

VII. Euklidische und unitäre Vektorräume

Wir werden in diesem Abschnitt Vektorräume, die mit einem inneren Produkt (Skalarprodukt) ausgestattet sind, untersuchen. Als prototypisches Beispiel dient das bekannte standard Euklidische innere Produkt auf \mathbb{R}^n ,

$$\langle x, y \rangle = x^t y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Damit lassen sich Längen von Vektoren, Winkel zwischen Vektoren, orthogonale Komplemente, Isometrien (d.h. Längen und Winkel bewahrende lineare Abbildungen), u.v.a.m. definieren und studieren. Folgende Eigenschaften dieses inneren Produkts haben sich als wesentlich herausgestellt:

- (a) *Bilinearität*: Die Abbildung $\langle -, - \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\langle x, y \rangle = x^t y$, ist bilinear, d.h. linear in jeder der beiden Eintragungen. Es gilt daher $\langle x + x', y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle$, $\langle x, y + y' \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$ und $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle$, für alle $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.
- (b) *Symmetrie*: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- (c) *Positivität*: $\langle x, x \rangle > 0$, für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$.

VII.1. Symmetrische Bilinearformen. Eine naheliegende Verallgemeinerung der Eigenschaften (a) und (b) oben führt zum Begriff der symmetrischen Bilinearform auf allgemeinen Vektorräumen.

VII.1.1. DEFINITION (Symmetrische Bilinearformen). Sei V ein Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} . Unter einer *Bilinearform* auf V verstehen wir eine Abbildung

$$\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{K},$$

die linear in jeder Eintragung ist, d.h.

$$\beta(v + v', w) = \beta(v, w) + \beta(v', w), \quad \beta(\lambda v, w) = \lambda \beta(v, w)$$

und

$$\beta(v, w + w') = \beta(v, w) + \beta(v, w'), \quad \beta(v, \lambda w) = \lambda \beta(v, w),$$

für alle $v, v', w, w' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Gilt darüber hinaus

$$\beta(v, w) = \beta(w, v),$$

so wird β eine *symmetrische* Bilinearform genannt.

VII.1.2. BEMERKUNG. Ist $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ linear in der ersten Eintragung und symmetrisch, dann muss es auch linear in der zweiten Eintragung sein, siehe Aufgabe 80.

Die Menge der Bilinearformen auf V bildet einen Vektorraum bezüglich der Operationen

$$(\beta_1 + \beta_2)(v, w) := \beta_1(v, w) + \beta_2(v, w), \quad (\lambda \beta)(v, w) = \lambda \beta(v, w).$$

Dabei sind β, β_1, β_2 Bilinearformen auf V , $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v, w \in V$. Die Menge der symmetrischen Bilinearformen auf V bildet einen Teilraum und ist daher selbst ein Vektorraum über \mathbb{K} , siehe Aufgabe 79.

VII.1.3. BEISPIEL (Mit Matrizen assoziierte Bilinearformen auf \mathbb{K}^n). Jede quadratische Matrix $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ liefert eine Bilinearform auf \mathbb{K}^n ,

$$\beta_A: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}, \quad \beta_A(x, y) := x^t A y,$$

denn $(x_1 + x_2)^t A y = x_1^t A y + x_2^t A y$, $x^t A (y_1 + y_2) = x^t A y_1 + x^t A y_2$ und $(\lambda x)^t A y = \lambda(x^t A y) = x^t A (\lambda y)$. Beachte, dass die Matrix A durch die Bilinearform β_A eindeutig bestimmt ist, denn $A_{ij} = \beta_A(e_i, e_j)$. Diese Bilinearform β_A ist genau dann symmetrisch, wenn die Matrix A symmetrisch ist, d.h. $A^t = A$, denn $\beta_A(y, x) = y^t A x = (y^t A x)^t = x^t A^t y = \beta_{A^t}(x, y)$. Umgekehrt lässt sich jede (symmetrische) Bilinearform $\beta: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ durch eine (symmetrische) Matrix A beschreiben, denn für alle $x, y \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\beta(x, y) = \beta\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \beta(e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j A_{ij} = \beta_A(x, y),$$

also $\beta = \beta_A$, wobei $A_{ij} := \beta(e_i, e_j)$. Beachte auch $\beta_{A+A'} = \beta_A + \beta_{A'}$ und $\beta_{\lambda A} = \lambda \beta_A$, d.h. die Zuordnung $A \leftrightarrow \beta_A$ liefert einen linearen Isomorphismus zwischen dem Vektorraum der (symmetrischen) $(n \times n)$ -Matrizen und dem Vektorraum der (symmetrischen) Bilinearformen auf \mathbb{K}^n . Insbesondere hat der Vektorraum der Bilinearformen auf \mathbb{K}^n Dimension n^2 und der Teilraum der symmetrischen Bilinearformen auf \mathbb{K}^n hat Dimension $n(n+1)/2$.

VII.1.4. BEISPIEL. Das Euklidische innere Produkt, $\langle -, - \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x^t y = x^t \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} y,$$

ist eine symmetrische Bilinearform auf \mathbb{R}^n .

VII.1.5. BEISPIEL. Die Lorentz Metrik, $g: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x, y) = -x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = x^t \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} y,$$

ist eine symmetrische Bilinearform auf \mathbb{R}^4 .

VII.1.6. BEISPIEL. Die Abbildung

$$\beta: M_{m \times n}(\mathbb{K}) \times M_{m \times n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}, \quad \beta(A, B) := \text{tr}(A^t B)$$

ist eine symmetrische Bilinearform auf dem Vektorraum der Matrizen, $M_{m \times n}(\mathbb{K})$.

VII.1.7. BEISPIEL. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und bezeichnen $C^0(I; \mathbb{R})$ den Vektorraum der stetigen Funktionen auf I . Dann bildet

$$\beta: C^0(I; \mathbb{R}) \times C^0(I; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \beta(f, g) := \int_I f(t)g(t)dt,$$

eine symmetrische Bilinearform auf $C^0(I; \mathbb{R})$.

VII.1.8. DEFINITION (Matrixdarstellung). Sei $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine Bilinearform auf einem n -dimensionalen \mathbb{K} -Vektorraum V . Ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine geordnete Basis von V , dann wird die Matrix $[\beta]_B \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$,

$$([\beta]_B)_{ij} := \beta(b_i, b_j), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

als *Matrixdarstellung von β bezüglich der Basis B* bezeichnet.

VII.1.9. PROPOSITION. Sei V ein n -dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum. Jede geordnete Basis B von V liefert einen linearen Isomorphismus, $\beta \leftrightarrow [\beta]_B$, zwischen dem Vektorraum der (symmetrischen) Bilinearformen auf V und dem Vektorraum der (symmetrischen) $(n \times n)$ -Matrizen. Insbesondere ist β durch die Matrix $[\beta]_B$ eindeutig bestimmt,

$$\beta(v, w) = [v]_B^t [\beta]_B [w]_B, \quad v, w \in V,$$

und zu jeder (symmetrischen) $(n \times n)$ -Matrix A existiert eine eindeutig bestimmte (symmetrische) Bilinearform β auf V , sodass $[\beta]_B = A$. Ist C eine weitere geordnete Basen von V , dann gilt

$$[\beta]_B = T_{CB}^t [\beta]_C T_{CB},$$

wobei $T_{CB} \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ die Matrix zum Basiswechsel von B nach C bezeichnet.

BEWEIS. Die Zuordnung $\beta \mapsto [\beta]_B$ ist linear, d.h. für Bilinearformen β, β_1, β_2 auf V und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$[\beta_1 + \beta_2]_B = [\beta_1]_B + [\beta_2]_B \quad \text{und} \quad [\lambda\beta]_B = \lambda[\beta]_B,$$

denn $([\beta_1 + \beta_2]_B)_{ij} = (\beta_1 + \beta_2)(b_i, b_j) = \beta_1(b_i, b_j) + \beta_2(b_i, b_j) = ([\beta_1]_B)_{ij} + ([\beta_2]_B)_{ij} = ([\beta_1]_B + [\beta_2]_B)_{ij}$, und analog $([\lambda\beta]_B)_{ij} = (\lambda\beta)(b_i, b_j) = \lambda(\beta)(b_i, b_j) = \lambda([\beta]_B)_{ij}$.

