_k \in \mathbb{K}[z]$ mit $a = q_1p_1 + \cdots + q_kp_k$. Nach Lemma VI.2.1 existieren $r, s \in \mathbb{K}[z]$ mit $p_1 = sa + r$ und $\deg(r) < \deg(a)$. Somit

$$r = (1 - sq_1)p_1 - \cdots - sq_kp_k \in J,$$

und wegen der Minimalität von $\deg(a)$, also $r = 0$. Wir schließen $p_1 = sa$ und daher $a|p_1$. Völlig analog lässt sich $a|p_i$ für jedes $i = 1, \dots, k$ zeigen. Als gemeinsamer Teiler der teilerfremden Polynome $p_1, \dots, p_k$ muss a konstant sein.

Wir erhalten somit $1 = a^{-1}a = a^{-1}(q_1p_1 + \cdots + q_kp_k) = \tilde{q}_1p_1 + \cdots + \tilde{q}_kp_k$ mit $\tilde{q}_i = a^{-1}q_i \in \mathbb{K}[z]$. □

VI.4.6. Lemma (Irreduzible Polynome sind prim). *Seien $q_1, q_2 \in \mathbb{K}[z]$ beliebige Polynome und $p \in \mathbb{K}[z]$ irreduzibel, sodass $p|q_1q_2$. Dann gilt $p|q_1$ oder $p|q_2$.*

Beweis. Wir nehmen an, dass p nicht q_1 teilt und werden $p|q_2$ zeigen. Beachte, dass p und q_1 teilerfremd sind, denn wegen der Irreduzibilität von p sind alle nicht konstanten Teiler von p von der Form cp mit $0 \neq c \in \mathbb{K}$, diese können aber nicht q_1 teilen, da q_1 nicht von p geteilt wird. Nach Lemma VI.4.5 existieren daher $a, b \in \mathbb{K}[z]$, sodass $ap + bq_1 = 1$. Wir erhalten $apq_2 + bq_1q_2 = q_2$, also $p|q_2$, denn p teilt offensichtlich den ersten Summanden, apq_2, aber auch den zweiten, bq_1q_2, denn nach Voraussetzung gilt $p|q_1q_2$. □

VI.4.7. Definition (Normierte Polynome). Ein Polynom $0 \neq p \in \mathbb{K}[z]$ wird *normiert* oder *monisch* genannt, falls es führenden Koeffizient 1 hat, d.h. wenn es von der Form $p = z^n + p_{n-1}z^{n-1} + \cdots + p_1z + p_0$ ist, $p_i \in \mathbb{K}$.

VI.4.8. Proposition (Eindeutige Primfaktorzerlegung). *Sei $p \in \mathbb{K}[z]$ ein Polynom mit* $\deg(p) \geq 1$. *Dann existieren paarweise verschiedene irreduzible normierte Polynome $q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{K}[z]$, $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ und $0 \neq c \in \mathbb{K}$, sodass*

$$p = cq_1^{m_1} \cdots q_k^{m_k}$$

Diese Darstellung ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

Beweis. Ist p irreduzibel und bezeichnet $0 \neq c \in \mathbb{K}$ den führenden Koeffizienten von p, dann ist $q = c^{-1}p$ ein normiertes irreduzibles Polynom und $p = cq$ die gesuchte Darstellung. Ist p nicht irreduzibel, dann existieren $p_1, p_2 \in \mathbb{K}[z]$ mit $\deg(p_i) \geq 1$, sodass $p = p_1p_2$ und daher auch $\deg(p_i) < \deg(p)$. Mittels Induktion nach $\deg(p)$ dürfen wir daher annehmen, dass normierte irreduzible Polynome q_i und $0 \neq c_i \in \mathbb{K}$ existieren, sodass $p_1 = c_1q_1 \cdots q_l$ und $p_2 = c_2q_{l+1} \cdots q_n$. Fassen wir in $p = p_1p_2 = c_1c_2q_1 \cdots q_n$ gleiche Faktoren zu Potenzen zusammen, so erhalten wir die gewünschte Darstellung von p mit $c = c_1c_2$. Damit ist die Existenz der Primfaktorzerlegung bewiesen.

