assoziierten Hermiteschen Form $h_A(v,w) = v^*Aw$ auf $\mathbb{C}^2$ bestimmen. Durch Ergänzen auf vollständige Quadrate erhalten wir

$$q\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}1 & 1+\mathbf{i}\\ 1-\mathbf{i} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \bar{x}x + \bar{y}y + (1+\mathbf{i})\bar{x}y + (1-\mathbf{i})\bar{y}x$$
$$= \overline{\big(x+(1+\mathbf{i})y\big)}\big(x+(1+\mathbf{i})y\big) - \bar{y}y,$$

die Hermitesche Form h_A hat daher Signatur $(1,1)$. Aus obiger Rechnung folgt

$$v^*Av = q(v) = (Tv)^*\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}(Tv) \qquad \text{mit} \qquad T = \begin{pmatrix}1 & 1+\mathbf{i}\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

also $A = T^*\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)T$, siehe Proposition VII.1.53, und daher

$$S^*AS = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \qquad \text{wobei} \qquad S = T^{-1} = \begin{pmatrix}1 & -1-\mathbf{i}\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

VII.2. Innere Produkte.

VII.2.1. Definition (Euklidische Vektorräume). Unter einem *inneren Produkt* auf einem reellen Vektorraum V verstehen wir eine positiv definite symmetrische Bilineaform auf V, d.h. eine Abbildung $\langle -,-\rangle\colon V\times V\to\mathbb{R}$, mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\langle v+v',w\rangle = \langle v,w\rangle + \langle v',w\rangle$, $\langle\lambda v,w\rangle = \lambda\langle v,w\rangle$, für alle $v,v',w\in V$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
(b) $\langle v,w+w'\rangle = \langle v,w\rangle + \langle v,w'\rangle$, $\langle v,\lambda w\rangle = \lambda\langle v,w\rangle$, für alle $v,w,w'\in V$, $\lambda\in\mathbb{R}$.
(c) $\langle w,v\rangle = \langle v,w\rangle$, für alle $v,w\in V$.
(d) $\langle v,v\rangle > 0$, für alle $0\neq v\in V$.

Ein reeller Vektorraum, der mit einem inneren Produkt ausgestattet ist, wird *Euklidischer Vektorraum* genannt.[8]

VII.2.2. Definition (Unitäre Vektorräume). Unter einem *inneren Produkt* auf einem komplexen Vektorraum V verstehen wir eine positiv definite Hermitesche Form auf V, d.h. eine Abbildung $\langle -,-\rangle\colon V\times V\to\mathbb{C}$, mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\langle v+v',w\rangle = \langle v,w\rangle + \langle v',w\rangle$, $\langle\lambda v,w\rangle = \bar{\lambda}\langle v,w\rangle$, für alle $v,v',w\in V$, $\lambda\in\mathbb{C}$.
(b) $\langle v,w+w'\rangle = \langle v,w\rangle + \langle v,w'\rangle$, $\langle v,\lambda w\rangle = \lambda\langle v,w\rangle$, für alle $v,w,w'\in V$, $\lambda\in\mathbb{C}$.
(c) $\langle w,v\rangle = \overline{\langle v,w\rangle}$, für alle $v,w\in V$.
(d) $\langle v,v\rangle > 0$, für alle $0\neq v\in V$.

Ein komplexer Vektorraum, der mit einem inneren Produkt ausgestattet ist, wird *unitärer Vektorraum* genannt.[9]

Ist $\langle -,-\rangle$ ein inneres Produkt auf einem reellen oder komplexen Vektorraum, so schreiben wir

$$\|v\| := \sqrt{\langle v,v\rangle}, \qquad v\in V.$$

[8]Diese Forderungen sind redundant, etwa lässt sich (b) sofort aus (a) und (c) folgern.
[9]Auch hier folgt (b) aus (a) und (c).