Für $v = \sum_{i=1}^n ([v]_B)_i b_i$ und $w = \sum_{j=1}^n ([w]_B)_j b_j$ gilt weiters

$$\begin{aligned} \beta(v, w) &= \beta\left(\sum_{i=1}^n ([v]_B)_i b_i, \sum_{j=1}^n ([w]_B)_j b_j\right) = \sum_{i,j=1}^n ([v]_B)_i ([w]_B)_j \beta(b_i, b_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^n ([v]_B)_i ([w]_B)_j ([\beta]_B)_{ij} = [v]_B^t [\beta]_B [w]_B, \end{aligned}$$

also ist die Zuordnung $\beta \mapsto [\beta]_B$ injektiv. Um auch die Surjektivität einzusehen, sei nun $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$. Definieren wir $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ durch $\beta(v, w) := [v]_B^t A [w]_B$, so ist β offensichtlich bilinear und $[\beta]_B = A$. Dies zeigt, dass die Zuordnung $\beta \mapsto [\beta]_B$ auch surjektiv, also ein Isomorphismus ist. Offensichtlich ist die Matrix $[\beta]_B$ genau dann symmetrisch, wenn die Bilinearform β symmetrisch ist. Für jede

weitere geordnete Basis C haben wir $[v]_C = T_{CB}[v]_B$ und $[w]_C = T_{CB}[w]_B$, somit

$$\begin{aligned} [v]_B^t [\beta]_B [w]_B &= \beta(v, w) = [v]_C^t [\beta]_C [w]_C \\ &= (T_{CB}[v]_B)^t [\beta]_C (T_{CB}[w]_B) = [v]_B^t \left(T_{CB}^t [\beta]_C T_{CB} \right) [w]_B, \end{aligned}$$

also $[\beta]_B = T_{CB}^t [\beta]_C T_{CB}$. \square

VII.1.10. BEMERKUNG. Beachte, dass sich die Matrix einer Bilinearform bei Basiswechsel anders transformiert, als die Matrix einer linearen Abbildung. Sind B, C zwei Basen von V und ist $\varphi: V \rightarrow V$ linear, dann gilt $[\varphi]_{BB} = T_{CB}^{-1} [\varphi]_{CC} T_{CB}$, wohingegen $[\beta]_B = T_{CB}^t [\beta]_C T_{CB}$, für jede Bilinearform β auf V .

VII.1.11. BEMERKUNG (Orthogonale Gruppe). Ist $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform, dann bildet

$$O(V, \beta) := \{ \varphi \in \text{GL}(V) \mid \forall v, w \in V : \beta(\varphi(v), \varphi(w)) = \beta(v, w) \}$$

eine Gruppe. Ist V endlich dimensional, B eine Basis von V und $A := [\beta]_B$, dann schränkt sich der Gruppenisomorphismus $\text{GL}(V) \cong \text{GL}_n(\mathbb{K})$, $\varphi \leftrightarrow [\varphi]_{BB}$, siehe Bemerkung IV.6.17, zu einem Gruppenisomorphismus,

$$O(V, \beta) \cong \{ X \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \mid X^t A X = A \},$$

ein. Dies folgt aus Proposition VII.1.9, denn

$$\begin{aligned} \beta(\varphi(v), \varphi(w)) &= [\varphi(v)]_B^t [\beta]_B [\varphi(w)]_B \\ &= ([\varphi]_{BB}[v]_B)^t [\beta]_B ([\varphi]_{BB}[w]_B) = [v]_B^t \left([\varphi]_{BB}^t [\beta]_B [\varphi]_{BB} \right) [w]_B \end{aligned}$$

und $\beta(v, w) = [v]_B^t [\beta]_B [w]$.

Jede Bilinearform $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ definiert eine lineare Abbildung

$$\check{\beta}: V \rightarrow V^*, \quad \check{\beta}(v)(w) := \beta(v, w),$$

und jede linear Abbildung $V \rightarrow V^*$ ist von dieser Form für eine eindeutig bestimmte Bilinearform β . Die Bilinearform β ist genau dann symmetrisch, wenn die Komposition

$$V \xrightarrow{\iota} V^{**} \xrightarrow{\check{\beta}^t} V^*$$

mit $\check{\beta}$ übereinstimmt, denn $(\check{\beta}^t(\iota(v)))(w) = \iota(v)(\check{\beta}(w)) = \check{\beta}(w)(v)$. Dabei bezeichnet ι die kanonische Inklusion aus Proposition III.4.13 und $\check{\beta}^t$ die zu $\check{\beta}$ duale Abbildung. Ist V endlich dimensional, B eine Basis von V und B^* die duale Basis von V^* , dann gilt

$$[\beta]_B = [\check{\beta}]_{B^*B}^t, \tag{VII.1}$$

denn $\check{\beta}(b_i) = \sum_{j=1}^n \check{\beta}(b_i)(b_j) b_j^* = \sum_{j=1}^n \beta(b_i, b_j) b_j^* = \sum_{j=1}^n ([\beta]_B)_{ij} b_j^*$, wobei $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $B^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$.

VII.1.12. DEFINITION (Rang und Kern). Sei V ein endlich dimensionaler \mathbb{K} -Vektorraum und $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform. Der Teilraum

$$\ker(\beta) := \{v \in V \mid \forall w \in V : \beta(v, w) = 0\} = \ker(\check{\beta}: V \rightarrow V^*)$$

wird *Kern* oder *Radikal* der symmetrischen Bilinearform genannt. Unter dem *Rang* von β verstehen wir den Rang der linearen Abbildung $\check{\beta}: V \rightarrow V^*$, d.h.

$$\text{rank}(\beta) := \text{rank}(\check{\beta}: V \rightarrow V^*) = \text{rank}([\beta]_B),$$

wobei B eine beliebige Basis von V bezeichnet, siehe (VII.1). Beachte

$$\dim \ker(\beta) + \text{rank}(\beta) = \dim(V), \quad (\text{VII.2})$$

denn $\dim \ker(\check{\beta}) + \dim \text{img}(\check{\beta}) = \dim(V)$ nach Korollar IV.2.9.

VII.1.13. PROPOSITION. Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} und $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform. Dann sind äquivalent:

- (a) Zu jedem $0 \neq v \in V$ existiert $w \in V$, sodass $\beta(v, w) \neq 0$.
- (b) Die lineare Abbildung $\check{\beta}: V \rightarrow V^*$, $\check{\beta}(v) = \beta(v, -)$, ist ein Isomorphismus.
- (c) $\ker(\beta) = \{0\}$.
- (d) $\text{rank}(\beta) = \dim(V)$.
- (e) Für eine (und dann jede) Basis B von V ist die Matrix $[\beta]_B$ invertierbar.

BEWEIS. Die Äquivalenz (a) \Leftrightarrow (c) ist offensichtlich. Da $\dim(V^*) = \dim(V)$ erhalten wir (b) \Leftrightarrow (c) \Leftrightarrow (d) aus Korollar IV.2.11. Die Äquivalenz (b) \Leftrightarrow (e) folgt aus (VII.1). \square

VII.1.14. DEFINITION (Nicht degenerierte Bilinearformen). Eine Bilinearform auf einem endlich dimensionalen Vektorraum wird *nicht-degeneriert* genannt, wenn sie die äquivalenten Eigenschaften in Proposition VII.1.13 hat. Eine symmetrische Matrix $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ wird nicht-degeneriert genannt, falls die damit assoziierte symmetrische Bilinearform $\beta_A: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, $\beta_A(x, y) = x^t A y$, nicht-degeneriert ist. Nach Proposition VII.1.13 ist dies genau dann der Fall, wenn A invertierbar ist.