Um auch die Eindeutigkeit der Darstellung zu zeigen, seien nun $q_i, \tilde{q}_i$ normierte irreduzible Polynome und $0 \neq c \in \mathbb{K}$, $0 \neq \tilde{c} \in \mathbb{K}$, sodass

$$cq_1 \cdots q_l = \tilde{c}\tilde{q}_1 \cdots \tilde{q}_n.$$

Aus der Normiertheit der q_i und $\tilde{q}_i$ folgt $c = \tilde{c}$ und daher

$$q_1 \cdots q_l = \tilde{q}_1 \cdots \tilde{q}_n.$$

Nach Lemma VI.4.6 teilt q_1 wenigstens eines der Polynome $\tilde{q}_i$. O.B.d.A. $q_1|\tilde{q}_1$. Da q_1 und $\tilde{q}_1$ beide normiert und irreduzibel sind, folgt $q_1 = \tilde{q}_1$. Mit Hilfe der schon früher verwendeten Kürzungsregel schließen wir $q_2 \cdots q_l = \tilde{q}_2 \cdots \tilde{q}_n$. Induktiv fortfahrend erhalten wir $l = n$ und, nach Umnummerieren der $\tilde{q}_i$, auch $q_i = \tilde{q}_i$. □

VI.4.9. Beispiel (Irreduzible Polynome über alg. abg. $\mathbb{K}$). Ist $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen, dann zerfällt jedes nicht konstante Polynom in Linearfaktoren, also sind die irreduzible Polynome über $\mathbb{K}$ genau die Polynome mit Grad 1. Die eindeutige Primfaktorzerlegung eines Polynoms $p \in \mathbb{K}[z]$ mit $\deg(p) \geq 1$ ist daher von der Form

$$p = c(z - \lambda_1)^{m_1} \cdots (z - \lambda_k)^{m_k},$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die Nullstellen, $m_1, \dots, m_k$ ihre algebraischen Vielfachheiten und $0 \neq c \in \mathbb{K}$ den führenden Koeffizienten von p bezeichnen.

VI.4.10. Beispiel (Irreduzible Polynome über $\mathbb{R}$). Neben den Polynomen ersten Grades, siehe Beispiel VI.4.3,

$$q = c(z - \lambda), \qquad c, \lambda \in \mathbb{K},\ c \neq 0, \tag{VI.33}$$

gibt es noch einen zweiten Typ irreduzibler reeller Polynome, nämlich

$$q = c\big((z - \alpha)^2 + \beta^2\big), \qquad c, \lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta > 0,\ c \neq 0. \tag{VI.34}$$

Dieses Polynom q besitzt zwei konjugiert komplexe Nullstellen, $\lambda = \alpha \pm \mathbf{i}\beta$, hat keine reelle Nullstelle, und ist daher irreduzibel. Jedes irreduzible reelle Polynom, p, ist von der Form (VI.33) oder (VI.34). Hat p eine reelle Nullstelle, dann muss es von der Form (VI.33) sein. Hat p keine reelle Nullstelle, dann existiert nach dem Fundamentalsatz der Algebra eine komplexe Nullstelle, $p(\mu) = 0$, wobei $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Da p reelle Koeffizienten hat, folgt $p(\bar\mu) = \overline{p(\mu)} = 0$, also ist $\bar\mu$ eine weitere Nullstelle von p, die verschieden von μ ist. Es existiert daher ein Polynom $c \in \mathbb{C}[z]$, sodass $p = c(z - \mu)(z - \bar\mu)$. Schreiben wir $\mu = \alpha + \mathbf{i}\beta$, dann gilt $(z - \mu)(z - \bar\mu) = (z - \alpha)^2 + \beta^2$. Da dies ein reelles Polynom ist, folgt $c \in \mathbb{R}[z]$, und wegen der Irreduzibilität von p muss c daher konstant sein. Somit hat p die Gestalt (VI.34). Die Primfaktorzerlegung eines beliebigen reellen Polynoms p mit $\deg(p) \geq 1$ ist daher von der Form

$$p = c(z - \lambda_1)^{m_1} \cdots (z - \lambda_k)^{m_k}\big((z - \alpha_1)^2 + \beta_1^2\big)^{\tilde m_1} \cdots \big((z - \alpha_l)^2 + \beta_l^2\big)^{\tilde m_l}$$