Beachte, dass die Wurzel wohldefiniert ist, da $\langle v, v\rangle \geq 0$. Beachte auch, dass $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle = q(v)$ gerade die mit $\langle -, -\rangle$ assoziierte quadratische Form ist. Aus den Propositionen VII.1.22 und VII.1.53 erhalten wir daher:

VII.2.3. Proposition (Polarisierungsidentitäten).
a) Für je zwei Vektoren v und w eines Euklidischen Vektorraums gilt:

$$\langle v, w\rangle = \tfrac{1}{2}\big(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\big) = \tfrac{1}{4}\big(\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2\big).$$

b) Für je zwei Vektoren v und w eines unitären Vektorraums gilt:

$$\langle v, w\rangle = \tfrac{1}{4}\Big(\|(v+w\|^2 - \|v-w\|^2 - \mathbf{i}\|v+\mathbf{i}w\|^2 + \mathbf{i}\|v-\mathbf{i}w\|^2\Big).$$

VII.2.4. Beispiel. Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem standard inneren Produkt,

$$\langle -, -\rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \langle x, y\rangle = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n,$$

ist ein Euklidischer Vektorraum mit Norm

$$\|x\|^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2$$

VII.2.5. Beispiel. Der Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit dem standard inneren Produkt,

$$\langle -, -\rangle \colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}, \qquad \langle x, y\rangle = \bar{x}_1y_1 + \cdots + \bar{x}_ny_n,$$

ist ein unitärer Vektorraum mit Norm

$$\|x\|^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2.$$

VII.2.6. Beispiel. Der Vektorraum der stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall, $C^0(I, \mathbb{C})$, wir durch das innere Produkt,

$$\langle f, g\rangle = \int_I \overline{f(t)}g(t)dt,$$

zu einem unitären Vektorraum mit Norm

$$\|f\|^2 = \int_I |f(t)|^2 dt.$$

VII.2.7. Beispiel. Der Vektorraum der *quadratsummierbaren* Folgen,

$$l^2 := \big\{x \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C} \;\big|\; \textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty\big\},$$

ein Teilraum des Vektorraums aller Folgen, wird durch das innere Produkt

$$\langle x, y\rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} \bar{x}_ny_n, \qquad x, y \in l^2(\mathbb{N}), \tag{VII.8}$$

zu einem unitären Vektorraum mit Norm

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2.$$

Mit Hilfe der Cauchy–Schwarz Ungleichung, siehe Proposition VII.2.9 unten, lässt sich zeigen, dass die Reihe (VII.8) absolut konvergent ist.

VII.2.8. Proposition (Satz von Pythagoras). *Sei V ein Euklidischer oder unitärer Vektorraum. Sind $v, w \in V$ mit $\langle v, w\rangle = 0$ so gilt*

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2.$$

Beweis. Aus der Bilinearität des inneren Produkts folgt sofort

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle, = \|v\|^2 + \|w\|^2,$$

denn nach Voraussetzung ist $\langle v, w\rangle = 0$ und daher auch $\langle w, v\rangle = \overline{\langle v, w\rangle} = 0$. □

VII.2.9. Proposition (Cauchy–Schwarz Ungleichung). *Sei V ein Euklidischer oder unitärer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle -, -\rangle$. Dann gilt*

$$\big|\langle v, w\rangle\big| \leq \|v\|\|w\|, \tag{VII.9}$$

für alle $v, w \in V$. Gleichheit tritt in (VII.9) *genau dann ein, wenn v und w linear abhängig sind.*

Beweis. O.B.d.A. sei $v \neq 0$. Setzen wir $\tilde v := \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2} v$ und $\tilde w = w - \tilde v$, dann gilt

$$w = \tilde v + \tilde w, \qquad \langle \tilde v, \tilde w\rangle = 0, \qquad \text{und} \qquad \|\tilde v\|^2 = \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|v\|^2}. \tag{VII.10}$$