VII.1.15. BEISPIEL. Das Euklidische innere Produkt aus Beispiel VII.1.4 ist nicht-degeneriert. Auch die Lorentz Metrik aus Beispiel VII.1.5 ist nicht-degeneriert. Ebenso ist die Bilinearform aus Beispiel VII.1.6 nicht-degeneriert. Für die Bilinearform aus Beispiel VII.1.7 gilt $\ker(\beta) = \{0\}$, aber $\check{\beta}: C^0(I, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{R})^*$ ist *nicht* surjektiv. Für jedes $x \in I$ ist nämlich $\text{ev}_x: C^0(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{ev}_x(g) := g(x)$, ein lineares Funktional, aber es existiert *kein* $f \in C^0(I, \mathbb{R})$, sodass $\text{ev}_x(g) = \int_I f(t)g(t)dt$, für alle $g \in C^0(I, \mathbb{R})$.

VII.1.16. BEMERKUNG. Ist $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine nicht-degenerierte Bilinearform auf einem endlich dimensionalen Vektorraum, V , dann gilt

$$O(V, \beta) = \{\varphi \in \text{end}(V) \mid \forall v, w \in V : \beta(\varphi(v), \varphi(w)) = \beta(v, w)\},$$

d.h. eine lineare Abbildung, die β bewahrt, ist automatisch invertierbar. Aus $\beta(\varphi(v), \varphi(w)) = \beta(v, w)$ folgt nämlich $\ker(\varphi) \subseteq \ker(\beta)$, also $\ker(\varphi) = \{0\}$ und daher $\varphi \in \text{GL}(V)$.

Ist $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine (symmetrische) Bilinearform und $W \subseteq V$ ein Teilraum, dann ist offensichtlich auch die Einschränkung

$$\beta|_W: W \times W \rightarrow \mathbb{K}, \quad \beta|_W(w, w') := \beta(w, w'), \quad w, w' \in W,$$

eine (symmetrische) Bilinearform auf W .

VII.1.17. PROPOSITION. *Sei $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlich dimensionalen Vektorraum V . Ist W ein zu $\ker(\beta)$ komplementärer Teilraum, dann ist $\beta|_W$ nicht-degeneriert. Es existiert daher eine Basis B von V , sodass $[\beta]_B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, wobei $A \in M_{k \times k}(\mathbb{K})$ invertierbar und*

$$k = \text{rank}(\beta) = \max\{\dim(W) \mid W \text{ Teilraum von } V, \text{ s.d. } \beta|_W \text{ nicht-deg.}\}.$$

BEWEIS. Sei W ein zu $\ker(\beta)$ komplementärer Teilraum, d.h. $V = W \oplus \ker(\beta)$. Sei nun $w \in \ker(\beta|_W)$, d.h. $w \in W$ und $\beta(w, w') = 0$, für alle $w' \in W$. Andererseits haben wir auch $\beta(w, u) = 0$, für alle $u \in \ker(\beta)$. Da sich jedes $v \in V$ in der Form $v = u + w'$ schreiben lässt, folgt $\beta(w, v) = 0$, für alle $v \in V$, also $w \in \ker(\beta)$. Da $w \in W$, folgt $w \in W \cap \ker(\beta) = \{0\}$, also $w = 0$. Dies zeigt $\ker(\beta|_W) = \{0\}$, nach Proposition VII.1.13 ist $\beta|_W$ daher nicht-degeneriert. Ist $\tilde{B} = (b_1, \dots, b_k)$ eine Basis von W und b_{k+1}, \dots, b_n eine Basis von $\ker(\beta)$, dann bildet $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V und $[\beta]_B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, wobei $A \in M_{k \times k}(\mathbb{K})$. Weiters ist $A = [\beta|_W]_{\tilde{B}}$ invertierbar, denn $\beta|_W$ ist nicht-degeneriert, siehe Proposition VII.1.13. Daraus, oder via (VII.2), folgt nun auch $k = \text{rank}(\beta)$ und

$$\text{rank}(\beta) \leq \max\{\dim(W) \mid W \text{ Teilraum von } V, \text{ s.d. } \beta|_W \text{ nicht-deg.}\}. \quad (\text{VII.3})$$

Ist W ein beliebiger Teilraum von V , sodass $\beta|_W$ nicht-degeneriert ist, dann muss $W \cap \ker(\beta) = \{0\}$ gelten, und daher $\dim(W) \leq \dim(V) - \dim \ker(\beta) = \text{rank}(\beta)$, siehe (VII.2). Somit gilt in (VII.3) auch die umgekehrte Ungleichheit. \square

VII.1.18. DEFINITION (Quadratische Formen). Ist $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform, dann wird die Abbildung

$$q: V \rightarrow \mathbb{K}, \quad q(v) := \beta(v, v),$$

als die mit β assoziierte *quadratische Form* bezeichnet.

Beachte, dass die quadratische Form einer symmetrischen Bilinearform homogen vom Grad zwei ist, d.h.

$$q(\lambda v) = \lambda^2 q(v), \quad \lambda \in \mathbb{K}, \quad v \in V.$$

Gilt $0 \neq 2 \in \mathbb{K}$, dann kann die Bilinearform β aus der quadratischen Form q mit Hilfe der sogenannten *Polarisierungsidentität* zurückgewonnen werden, siehe Proposition VII.1.22 unten. Wir haben die Bedingung $0 \neq 2 \in \mathbb{K}$ schon öfters angetroffen und wollen diese nun formalisieren.

VII.1.19. DEFINITION (Charakteristik eines Körpers). Unter der *Charakteristik* eines Körpers \mathbb{K} verstehen wir die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$, sodass

$$k = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{k \text{ Summanden}} = 0 \in \mathbb{K}.$$

Existiert keine solche Zahl k , d.h. ist $0 \neq k \in \mathbb{K}$, für jedes $k \in \mathbb{N}$, dann wird die Charakteristik von \mathbb{K} als 0 definiert. Wir werden die Charakteristik von \mathbb{K} mit $\text{char}(\mathbb{K})$ bezeichnen.

VII.1.20. BEISPIEL. Es gilt $\text{char}(\mathbb{Q}) = \text{char}(\mathbb{R}) = \text{char}(\mathbb{C}) = 0$ und $\text{char}(\mathbb{Z}_p) = p$, für jede Primzahl p . In einem Körper \mathbb{K} gilt $0 \neq 2 \in \mathbb{K}$ genau dann, wenn $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$.

VII.1.21. BEMERKUNG. Ist die Charakteristik eines Körpers nicht 0, so muss sie eine Primzahl sein. Ist nämlich $\text{char}(\mathbb{K}) = nm$ mit $n, m \in \mathbb{N}$, dann gilt $0 = nm \in \mathbb{K}$, also o.B.d.A. $0 = n \in \mathbb{K}$ und daher $n = \text{char}(\mathbb{K})$, $m = 1$. Dies zeigt, dass $\text{char}(\mathbb{K})$ keine echten Teiler besitzt und daher eine Primzahl ist.

VII.1.22. PROPOSITION (Polarisierungsformel). Sei V ein Vektorraum über einem Körper mit $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ und $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform mit assoziierter quadratischer Form $q(v) = \beta(v, v)$. Dann gilt

$$\beta(v, w) = \frac{1}{2}(q(v+w) - q(v) - q(w)) = \frac{1}{4}(q(v+w) - q(v-w)),$$

d.h. β kann aus q zurückgewonnen werden.