wobei $c, \lambda_i, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i > 0$ und $c \neq 0$. Dabei sind $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die reellen Nullstellen, $m_1, \dots, m_k$ ihre algebraischen Vielfachheiten, $\alpha_1 + \mathbf{i}\beta_1, \dots, \alpha_l + \mathbf{i}\beta_l$ die komplexen Nullstellen mit positivem Imaginärteil und $\tilde m_1, \dots, \tilde m_l$ ihre algebraischen Vielfachheiten. Fassen wir p als komplexes Polynom auf, dann gilt

$$\begin{aligned} p = c(z - \lambda_1)^{m_1} \cdots (z - \lambda_k)^{m_k}\big(z - (\alpha_1 + \mathbf{i}\beta_1)\big)^{\tilde m_1}\big(z - (\alpha_1 - \mathbf{i}\beta_1)\big)^{\tilde m_1} \\ \cdots \big(z - (\alpha_l + \mathbf{i}\beta_l)\big)^{\tilde m_l}\big(z - (\alpha_l - \mathbf{i}\beta_l)\big)^{\tilde m_l} \end{aligned}$$

d.h. die komplexen Nullstellen $\alpha_1 - \mathbf{i}\beta_1, \dots, \alpha_l - \mathbf{i}\beta_l$ haben die gleichen algebraischen Vielfachheiten, $\tilde m_1, \dots, \tilde m_k$, wie die dazu komplex konjugierten Nullstellen.

VI.4.11. Satz (Primärzerlegung). *Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ linear und $p \in \mathbb{K}[z]$ ein Polynom mit $\deg(p) \geq 1$, sodass*

$p(\varphi) = 0$. Bezeichnet $p = cp_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k}$ die eindeutige Primfaktorzerlegung von p, dann zerfällt V in eine invariante direkte Summe:

$$V = \ker\big(p_1^{m_1}(\varphi)\big) \oplus \cdots \oplus \ker\big(p_k^{m_k}(\varphi)\big), \qquad \varphi\big(\ker(p_i^{m_i}(\varphi)\big) \subseteq \ker\big((p_i^{m_i}(\varphi))\big).$$

Beweis. Bezeichne $\hat{p}_i := p/p_i^{m_i} = p_1^{m_1} \cdots p_{i-1}^{m_{i-1}} p_{i+1}^{m_{i+1}} \cdots p_k^{m_k} \in \mathbb{K}[z]$. Da die Polynome $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_k$ teilerfremd sind, existieren Polynome $q_i \in \mathbb{K}[z]$, sodass $1 = q_1\hat{p}_1 + \cdots + q_k\hat{p}_k$. Setzen wir $\pi_i := (q_i\hat{p}_i)(\varphi)\colon V \to V$, $i = 1, \ldots, k$, so erhalten wir

$$\mathrm{id}_V = \pi_1 + \cdots + \pi_k. \tag{VI.35}$$

Für $i \neq j$ ist $a := p/(p_i^{m_i} p_j^{m_j}) \in \mathbb{K}[z]$ und $ap = p^2/(p_i^{m_i} p_j^{m_j}) = \hat{p}_i\hat{p}_j$, also $aq_iq_jp = q_i\hat{p}_iq_j\hat{p}_j$ und daher $\pi_i \circ \pi_j = (q_i\hat{p}_i)(\varphi) \circ (q_j\hat{p}_j)(\varphi) = (q_i\hat{p}_iq_j\hat{p}_j)(\varphi) = (aq_iq_jp)(\varphi) = (aq_iq_j)(\varphi) \circ p(\varphi) = 0$. Zusammen mit (VI.35) folgt

$$\pi_i^2 = \pi_i \qquad \text{und} \qquad \pi_i \circ \pi_j = 0, \quad i \neq j.$$