Die erste Gleichung ist trivial, die dritte folgt aus

$$\|\tilde v\|^2 = \langle \tilde v, \tilde v\rangle = \Big\langle \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2} v, \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2} v\Big\rangle = \frac{\overline{\langle v,w\rangle}}{\|v\|^2}\frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2}\langle v,v\rangle = \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|v\|^2},$$

und die zweite via

$$\begin{aligned}\langle \tilde v, \tilde w\rangle = \langle \tilde v, w\rangle - \langle \tilde v, \tilde v\rangle = \Big\langle \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2} v, w\Big\rangle - \|\tilde v\|^2 \\ = \frac{\overline{\langle v,w\rangle}}{\|v\|^2}\langle v,w\rangle - \|\tilde v\|^2 = \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|v\|^2} - \|\tilde v\|^2 = 0.\end{aligned}$$

Aus den Relationen in (VII.10) und Proposition VII.2.8 erhalten wir

$$\|w\|^2 = \|\tilde v + \tilde w\|^2 = \|\tilde v\|^2 + \|\tilde w\|^2 \geq \|\tilde v\|^2 = \frac{|\langle v,w\rangle|^2}{\|v\|^2}$$

also (VII.9). Gleichheit kann nur eintreten, wenn $\tilde w = 0$ gilt, d.h. wenn w ein Vielfaches von v ist. □

VII.2.10. Proposition (Dreiecksungleichung). *Sei V ein Euklidischer oder unitärer Vektorraum. Dann gilt für alle $v, w \in V$,*

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Beweis. Aus der Bilinearität des inneren Produkts und der Cauchy–Schwarz Ungleichung in Proposition VII.2.9 erhalten wir:

$$\begin{aligned}\|v+w\|^2 &= \langle v+w, v+w\rangle \\ &= \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle \\ &= \|v\|^2 + \langle v,w\rangle + \overline{\langle v,w\rangle} + \|w\|^2 \\ &= \|v\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle v,w\rangle + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2|\langle v,w\rangle| + \|w\|^2 \\ &\leq \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 \\ &= \big(\|v\|+\|w\|\big)^2.\end{aligned}$$

Mit der Monotonie der Wurzel folgt daher $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$. □

VII.2.11. Definition (Norm). Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum. Unter einer Norm auf V verstehen wir eine Abbildung $\|-\|\colon V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(a) $\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$, für alle $v, w \in V$. (Dreiecksungleichung)
(b) $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$, für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\lambda \in \mathbb{C}$.
(c) $\forall v \in V : \|v\| = 0 \Rightarrow v = 0$.[10]

Unter einem normierten Vektorraum verstehen wir einen Vektorraum, der mit einer Norm ausgestattet ist. Beachte, $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$, denn aus (a) und (b) folgt $0 = \|0\| = \|v - v\| \leq \|v\| + \|(-1)v\| = 2\|v\|$.

VII.2.12. Proposition. *Sei V ein Euklidischer oder unitärer Vektorraum mit innerem Produkt $\langle -,-\rangle$. Dann ist $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$ eine Norm auf V, für die die* Parallelogrammgleichung *gilt, d.h. für alle $v, w \in V$ haben wir*

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\big(\|v\|^2 + \|w\|^2\big).$$

Beweis. Die Dreiecksungleichung haben wir in Proposition VII.2.10 gezeigt. Weiters gilt

$$\|\lambda v\|^2 = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \bar\lambda\lambda\langle v,v\rangle = |\lambda|^2\|v\|^2 = \big(|\lambda|\|v\|\big)^2,$$

also auch $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$. Ist $\|v\| = 0$, dann gilt $\langle v,v\rangle = 0$, also $v = 0$ wegen der positiv Definitheit des inneren Produkts. Aus der Bilinearität des inneren Produkts erhalten wir:

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle$$
$$\|v-w\|^2 = \langle v-w, v-w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 - \langle v,w\rangle - \langle w,v\rangle$$

Aufaddieren liefert die Parallelogrammgleichung. □

VII.2.13. Definition (Metrische Räume). Unter einer Metrik auf einer Menge X verstehen wir eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