BEWEIS. Aus der Bilinearität und Symmetrie von β folgt

$$\beta(v+w, v+w) = \beta(v, v) + 2\beta(v, w) + \beta(w, w),$$

also

$$2\beta(v, w) = q(v+w) - q(v) - q(w).$$

Nach Voraussetzung ist $0 \neq 2 \in \mathbb{K}$, und wir erhalten die erste Polarisierungsformel. Ersetzen wir in der letzten Gleichung w durch $-w$, erhalten wir

$$-2\beta(v, w) = q(v-w) - q(v) - q(w),$$

denn $\beta(v, -w) = -\beta(v, w)$ und $q(-w) = q(w)$. Subtraktion der letzten beiden Gleichungen liefert

$$4\beta(v, w) = q(v+w) - q(v-w),$$

und somit auch die zweite Polarisierungsformel. Beachte, dass wegen $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ auch $4 \neq 0 \in \mathbb{K}$. \square

VII.1.23. BEISPIEL. Betrachte den Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ und die mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ assoziierte symmetrische Bilinearform, $\beta: \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \rightarrow \mathbb{K}$, $\beta(x, y) = x^t A y = x_1 y_2 + x_2 y_1$. Für die assoziierte quadratische Form gilt $q(x) = \beta(x, x) = x_1 x_2 + x_2 x_1 = 2x_1 x_2 = 0$. In diesem Fall kann die Bilinearform β also *nicht* aus der zugehörigen quadratischen Form rekonstruiert werden. Die Voraussetzung $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ in Proposition VII.1.22 kann daher nicht ersatzlos gestrichen werden.

VII.1.24. BEMERKUNG. Sei \mathbb{K} ein Körper mit $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ und $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform mit assoziierter quadratischer Form $q(v) = \beta(v, v)$. Dann gilt

$$O(V, \beta) = \{\varphi \in \text{GL}(V) \mid \forall v \in V : q(\varphi(v)) = q(v)\}.$$

Dies folgt sofort aus der Polarisierungsidentität in Proposition VII.1.22 und der Linearität von φ , siehe Bemerkung VII.1.11 für die Definition von $O(V, \beta)$.

VII.1.25. SATZ. Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper \mathbb{K} mit $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Weiters sei $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform. Dann existieren eine geordnete Basis B von V , sodass $[\beta]_B$ Diagonalgestalt hat. Ist \mathbb{K} ein Körper indem jedes Element mindestens eine Quadratwurzel besitzt (etwa jeder algebraisch abgeschlossene Körper), dann kann B so gewählt werden, dass $[\beta]_B = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, wobei $k = \text{rank}(\beta)$.

BEWEIS. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach der Dimension von V . Der Induktionsanfang, $\dim(V) = 1$, ist trivial. Nun zum Induktionsschritt. Ist $\beta = 0$, so hat jede Basis von V die gewünschte Eigenschaft. O.B.d.A. sei also $\beta \neq 0$. Nach Proposition VII.1.22 existiert $b_1 \in V$, sodass $a_1 := \beta(b_1, b_1) \neq 0$. Beachte, dass

$$W := \{v \in V \mid \beta(b_1, v) = 0\} = \ker(\beta(b_1, -): V \rightarrow \mathbb{K})$$

eine Hyperebene in V ist, die b_1 nicht enthält. Somit $V = \langle b_1 \rangle \oplus W$. Wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf die symmetrische Bilinearform $\beta|_W$ an, erhalten wir eine Basis b_2, \dots, b_n von W , sodass $\beta(b_i, b_j) = a_i \delta_{ij}$, $2 \leq i, j \leq n$. Beachte, dass dies auch für $i = 1$ oder $j = 1$ richtig bleibt, $\beta(b_i, b_j) = a_i \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$. Somit ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V und $[\beta]_B$ hat Diagonalgestalt. Dies zeigt den ersten Teil des Satzes.

Sei nun \mathbb{K} ein Körper in dem jedes Element eine Quadratwurzel besitzt und $k := \text{rank}(\beta)$. Durch Umnummerieren der Basisvektoren können wir $a_i \neq 0$ für $i = 1, \dots, k$ und $a_{k+1} = \dots = a_n = 0$ erreichen. Setzen wir nun

$$\tilde{b}_i := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a_i}} b_i & \text{für } i = 1, \dots, k \\ b_i & \text{für } i = k+1, \dots, n \end{cases}$$

dann ist $\tilde{B} := (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n)$ eine Basis von V und $[\beta]_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. \square

VII.1.26. KOROLLAR. Sei V ein n -dimensionaler komplexer Vektorraum und $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine nicht-degenerierte symmetrische Bilinearform. Dann existiert eine Basis B von V , sodass $[\beta]_B = I_n$, d.h.

$$\beta(v, w) = [v]_B^t [w]_B, \quad v, w \in V.$$

Jede solche Basis liefert einen Gruppenisomorphismus,

$$O(V, \beta) \cong O_n(\mathbb{C}) := \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid A^t A = I_n\}, \quad \varphi \leftrightarrow [\varphi]_{BB}.$$

BEWEIS. Die erste Behauptung folgt sofort aus Satz VII.1.25. Die zweite Aussage erhalten wir aus den Bemerkungen VII.1.11 und VII.1.16. \square

Zwei symmetrische Matrizen $A, A' \in M_{n \times n}^{\text{sym}}(\mathbb{K})$ werden *kongruent* genannt, falls $S \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ existiert, sodass $S^t A S = A'$. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der symmetrischen Matrizen, $M_{n \times n}^{\text{sym}}(\mathbb{K}) := \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{K}) : A^t = A\}$, siehe Aufgabe 87. Ist \mathbb{K} ein algebraisch abgeschlossener Körper (oder, allgemeiner, ein Körper in dem jedes Element eine Quadratwurzel besitzt) mit $\text{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ und ist $A \in M_{n \times n}^{\text{sym}}(\mathbb{K})$ eine symmetrische Matrix, dann existiert eine invertierbare Matrix $S \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$, sodass $S^t A S = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, wobei $k = \text{rank}(A)$. Dies folgt sofort aus Satz VII.1.25 durch Betrachten der Bilinearform $\beta_A: \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$, $\beta_A(x, y) = x^t A y$. Aus diesen Erläuterungen folgt, dass zwei symmetrische Matrizen über einem Körper \mathbb{K} wie oben, genau dann kongruent sind, wenn sie gleichen Rang haben. Insbesondere erhalten wir:

VII.1.27. KOROLLAR. *Zwei symmetrische komplexe $(n \times n)$ -Matrizen sind genau dann kongruent wenn sie gleichen Rang haben.*

VII.1.28. BEISPIEL. Betrachte die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 11 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}^{\text{sym}}(\mathbb{C})$$

Nach Korollar VII.1.26 existiert eine Basis B von \mathbb{C}^3 , sodass $[\beta_A]_B = I_3$, denn $\text{rank}(A) = 3$. Um eine solche Basis zu bestimmen gehen wir wie im Beweis von Satz VII.1.25 vor. Da $\beta_A(e_1, e_1) = e_1^t A e_1 = 1 \neq 0$ können wir $b_1 = e_1$ als ersten Basisvektor verwenden,

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_A(b_1, b_1) = b_1^t A b_1 = 1.$$

Es ist nun b_2 so zu bestimmen, dass $\beta_A(b_1, b_2) = 0$ und $\beta_A(b_2, b_2) = 1$. Wir entscheiden uns für

$$b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_A(b_1, b_2) = b_1^t A b_2 = 0, \quad \beta_A(b_2, b_2) = b_2^t A b_2 = 1.$$

Für den letzten Basisvektor, b_3 , muss $\beta_A(b_1, b_3) = \beta_A(b_2, b_3) = 0$ und $\beta_A(b_3, b_3) = 1$ gelten. Wir verwenden

$$b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \beta_A(b_1, b_3) = 0, \quad \beta_A(b_2, b_3) = 0, \quad \beta_A(b_3, b_3) = 1.$$

Nach Konstruktion ist $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von \mathbb{C}^3 mit $[\beta_A]_B = I_3$. Für die Basiswechsellmatrix,

$$S := T_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{gilt daher} \quad S^t A S = T_{EB}^t [\beta_A]_E T_{EB} = [\beta_A]_B = I_3,$$

wobei $E = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von \mathbb{C}^3 bezeichnet. Alternativ, können wir die assoziierte quadratische Form,

$$q_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & 5 & 7 \\ -3 & 7 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + 5y^2 + 11z^2 - 4xy - 6xz + 14yz,$$

durch Ergänzen auf vollständige Quadrate auf die Form

$$q_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x - 2y - 3z)^2 + y^2 + 2z^2 + 2yz = (x - 2y - 3z)^2 + (y + z)^2 + z^2$$

bringen. Dies zeigt $q_A(v) = (Tv)^tTv = v^tT^tTv$ für alle $v \in \mathbb{C}^3$, wobei

$$T := \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Polarisieren erhalten wir $v^tAw = \beta_A(v, w) = v^tT^tTw$, also $A = T^tT$ oder $(T^{-1})^tAT^{-1} = I_3$. Tatsächlich gilt, aufgrund unserer Wahlen, $T^{-1} = S$.