Nach Proposition VI.1.16 erhalten wir die Zerlegung

$$V = \mathrm{img}(\pi_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{img}(\pi_k), \qquad \varphi\big(\mathrm{img}(\pi_i)\big) \subseteq \mathrm{img}(\pi_i),$$

wobei die Invarianz aus $\varphi \circ \pi_i = (zq_i\hat{p}_i)(\varphi) = (q_i\hat{p}_iz)(\varphi) = \pi_i \circ \varphi$ folgt. Es bleibt

$$\mathrm{img}(\pi_i) = \ker\big(p_i^{m_i}(\varphi)\big)$$

zu zeigen. Da $p_i^{m_i}q_i\hat{p}_i = q_ip$ folgt $p_i^{m_i}(\varphi) \circ \pi_i = (p_i^{m_i}q_i\hat{p}_i)(\varphi) = (q_ip)(\varphi) = q_i(\varphi) \circ p(\varphi) = 0$ und daher die Inklusion $\mathrm{img}(\pi_i) \subseteq \ker\big(p_i^{m_i}(\varphi)\big)$. Da die Polynome $p_i^{m_i}$ und $q_i\hat{p}_i$ teilerfremd sind, existieren Polynome $b, c \in \mathbb{K}[z]$, sodass $1 = bp_i^{m_i} + cq_i\hat{p}_i$, also $\mathrm{id}_V = b(\varphi) \circ p_i^{m_i}(\varphi) + \pi_i \circ c(\varphi)$, woraus wir auch die umgekehrte Inklusion, $\ker\big(p_i^{m_i}(\varphi_i)\big) \subseteq \mathrm{img}(\pi_i)$, erhalten. □

VI.4.12. Bemerkung. Ist $\varphi\colon V \to V$ linear und bezeichnen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ alle verschiedenen Eigenwerte von φ, dann hat die eindeutige Primfaktorzerlegung des charakteristischen Polynoms von φ die Form

$$p = c(z - \lambda_1)^{m_1} \cdots (z - \lambda_k)^{m_k} p_1^{\tilde{m}_1} \cdots p_l^{\tilde{m}_l},$$

wobei $m_1, \ldots, m_k$ die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte bezeichnen. Die Zerlegung aus Satz VI.4.11,

$$V = \overbrace{\ker\big((\varphi - \lambda_1\,\mathrm{id}_V)^{m_1}\big)}^{\tilde{E}_{\lambda_1}} \oplus \cdots \oplus \overbrace{\ker\big((\varphi - \lambda_k\,\mathrm{id}_V)^{m_k}\big)}^{\tilde{E}_{\lambda_k}} \oplus \underbrace{\ker\big(p_1^{\tilde{m}_1}(\varphi)\big) \oplus \cdots \oplus \ker\big(p_l^{\tilde{m}_l}(\varphi)\big)}_{W}$$

verfeinert die Zerlegung aus Satz VI.3.7.

VI.4.13. Beispiel. Die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

hat charakteristisches Polynom $p = (z^2+1)(z^2+4)$ und daher keine reellen Eigenwerte. Es gilt:

$$\ker(A^2 + I_4) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & -15 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\ker(A^2 + 4I_4) = \ker \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 18 \\ 0 & 3 & -15 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 15 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -18 \\ -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Somit

$$S^{-1}AS = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ \hline & & 0 & 2 \\ & & -2 & 0 \end{array}\right), \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -18 \\ 0 & 1 & 15 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

VI.4.14. Definition. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\beta > 0$ definieren wir den reellen Jordanblock zum komplexen Eigenwert $\alpha + \mathbf{i}\beta$ durch

$$J_{2m}(\alpha,\beta) := \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & \multicolumn{2}{c}{I_2} & & & \\ \beta & \alpha & & & & & \\ & & \alpha & -\beta & \ddots & & \\ & & \beta & \alpha & & & \\ & & & & \ddots & \multicolumn{2}{c}{I_2} \\ & & & & & \alpha & -\beta \\ & & & & & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in M_{2m\times 2m}(\mathbb{R})$$

Das charakteristische Polynom eines solchen Jordanblocks ist

$$p = \big((z-\alpha)^2 + \beta^2\big)^m = \big(z - (\alpha + \mathbf{i}\beta)\big)^m \big(z - (\alpha - \mathbf{i}\beta)\big)^m$$

und hat daher zwei komplex konjugierte Nullstellen, $\lambda = \alpha \pm \mathbf{i}\beta$, beide mit algebraischer Vielfachheit m.