Über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist die Situation ein wenig komplizierter.

VII.1.29. DEFINITION (Definitheit). Eine symmetrische Bilinearform auf einem reellen Vektorraum, $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, und die damit assoziierte quadratische Form, $q: V \rightarrow \mathbb{R}$, $q(v) = \beta(v, v)$, heißen:

- (a) *positiv semidefinit*, in Zeichen $\beta \geq 0$, falls $\beta(v, v) \geq 0$, für alle $v \in V$.
- (b) *positiv definit*, in Zeichen $\beta > 0$, falls $\beta(v, v) > 0$, für alle $0 \neq v \in V$.
- (c) *negativ semidefinit*, in Zeichen $\beta \leq 0$, falls $\beta(v, v) \leq 0$, für alle $v \in V$.
- (d) *negativ definit*, in Zeichen $\beta < 0$, falls $\beta(v, v) < 0$, für alle $0 \neq v \in V$.
- (e) *indefinit*, falls es $v, w \in V$ gibt, sodass $\beta(v, v) > 0$ und $\beta(w, w) < 0$.

Eine symmetrische Matrix $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ wird positiv bzw. negativ (semi) definit genannt, falls die damit assoziierte symmetrische Bilinearform $\beta_A: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\beta_A(x, y) = x^tAy$, positiv bzw. negativ (semi)definit ist, d.h.: $A \geq 0$ falls $x^tAx \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$; $A > 0$ falls $x^tAx > 0$ für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$; $A \leq 0$ falls $x^tAx \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$; und $A < 0$ falls $x^tAx < 0$ für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$.

VII.1.30. BEMERKUNG. Beachte, dass eine symmetrische Bilinearform β genau dann *negativ (semi)definit* ist, wenn die symmetrische Bilinearform $-\beta$ positiv (semi)definit ist. Jede positiv definite symmetrische Bilinearform hat trivialen Kern und ist daher nicht-degeneriert. Dasselbe gilt für negativ definite symmetrische Bilinearformen. Ist β eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf V und $W \subseteq V$ ein Teilraum, dann ist auch die Einschränkung $\beta|_W$ positiv definit und daher nicht-degeneriert. Beachte, dass die Einschränkung einer nicht-degenerierten symmetrischen Bilinearform sehr wohl degeneriert sein kann. Schränken wir etwa die Lorentz Metrik g aus Beispiel VII.1.5 auf den 1-dimensionalen Teilraum $W := \langle e_0 + e_1 \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$ ein, so erhalten wir $g|_W = 0$. Nicht-triviale Teilräume $W \neq \{0\}$ mit $\beta|_W = 0$ werden *isotrop* genannt.

VII.1.31. BEMERKUNG (Konvexität). Seien β und β' zwei positiv definite symmetrische Bilinearformen auf einem reellen Vektorraum V . Für $0 \leq \lambda \leq 1$ ist

dann auch $\lambda\beta + (1 - \lambda)\beta'$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf V , denn für jedes $0 \neq v \in V$ gilt:

$$(\lambda\beta + (1 - \lambda)\beta')(v, v) = \lambda \underbrace{\beta(v, v)}_{>0} + (1 - \lambda) \underbrace{\beta'(v, v)}_{>0} > 0.$$

Die Menge der positiv definiten symmetrischen Bilinearformen bildet daher eine konvexe⁶ Teilmenge im Vektorraum aller symmetrischen Bilinearformen auf V . Auch die Menge der positiv semidefiniten symmetrischen Bilinearformen ist eine konvexe Teilmenge. Analoge Aussagen gelten für negativ (semi)definite symmetrische Bilinearformen. Beachte, dass die Menge der nicht-degenerierten symmetrischen Bilinearformen nicht konvex ist.

VII.1.32. BEISPIEL. Das Euklidische innere Produkt aus Beispiel VII.1.4 ist positiv definit, denn für jedes $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle x, x \rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0.$$

Auch die symmetrische Bilinearform aus Beispiel VII.1.6 ist positiv definit, denn für jedes $0 \neq A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ gilt

$$\text{tr}(A^t A) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m A_{ij}^2 > 0.$$

Auch die symmetrische Bilinearform aus Beispiel VII.1.7 ist positiv definit, denn für jedes $0 \neq f \in C^0(I, \mathbb{R})$ gilt

$$\int_I f^2(t) dt > 0.$$

Die symmetrische Bilinearform $\beta(x, y) = x^t \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y$, ist positiv semidefinit, denn für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\beta(x, x) = x^t \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x = x_1^2 + \cdots + x_p^2 \geq 0.$$

Die Lorentz Metrik aus Beispiel VII.1.5 ist indefinit, denn $g(e_0, e_0) < 0$ und $g(e_1, e_1) > 0$.

VII.1.33. BEISPIEL. Die symmetrische Bilinearform $\beta(x, y) = x^t \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y$ ist positiv definit, denn

$$q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \beta \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 > 0,$$

für alle $0 \neq \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

⁶Eine Teilmenge A eines Vektorraums wird konvex genannt, wenn sie folgende Eigenschaft besitzt: $\forall x, y \in A \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda x + (1 - \lambda)y \in A$. Dies bedeutet, dass für je zwei Punkte x und y in A auch die Strecke von x nach y zur Gänze in A liegt.

VII.1.34. BEISPIEL. Die symmetrische Bilinearform $\beta(x, y) = x^t \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} y$ ist indefinit, denn

$$q \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \beta \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 - 2x_2^2,$$

also $\beta \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 1 > 0$ und $\beta \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = -2 < 0$.

VII.1.35. SATZ (Trägheitssatz von Sylvester). *Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum und $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Dann existiert eine geordnete Basis B von V , sodass*

$$[\beta]_B = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $p + q = \text{rank}(\beta)$ und

$$p = \max \{ \dim(W) \mid W \text{ Teilraum von } V \text{ mit } \beta|_W > 0 \}, \quad (\text{VII.4})$$

$$q = \max \{ \dim(W) \mid W \text{ Teilraum von } V \text{ mit } \beta|_W < 0 \}. \quad (\text{VII.5})$$

Insbesondere sind die Zahlen p und q unabhängig von der Basis B .

BEWEIS. Nach Satz VII.1.25 existiert eine Basis $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n)$ von V , sodass $\beta(\tilde{b}_i, \tilde{b}_j) = a_i \delta_{ij}$, wobei $a_1, \dots, a_p > 0$, $a_{p+1}, \dots, a_{p+q} < 0$ und $a_{p+q+1} = \dots = a_n = 0$. Setzen wir

$$b_i := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a_i}} \tilde{b}_i & \text{für } i = 1, \dots, p, \\ \frac{1}{\sqrt{-a_i}} \tilde{b}_i & \text{für } i = p+1, \dots, p+q, \\ \tilde{b}_i & \text{für } i = p+q+1, \dots, n, \end{cases}$$

so ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V mit der gewünschten Eigenschaft,

$$[\beta]_B = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir die Teilräume $V' := \langle b_1, \dots, b_p \rangle$ und $V'' := \langle b_{p+1}, \dots, b_n \rangle$, so gilt

$$V = V' \oplus V'', \quad \beta|_{V'} > 0 \quad \text{und} \quad \beta|_{V''} \leq 0.$$

Da $\dim(V') = p$ erhalten wir insbesondere

$$p \leq \max \{ \dim(W) \mid W \text{ Teilraum von } V \text{ mit } \beta|_W > 0 \}. \quad (\text{VII.6})$$

Sei nun W ein beliebiger Teilraum von V mit $\beta|_W > 0$. Dann gilt

$$W \cap V'' = \{0\},$$

denn für $v \in W \cap V''$ ist $\beta(v, v) = 0$ und daher $v = 0$. Daraus erhalten wir

$$\dim(W) + \dim(V'') = \dim(W + V'') \leq \dim(V) = n,$$

also $\dim(W) \leq n - \dim(V'') = p$. Zusammen mit (VII.6) erhalten wir (VII.4). Die Formel (VII.5) lässt sich analog zeigen, oder aus (VII.4) für $-\beta$ ablesen. \square

VII.1.36. DEFINITION (Signatur). Das Paar (p, q) in Satz VII.1.35 wird als *Signatur* der symmetrischen Bilinearform β bezeichnet.⁷ Unter der Signatur einer symmetrischen Matrix A bzw. der Signatur einer quadratischen Form verstehen wir die Signatur der damit assoziierten symmetrischen Bilinearform.

VII.1.37. BEISPIEL. Das Euklidische innere Produkt aus Beispiel VII.1.4 hat Signatur $(n, 0)$. Die Lorentz Metrik aus Beispiel VII.1.5 hat Signatur $(3, -1)$. Die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$$

hat Signatur (p, p) , denn

$$S^t A S = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_p & -I_p \\ I_p & I_p \end{pmatrix}.$$

VII.1.38. KOROLLAR. *Zwei reelle symmetrische $(n \times n)$ -Matrizen sind genau dann kongruent, wenn sie gleiche Signatur haben.*

VII.1.39. KOROLLAR. *Sei $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf einem n -dimensionalen reellen Vektorraum V . Dann existiert eine Basis B von V , sodass $[\beta]_B = I_n$, d.h.*

$$\beta(v, w) = [v]_B^t [w]_B, \quad v, w \in V.$$

Jede solche Basis liefert einen Gruppenisomorphismus,

$$O(V, \beta) \cong O_n := \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid A^t A = I_n\}, \quad \varphi \leftrightarrow [\varphi]_{BB}.$$

BEWEIS. Die erste Behauptung folgt sofort aus Satz VII.1.35. Die zweite Aussage erhalten wir aus den Bemerkungen VII.1.11 und VII.1.16. \square

VII.1.40. BEISPIEL. Wir wollen die Signatur der mit symmetrischen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -7 \\ -2 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

assoziierten symmetrischen Bilinearform $\beta_A(v, w) = v^t A w$ auf \mathbb{R}^3 bestimmen. Durch Ergänzen auf vollständige Quadrate erhalten wir

$$\begin{aligned} q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 4x^2 - 3y^2 - 8z^2 + 4xy - 4xz - 14yz \\ &= (2x + y - z)^2 - 4y^2 - 9z^2 - 12yz = (2x + y - z)^2 - (2y + 3z)^2. \end{aligned}$$

Die Signatur von β_A ist daher $(1, 1)$. Obige Rechnung zeigt,

$$v^t A v = q(v) = (Tv)^t \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} (Tv), \quad \text{mit} \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$A = T^t \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} T,$$

⁷Manchmal wird auch die Differenz, $p - q$, als *Signatur* von β bezeichnet.

und daher

$$S^t A S = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad S = T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

VII.1.41. DEFINITION (Hauptminoren). Unter dem k -ten *Hauptminor* einer symmetrischen Matrix $A \in M_{n \times n}^{\text{sym}}(\mathbb{R})$, verstehen wir den Skalar

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix},$$

wobei a_{ij} die Eintragung der Matrix A bezeichnen, $1 \leq k \leq n$.

VII.1.42. SATZ (Sylvester Kriterium). *Sei V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum. Eine symmetrische Bilinearform $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren der Matrix $[\beta]_B$ positiv sind, bezüglich einer (und dann jeder) Basis B von V .*

BEWEIS. Wir zeigen zunächst, dass eine positiv definite symmetrische Bilinearform positive Hauptminoren hat. Sei dazu β eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf V . Nach Satz VII.1.35 existiert eine Basis $B = (b_1, \dots, b_n)$ von V , sodass $[\beta]_B = I_n$. Es gilt daher $\det([\beta]_B) > 0$. Ist C eine weitere Basis von V , und bezeichnet $S = T_{CB} \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ die Basiswechselmatrix, dann haben wir $[\beta]_C = S^t [\beta]_B S$, siehe Proposition VII.1.9, also auch

$$\det([\beta]_C) = \det(S^t [\beta]_B S) = \det(S^t) \det([\beta]_B) \det(S) = \det(S)^2 \det([\beta]_B) > 0,$$

denn $\det(S) \neq 0$. Dies zeigt $\det([\beta]_B) > 0$, für jede Basis B von V . Sei nun $k \in \{1, \dots, n\}$ und bezeichne $W := \langle b_1, \dots, b_k \rangle$ den von den ersten k Basisvektoren aufgespannten Teilraum. Dann ist $\beta|_W$ positiv definit, $\tilde{B} = (b_1, \dots, b_k)$ ist eine Basis von W und aus dem eben Gezeigten folgt $\det([\beta|_W]_{\tilde{B}}) > 0$. Beachte, dass $\det([\beta|_W]_{\tilde{B}})$ gerade der k -te Hauptminor von $[\beta]_B$ ist, denn

$$[\beta]_B = \begin{pmatrix} [\beta|_W]_{\tilde{B}} & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Somit sind also alle Hauptminoren von $[\beta]_B$ positiv.

Für die umgekehrte Implikation sei nun B eine Basis von V , sodass alle Hauptminoren der Matrix $[\beta]_B$ positiv sind. Wir werden nun mittels Induktion nach $\dim(V)$ zeigen, dass β positiv definit ist. Der Induktionsanfang, $\dim(V) = 1$, ist trivial. Für den Induktionsschritt betrachten wir die Basis $C = (c_1, \dots, c_n)$ von V , wobei

$$c_1 := b_1, \quad c_i := b_i - \frac{\beta(b_i, b_1)}{\beta(b_1, b_1)} b_1, \quad i = 2, \dots, n. \quad (\text{VII.7})$$

Beachte, dass $\beta(b_1, b_1) > 0$, da der erste Hauptminor von $[\beta]_B$ positiv ist. Die Transformationsmatrix zum Basiswechsel hat die Gestalt

$$S = T_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Ist X eine Matrix so schreiben wir $X_{(k)}$ für die linke obere $(k \times k)$ -Untermatrix von X , d.h. der k -te Hauptminor von X ist $\det(X_{(k)})$. Aus $[\beta]_C = S^t[\beta]_B S$ und der speziellen Gestalt von S folgt

$$([\beta]_C)_{(k)} = S_{(k)}^t ([\beta]_B)_{(k)} S_{(k)},$$

und daher

$$\det\left([\beta]_C\right)_{(k)} = \underbrace{\det(S_{(k)}^t)}_{=1} \det\left([\beta]_B\right)_{(k)} \underbrace{\det(S_{(k)})}_{=1} = \det\left([\beta]_B\right)_{(k)}.$$

Dies zeigt, dass $[\beta]_C$ die selben Hauptminoren wie $[\beta]_B$ hat. Insbesondere sind auch alle Hauptminoren von $[\beta]_C$ positiv. Wir betrachten nun den Teilraum $W := \langle c_2, \dots, c_n \rangle$ mit Basis $\tilde{C} := (c_2, \dots, c_n)$. Nach Konstruktion der Basis C , siehe (VII.7), gilt

$$[\beta]_C = \begin{pmatrix} \beta(b_1, b_1) & 0 \\ 0 & [\beta|_W]_{\tilde{C}} \end{pmatrix}.$$

Da $\beta(b_1, b_1) > 0$ sind auch alle Hauptminoren von $[\beta|_W]_{\tilde{C}}$ positiv. Nach Induktionsvoraussetzung ist daher $\beta|_W > 0$. Ist nun $v \in V$ beliebig, dann existieren $\lambda \in \mathbb{K}$ und $w \in W$, sodass $v = \lambda b_1 + w$ und wir erhalten

$$\beta(v, v) = \beta(\lambda b_1 + w, \lambda b_1 + w) = \lambda^2 \underbrace{\beta(b_1, b_1)}_{>0} + 2\lambda \underbrace{\beta(b_1, w)}_{=0} + \underbrace{\beta(w, w)}_{\geq 0} \geq 0$$

wobei Gleichheit nur eintreten kann, wenn $\lambda = 0$ und $\beta(w, w) = 0$, d.h. nur wenn $v = 0$. Dies zeigt, dass β positiv definit ist. \square

VII.1.43. KOROLLAR. Sei V ein n -dimensionaler reeller Vektorraum. Eine symmetrische Bilinearform $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann negativ definit, wenn alle Hauptminoren der Matrix $-[\beta]_B$ positiv sind, bezüglich einer (und dann jeder) Basis B von V . Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$(-1)^k \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} > 0,$$

für jedes $k = 1, \dots, n$, wobei a_{ij} die Eintragungen der Matrix $[\beta]_B$ bezeichnen.