VI.4.15. Lemma. *Sei V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear mit charakteristischem Polynom*

$$p = \big((z-\alpha)^2 + \beta^2\big)^m,$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$. Dann existiert eine Basis B von V, sodass die Matrixdarstellung $[\varphi]_{BB}$ folgende Blockdiagonalgestalt hat:

$$[\varphi]_{BB} = \begin{pmatrix} J_{2m_1}(\alpha,\beta) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{2m_n}(\alpha,\beta) \end{pmatrix}$$

Dabei sind $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ und $m_1 + \cdots + m_n = m$. Für die Anzahl der auftretenden Jordanblöcke gilt weiters:

$$2\sharp\{j \mid m_j \geq r\} = \dim\ker\Big(\big((\varphi - \alpha\,\mathrm{id}_V)^2 + \beta^2\,\mathrm{id}_V\big)^r\Big) \\ - \dim\ker\Big(\big((\varphi - \alpha\,\mathrm{id}_V)^2 + \beta^2\,\mathrm{id}_V\big)^{r-1}\Big)$$

Beweis. O.B.d.A. sei $V = \mathbb{R}^{2m}$ und φ durch eine Matrix $A \in M_{2m\times 2m}(\mathbb{R})$ gegeben, $\varphi(x) = Ax$. Wir fassen A nun als komplexe Matrix auf, $A \in M_{2m\times 2m}(\mathbb{C})$, und betrachten die damit assoziierte komplex lineare Abbildung $\varphi_{\mathbb{C}} \colon \mathbb{C}^{2m} \to \mathbb{C}^{2m}$, $\varphi_{\mathbb{C}}(x) := Ax$. Für ihr charakteristisches Polynom gilt

$$p = (z-\lambda)^m (z-\bar\lambda)^m.$$

wobei $\lambda := \alpha + \mathbf{i}\beta$ und $\bar\lambda = \alpha - \mathbf{i}\beta$. Nach Satz VI.3.7 gilt

$$\mathbb{C}^{2m} = \tilde E_\lambda \oplus \tilde E_{\bar\lambda}. \tag{VI.36}$$

Da A reelle Eintragungen hat gilt

$$\overline{\tilde E_\lambda} = \tilde E_{\bar\lambda} \qquad \text{und} \qquad \overline{\tilde E_{\bar\lambda}} = \tilde E_\lambda, \tag{VI.37}$$

denn für $x \in \tilde E_\lambda$ ist $(A - \lambda I_{2m})^m x = 0$, also

$$(A - \bar\lambda I_{2m})^m \bar x = (\bar A - \bar\lambda \bar I_{2m})^m \bar x = \overline{(A - \lambda I_{2m})^m x} = \bar 0 = 0,$$

und daher $\bar x \in \tilde E_{\bar\lambda}$. Nach Satz VI.3.19 existieren eine Basis $c_1, \dots, c_m$ von $\tilde E_\lambda$ und $\varepsilon_j \in \{0,1\}$, sodass

$$Ac_j = \lambda c_j + \varepsilon_{j-1} c_{j-1}, \qquad j = 1, \dots, m,$$

wobei $\varepsilon_0 := 0$. Da $\bar A = A$ und $\bar\varepsilon_j = \varepsilon_j$, folgt daraus

$$A\bar c_j = \bar\lambda \bar c_j + \varepsilon_{j-1}\bar c_{j-1}, \qquad j = 1, \dots, m.$$

Setzen wir

$$b_j := \tfrac{1}{2}(c_j + \bar c_j), \quad b'_j := \tfrac{1}{2\mathbf{i}}(c_j - \bar c_j), \quad j = 1, \dots, m,$$

so gilt

$$\bar b_j = b_j, \qquad \bar b'_j = b'_j, \qquad c_j = b_j + \mathbf{i} b'_j, \qquad \bar c_j = b_j - \mathbf{i} b'_j,$$

sowie

$$\lambda c_j = \big(\alpha b_j - \beta b'_j\big) + \mathbf{i}\big(\beta b_j + \alpha b'_j\big).$$

Durch einfache Rechnung folgt

$$Ab_j = \alpha b_j + \beta b'_j + \varepsilon_{j-1} b_{j-1}, \qquad Ab'_j = -\beta b_j + \alpha b'_j + \varepsilon_{j-1} b'_{j-1}. \tag{VI.38}$$