BEWEIS. Dies folgt aus Satz VII.1.35, da $\beta < 0 \Leftrightarrow -\beta > 0$ und $[-\beta]_B = -[\beta]_B$. Beachte auch $\det(-C) = (-1)^k \det(C)$, für jede $(k \times k)$ -Matrix C . \square

VII.1.44. BEISPIEL. Betrachte die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & -11 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}^{\text{sym}}(\mathbb{R}).$$

Für ihre Hauptminoren erhalten wir

$$\det(-1) = -1 < 0, \quad \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = 3 > 0, \quad \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & -11 \end{pmatrix} = -1 < 0,$$

also ist die Matrix A nach Korollar VII.1.43 negativ definit. Alternativ können wir die assoziierte quadratische Form,

$$q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -x^2 - 5y^2 - 11z^2 + 4xy + 6xz - 14yz,$$

auf vollständige Quadrate ergänzen,

$$q \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -(x - 2y - 3z)^2 - y^2 - 2z^2 - 2yz = -(x - 2y - 3z)^2 - (y + z)^2 - z^2,$$

und daraus schließen, dass sie negativ definit ist.

VII.1.45. BEMERKUNG (Lokale Extrema). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion und $y \in U$ ein kritischer Punkt von f , d.h.

$$D_y f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(y) \right) = 0.$$

Da $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ ist die Hessesche Matrix,

$$H_y f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(y) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(y) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(y) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(y) \end{pmatrix},$$

symmetrisch. Aus der Analysisvorlesung wissen wir: Ist die Hessesche positiv definit, $H_y f > 0$, dann ist y ein lokales Minimum von f . Analog folgt aus $H_y f < 0$, dass y ein lokales Maximum von f ist.

VII.1.46. DEFINITION (Sesquilinearformen). Sei V ein komplexer Vektorraum. Unter einer *Sesquilinearform* auf V verstehen wir eine Abbildung

$$h: V \times V \rightarrow \mathbb{C},$$

die komplex linear in der zweiten Eintragung und komplex anti-linear in der ersten Eintragung ist, d.h. es gilt

$$h(v, w + w') = h(v, w) + h(v, w'), \quad h(v, \lambda w) = \lambda h(v, w),$$

und

$$h(v + v', w) = h(v, w) + h(v', w), \quad h(\lambda v, w) = \bar{\lambda} h(v, w),$$

für alle $v, v', w, w' \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Unter einer *Hermiteischen Form* auf V verstehen wir eine Sesquilinearform h auf V , die *symmetrisch* in folgendem Sinn ist: für alle $v, w \in V$ gilt:

$$h(w, v) = \overline{h(v, w)}.$$

VII.1.47. BEMERKUNG. Die Menge aller Sesquilinearformen auf V bildet einen komplexen Vektorraum bezüglich der Operationen

$$(h + h')(v, w) := h(v, w) + h'(v, w) \quad \text{und} \quad (\lambda h)(v, w) := \lambda h(v, w).$$

Dabei bezeichnen h und h' zwei Sesquilinearformen auf V , $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Die Menge der Hermiteschen Formen ist *kein* komplexer Teilraum, denn für eine Hermitesche Form, h , ist $\tilde{h} := \mathbf{i}h$ *keine* Hermitesche Form, da ja $\tilde{h}(w, v) = \mathbf{i}h(w, v) = \overline{\mathbf{i}h(v, w)} = \overline{-\tilde{h}(v, w)}$. Die Hermiteschen Formen bilden jedoch einen *reellen* Teilraum, d.h. für Hermitesche Formen h, h' auf V und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind auch $h + h'$ sowie λh Hermitesche Formen auf V .

Ist $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ eine komplexe Matrix, dann wird $A^* := \bar{A}^t \in M_{n \times m}(\mathbb{C})$ als die zu A *adjungierte Matrix* bezeichnet, d.h. $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$. Etwa gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2\mathbf{i} & -7\mathbf{i} \\ 2 & 1-\mathbf{i} & -1-3\mathbf{i} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2\mathbf{i} & 1+\mathbf{i} \\ 7\mathbf{i} & -1+3\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

Für die Adjungierte gelten folgende Rechenregeln, siehe Aufgabe 94:

- (a) $(A + B)^* = A^* + B^*$, für alle $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$.
- (b) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$, für alle $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.
- (c) $(AB)^* = B^*A^*$, für alle $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ und $B \in M_{n \times l}(\mathbb{C})$.

Eine quadratische Matrix $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ wird *Hermitesch* oder *selbstadjungiert* genannt, wenn $A^* = A$. Die Menge der selbstadjungierten Matrizen bildet einen reellen, aber keinen komplexen, Teilraum von $M_{n \times n}(\mathbb{C})$.

VII.1.48. BEISPIEL (Sesquilinearform einer Matrix). Jedes $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ definiert eine Sesquilinearform h_A auf \mathbb{C}^n ,

$$h_A: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad h_A(x, y) = x^*Ay, \quad x, y \in \mathbb{C}^n,$$

denn $(x_1 + x_2)^*Ay = x_1^*Ay + x_2^*Ay$, $(\lambda x)^*Ay = \bar{\lambda}x^*Ay$, $x^*A(y_1 + y_2) = x^*Ay_1 + x^*Ay_2$ und $x^*A(\lambda y) = \lambda x^*Ay$, für $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Die Zuordnung $A \leftrightarrow h_A$ liefert einen linearen Isomorphismus zwischen $M_{n \times n}(\mathbb{C})$ und dem komplexen Vektorraum aller Sesquilinearformen auf \mathbb{C}^n . Die Sesquilinearform h_A ist genau dann eine Hermitesche Form, wenn $A^* = A$ gilt.

VII.1.49. DEFINITION (Matrixdarstellung). Sei $h: V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ eine Sesquilinearform auf einem n -dimensionalen komplexen Vektorraum V . Ist $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine geordnete Basis von V , dann wird die Matrix $[h]_B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$,

$$([h]_B)_{ij} := h(b_i, b_j), \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

als *Matrixdarstellung von h bezüglich der Basis B* bezeichnet.

VII.1.50. PROPOSITION. Sei V ein n -dimensionaler komplexer Vektorraum. Jede geordnete Basis B von V liefert einen linearen Isomorphismus, $h \leftrightarrow [h]_B$, zwischen dem Vektorraum der Sesquilinearformen auf V und $M_{n \times n}(\mathbb{C})$. Insbesondere ist h durch die Matrix $[h]_B$ eindeutig bestimmt,

$$h(v, w) = [v]_B^*[h]_B[w]_B, \quad v, w \in V,$$

und zu jedem $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ existiert eine eindeutig bestimmte Sesquilinearform h auf V mit, sodass $[h]_B = A$. Darüber hinaus ist h genau dann Hermitesch, wenn $[h]_B^* = [h]_B$. Ist C eine weitere geordnete Basis von V , dann gilt

$$[\beta]_B = T_{CB}^*[\beta]_C T_{CB},$$

wobei $T_{CB} \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ die Matrix zum Basiswechsel von B nach C bezeichnet.

BEWEIS. Analog zum Beweis von Proposition VII.1.9. \square

VII.1.51. BEMERKUNG (Unitäre Gruppe). Ist $h: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine Hermitesche Form, dann bildet

$$U(V, h) := \{ \varphi \in \text{GL}(V) \mid \forall v, w \in V : h(\varphi(v), \varphi(w)) = h(v, w) \}$$

eine Gruppe. Ist V endlich dimensional, B eine Basis von V und $A := [h]_B$, dann schränkt sich der Gruppenisomorphismus $\text{GL}(V) \cong \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $\varphi \leftrightarrow [\varphi]_{BB}$, siehe Bemerkung IV.6.17, zu einem Gruppenisomorphismus,

$$U(V, h) \cong \{ X \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid X^* A X = A \},$$

ein. Dies folgt aus Proposition VII.1.50, denn

$$\begin{aligned} h(\varphi(v), \varphi(w)) &= [\varphi(v)]_B^* [h]_B [\varphi(w)]_B \\ &= ([\varphi]_{BB} [v]_B)^* [h]_B ([\varphi]_{BB} [w]_B) = [v]_B^* \left([\varphi]_{BB}^* [h]_B [\varphi]_{BB} \right) [w]_B \end{aligned}$$

und $h(v, w) = [v]_B^* [h]_B [w]$.

VII.1.52. DEFINITION (Quadratische Form). Ist $h: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine Hermitesche Form, dann wird $q: V \rightarrow \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, $q(v) := h(v, v)$, als die mit h assoziierte quadratische Form bezeichnet. Beachte, dass $h(v, v)$ reell ist, denn $h(v, v) = \overline{h(v, v)}$. Auch ist q homogen vom Grad zwei, d.h.

$$q(\lambda v) = |\lambda|^2 q(v), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad v \in V.$$

VII.1.53. PROPOSITION (Polarisierungsidentität). Sei $h: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine Hermitesche Form und $q(v) = h(v, v)$ die damit assoziierte quadratische Form. Dann gilt

$$h(v, w) = \frac{1}{4}(q(v+w) - q(v-w)) + \mathbf{i} \frac{1}{4}(q(v+iw) - q(w-iw)).$$

Insbesondere kann die Hermitesche Form h aus der quadratischen Form q zurückgewonnen werden.

BEWEIS. Durch direktes Nachrechnen, siehe Aufgabe 95. \square

VII.1.54. BEMERKUNG. Aus der Polarisierungsidentität erhalten wir

$$U(V, h) = \{ \varphi \in \text{GL}(V) \mid \forall v \in V : q(\varphi(v)) = q(v) \},$$

wobei $q(v) = h(v, v)$ die mit h assoziierte quadratische Form bezeichnet.

VII.1.55. DEFINITION (Definitheit). Eine Hermitesche Form auf einem komplexen Vektorraum, $h: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, und die assoziierte quadratische Form, $q: V \rightarrow \mathbb{R}$, $q(v) = h(v, v)$, heißen:

- (a) *positiv semidefinit*, in Zeichen $h \geq 0$, falls $h(v, v) \geq 0$, für alle $v \in V$.
- (b) *positiv definit*, in Zeichen $h > 0$, falls $h(v, v) > 0$, für alle $0 \neq v \in V$.
- (c) *negativ semidefinit*, in Zeichen $h \leq 0$, falls $h(v, v) \leq 0$, für alle $v \in V$.
- (d) *negativ definit*, in Zeichen $h < 0$, falls $h(v, v) < 0$, für alle $0 \neq v \in V$.
- (e) *indefinit*, falls es $v, w \in V$ gibt, sodass $h(v, v) > 0$ und $h(w, w) < 0$.

Eine Hermitesche Matrix $A = A^*$ wird positiv bzw. negativ (semi)definit genannt, falls die assoziierte Hermitesche Form, $h_A: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h_A(x, y) = x^*Ay$, positiv bzw. negativ (semi)definit ist, d.h. $A \geq 0$ falls $x^*Ax \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$; $A > 0$ falls $x^*Ax > 0$ für alle $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$; $A \leq 0$ falls $x^*Ax \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$; und $A < 0$ falls $x^*Ax < 0$ für alle $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$.

VII.1.56. BEISPIEL. Das standard innere Produkt auf \mathbb{C}^n ,

$$\langle x, y \rangle = \bar{x}_1y_1 + \cdots + \bar{x}_ny_n = x^*y = x^* \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} y, \quad x, y \in \mathbb{C}^n,$$

ist eine positiv definite Hermitesche Form auf \mathbb{C}^n , denn

$$\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_ix_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 > 0,$$

für jedes $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$.

VII.1.57. BEISPIEL. Die Abbildung

$$\langle -, - \rangle: M_{m \times n}(\mathbb{C}) \times M_{m \times n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle A, B \rangle := \text{tr}(A^*B)$$

ist eine positiv definite Hermitesche Form auf $M_{m \times n}(\mathbb{C})$, denn

$$\text{tr}(A^*A) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \bar{A}_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m |A_{ij}|^2 > 0$$

für jedes $0 \neq A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$.

VII.1.58. BEISPIEL. Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und bezeichnet $C^0(I, \mathbb{C})$ den Vektorraum der stetigen, komplexwertigen Funktionen auf I , dann ist

$$\langle -, - \rangle: C^0(I, \mathbb{C}) \times C^0(I, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \langle f, g \rangle := \int_I \overline{f(t)}g(t)dt,$$

eine positiv definite Hermitesche Form auf $C^0(I, \mathbb{C})$, denn

$$\langle f, f \rangle = \int_I \overline{f(t)}f(t) dt = \int_I |f(t)|^2 dt > 0,$$

für jedes $0 \neq f \in C^0(I, \mathbb{C})$.

VII.1.59. SATZ (Trägheitssatz von Sylvester). Sei V ein n -dimensionaler komplexer Vektorraum und $h: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Hermitesche Form. Dann existiert eine geordnete Basis B von V , sodass

$$[h]_B = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

Für jede solche Basis gilt

$$p = \max\{\dim(W) \mid W \text{ Teilraum von } V \text{ mit } h|_W > 0\},$$

$$q = \max\{\dim(W) \mid W \text{ Teilraum von } V \text{ mit } h|_W < 0\}.$$

Insbesondere sind die Zahlen p und q unabhängig von der Basis B . Das Paar (p, q) wird als Signatur der Hermiteschen Form h bezeichnet.

Eine Hermitesche Form auf einem n -dimensionalen komplexen Vektorraum ist genau dann positiv definit, wenn sie Signatur $(n, 0)$ hat. Sie ist genau dann negativ definit, wenn sie Signatur $(0, n)$ hat. Die Menge der positiv definiten Hermiteschen Formen ist konvex, und auch die Menge der negativ definiten Hermiteschen Formen ist konvex.

VII.1.60. KOROLLAR. Zwei Hermitesche $(n \times n)$ -Matrizen A und B haben genau dann gleiche Signatur, wenn eine invertierbare Matrix $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ existiert, sodass $B = S^*AS$.

VII.1.61. KOROLLAR. Sei $h: V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine positiv definite Hermitesche Form auf einem n -dimensionalen komplexen Vektorraum V . Dann existiert eine Basis B von V , sodass $[h]_B = I_n$, d.h.

$$h(v, w) = [v]_B^*[w]_B, \quad v, w \in V.$$

Jede solche Basis liefert einen Gruppenisomorphismus,

$$U(V, \beta) \cong U_n := \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) \mid A^*A = I_n\}, \quad \varphi \leftrightarrow [\varphi]_{BB}.$$

VII.1.62. SATZ (Sylvester Kriterium). Sei V ein endlich dimensionaler komplexer Vektorraum. Eine Hermitesche Form $h: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren der Matrix $[h]_B$ positiv sind, bezüglich einer (und dann jeder) Basis B von V .

BEWEIS. Analog zum Beweis von Satz VII.1.42. □

VII.1.63. BEISPIEL. Wir wollen die Signatur der mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 + \mathbf{i} \\ 1 - \mathbf{i} & 1 \end{pmatrix}$$