Wegen (VI.37) bildet $\bar c_1, \dots, \bar c_m$ eine Basis von $\tilde E_{\bar\lambda}$, also ist $c_1, \dots, c_m, \bar c_1, \dots, \bar c_m$ eine Basis von $\mathbb{C}^{2m}$, siehe (VI.36). Da $b_j + \mathbf{i} b'_j = c_j$ und $b_j - \mathbf{i} b'_j = \bar c_j$ ist auch

$$B = b_1, b'_1, b_2, b'_2, \dots, b_m, b'_m$$

eine Basis von $\mathbb{C}^{2m}$. Nach (VI.38) gilt

$$[\varphi_{\mathbb{C}}]_{BB} = \begin{pmatrix} \begin{matrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{matrix} & \varepsilon_1 I_2 & & \\ & \begin{matrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{matrix} & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon_{m-1} I_2 \\ & & & \begin{matrix}\alpha & -\beta \\ \beta & \alpha\end{matrix} \end{pmatrix}$$

Da $\bar{b}_j = b_j$ und $\bar{b}'_j = b'_j$ liegen alle Basisvektoren von B in $\mathbb{R}^{2m} \subseteq \mathbb{C}^{2m}$, also bildet B auch eine Basis des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^{2m}$ und $[\varphi]_{BB} = [\varphi_{\mathbb{C}}]_{BB}$ hat die gewünschte Gestalt. Die Formel für die Anzahl der verschiedenen Jordanblöcke folgt aus, siehe Aufgabe 72,

$$\dim\ker\Big(\big((\varphi - \alpha\,\mathrm{id}_V)^2 + \beta^2\,\mathrm{id}_V\big)^r\Big) = 2\sharp\{j \mid m_j \geq 1\} + \cdots + 2\sharp\{j \mid m_j \geq r\}. \quad \square$$

VI.4.16. Satz (Reelle Jordan'sche Normalform). *Sei V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ linear und*

$$p = (z-\lambda_1)^{m_1} \cdots (z-\lambda_k)^{m_k} \big((z-\alpha_1)^2 + \beta_1^2\big)^{\tilde{m}_1} \cdots \big((z-\alpha_l)^2 + \beta_l^2\big)^{\tilde{m}_l}$$

die eindeutige Primfaktorzerlegung des charakteristischen Polynoms von φ, wobei $\lambda_i, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$ und $\beta_i > 0$. Dann existiert eine Basis B von V, sodass $[\varphi]_{BB}$ Blockdiagonalgestalt hat, wobei entlang der Diagonale folgende Jordanblöcke stehen:

$$J_{m_{1,1}}(\lambda_1), \dots, J_{m_{1,n_1}}(\lambda_1), \dots, J_{m_{k,1}}(\lambda_k), \dots, J_{m_{k,n_k}}(\lambda_k),$$
$$J_{2\tilde{m}_{1,1}}(\alpha_1, \beta_1), \dots, J_{2\tilde{m}_{1,\tilde{n}_1}}(\alpha_1, \beta_1), \dots, J_{2\tilde{m}_{l,1}}(\alpha_l, \beta_l), \dots, J_{2\tilde{m}_{l,\tilde{n}_l}}(\alpha_l, \beta_l).$$

Dabei sind $m_{i,j}, \tilde{m}_{i,j}, n_i, \tilde{n}_i \in \mathbb{N}$ und es gilt

$$m_{i,1} + \cdots + m_{i,n_i} = m_i \quad \textit{sowie} \quad \tilde{m}_{i,1} + \cdots + \tilde{m}_{i,\tilde{n}_i} = \tilde{m}_i.$$

Für die Anzahl der auftretenden Jordanblöcke gilt weiters:

$$\begin{aligned} \sharp\{j \mid m_{i,j} \geq r\} &= \dim\ker\big((\varphi - \lambda_i\,\mathrm{id}_V)^r\big) - \dim\ker\big((\varphi - \lambda_i\,\mathrm{id}_V)^{r-1}\big) \\ 2\sharp\{j \mid \tilde{m}_{i,j} \geq r\} &= \dim\ker\Big(\big((\varphi - \alpha_i\,\mathrm{id}_V)^2 + \beta_i^2\,\mathrm{id}_V\big)^r\Big) \\ &\qquad - \dim\ker\Big(\big((\varphi - \alpha_i\,\mathrm{id}_V)^2 + \beta_i^2\,\mathrm{id}_V\big)^{r-1}\Big) \end{aligned}$$

Insbesondere ist diese Matrixdarstellung, $[\varphi]_{BB}$, bis auf die Reihenfolge der Jordanblöcke eindeutig bestimmt. Zwei lineare Abbildungen zwischen reellen Vektorräumen sind genau den ähnlich, wenn ihre Jordan'schen Normalformen, bis auf die Reihenfolge der Jordanblöcke, übereinstimmen.

Beweis. Nach dem Satz von Caley–Hamilton gilt $p(\varphi) = 0$. Aufgrund der Primärzerlegung in Satz VI.4.11 genügt es daher Abbildungen mit charakteristischem Polynom $p = (z-\lambda)^m$ bzw. $p = ((z-\alpha)^2 + \beta^2)^m$ zu betrachten. Erstere haben wir in Satz VI.3.19 behandelt, die anderen in Lemma VI.4.15. $\square$

VI.4.17. Korollar. *Sei V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Dann existiert eine Basis B von V, sodass die Matrixdarstellung $[\varphi]_{BB}$ fast obere Dreiecksgestalt hat, soll heißen,*

$$[\varphi]_{BB} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ & & \lambda_k & * & * & * & & \vdots \\ & & & \alpha_1 & -\beta_1 & * & \ddots & \vdots \\ & & & \beta_1 & \alpha_1 & * & \ddots & * \\ & & & & & \ddots & * & * \\ & & & & & & \alpha_l & -\beta_l \\ & & & & & & \beta_l & \alpha_l \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \alpha_1 + \mathbf{i}\beta_1, \dots, \alpha_l + \mathbf{i}\beta_l$ alle komplexen Eigenwerte mit nicht negativen Imaginärteil, ihrer algebraischen Vielfachheit entsprechend oft gelistet, bezeichnen, $\lambda_i, \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i > 0$. In anderen Worten:

$$p_\varphi = (z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_k)\big((z - \alpha_1)^2 + \beta_1^2\big) \cdots \big((z - \alpha_l)^2 + \beta_l^2\big).$$

VI.4.18. Bemerkung (Minimalpolynom). Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine quadratische Matrix. Da $\dim(M_{n\times n}(\mathbb{K})) = n^2$, sind die Matrizen $I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^{n^2}$ linear abhängig in $M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Es existieren daher Skalare $q_0, \dots, q_{n^2} \in \mathbb{K}$, die nicht alle verschwinden, sodass $\sum_{i=0}^{n^2} q_i A^i = 0$. Für $q := \sum_{i=0}^{n^2} q_i z^i$ gilt daher $0 \neq q \in \mathbb{K}[z]$ und $q(A) = 0$. Somit ist

$$J_A := \big\{p \in \mathbb{K}[z] \bigm| p(A) = 0\big\} \neq \{0\}.$$

Offensichtlich bildet J_A einen Teilraum von $\mathbb{K}[z]$, und für jedes $p \in J_A$ und $r \in \mathbb{K}[z]$ gilt auch $rp \in J_A$, denn $(rp)(A) = r(A)p(A) = r(A)0 = 0$. Solche Teilräume werden *Ideale* genannt. Sei nun $0 \neq m_A \in J_A$ normiert mit minimalem Grad, d.h. $\deg(m_A) \leq \deg(p)$, für jedes $0 \neq p \in J_A$. Es gilt dann

$$J_A = \big\{sm_A \bigm| s \in \mathbb{K}[z]\big\},$$

denn zu $p \in J_A$ existieren $s, r \in \mathbb{K}[z]$ mit $p = sm_A + r$ und $\deg(r) < \deg(m_A)$, folglich $r = p - sm_A \in J_A$, und wegen der Minimalität von $\deg(m_A)$ muss $r = 0$ gelten, also $p = sm_A$. Solche Ideale, die von einem Element, m_A, erzeugt werden, heißen *Hauptideale*. Das Argument oben zeigt, dass jedes Ideal von $\mathbb{K}[z]$ ein Hauptideal ist. Insbesondere sehen wir, dass das Polynom m_A eindeutig bestimmt ist, es wird das *Minimalpolynom* von A genannt. Nach dem Satz von Caley–Hamilton liegt auch das charakteristische Polynom von A in diesem Ideal, $p_A \in J_A$, es wird daher vom Minimalpolynom geteilt, $m_A | p_A$.