[10] Aus (b) folgt sofort $\|0\| = 0$, es gilt daher $\forall v \in V : \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

(a) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, für alle $x, y, z \in X$. (Dreiecksungleichung)
(b) $d(x, y) = d(y, x)$, für alle $x, y \in X$. (Symmetrie)
(c) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

Unter einem *metrischen Raum* verstehen wir eine Menge X, die mit einer Metrik ausgestattet ist. Beachte $d(x, y) \geq 0$ für alle $x, y \in X$, denn aus (a), (b) und (c) folgt $0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$.

VII.2.14. Proposition. *Ist V ein normierter Raum, dann definiert $d(v, w) := \|w - v\|$ eine Metrik auf V.*

Beweis. Die Dreiecksungleichung folgt aus Definition VII.2.11(a),

$$d(u, w) = \|w - u\| = \|w - v + v - u\| \leq \|w - v\| + \|v - u\| = d(v, w) + d(u, v).$$

Symmetrie folgt aus Definition VII.2.11(b),

$$d(v, w) = \|w - v\| = \|(-1)(v - w)\| = |(-1)|\|v - w\| = \|v - w\| = d(w, v).$$

Schließlich gilt $d(v, w) = 0$ genau dann wenn $\|w - v\| = 0$, d.h. genau dann wenn $w - v = 0$, siehe Definition VII.2.11(c). □

VII.2.15. Bemerkung. Nicht jede Norm kommt von einem inneren Produkt. Etwa definiert

$$\|x\|_p := \big(|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p\big)^{1/p}$$

für jedes $1 \leq p < \infty$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$, die aber nur im Fall $p = 2$ der Parallelogrammgleichung genügt. Ist I ein kompaktes Intervall, so ist

$$\|f\|_p := \Big(\int_I |f(t)|^p dt\Big)^{1/p}$$

eine Norm auf dem Vektorraum der stetigen Funktionen, $C^0(I, \mathbb{C})$ bzw. $C^0(I, \mathbb{R})$, die im Fall $p \neq 2$ nicht der Parallelogrammgleichung genügt. Auch die Supremumsnormen

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} \qquad \text{bzw.} \qquad \|f\|_\infty := \max_{t \in I} |f(t)|$$

auf $\mathbb{C}^n$ bzw. $C^0(I, \mathbb{C})$ sind Normen die nicht der Parallelogrammgleichung genügen und daher nicht von einem inneren Produkt stammen. Ein weiteres wichtiges Beispiel ist die sogenannte *Operatornorm* linearer Abbildungen $\varphi\colon V \to W$ zwischen Euklidischen oder unitären Vektorräumen,

$$\|\varphi\| := \sup_{0 \neq v \in V} \frac{\|\varphi(v)\|}{\|v\|} = \sup_{v \in V,\, \|v\| = 1} \|\varphi(v)\|.$$

Es lässt sich zeigen, dass im Fall $\dim(V) < \infty$ dieses Supremum endlich ist und eine Norm auf $L(V, W)$ definiert, die i.A. nicht die Parallelogrammgleichung erfüllt.

VII.2.16. Definition (Winkel). Ist V ein Euklidischer Vektorraum und sind $v, w \in V$, $v \neq 0 \neq w$, dann gilt nach Proposition VII.2.9 $-1 \leq \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|} \leq 1$, es existiert daher ein eindeutiges $\alpha \in [0, \pi]$, sodass[11]

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|}.$$

Diese Zahl α wird als *Winkel* zwischen v und w bezeichnet.

VII.2.17. Proposition. *Seien $v \neq 0 \neq w$ zwei Vektoren eines Euklidischen Vektorraums und $\alpha \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen v und w. Dann gilt:*

(a) $\alpha = 0$, genau dann wenn $\lambda > 0$ existiert, sodass $w = \lambda v$.
(b) $\alpha = \pi/2$, genau dann wenn $\langle v, w\rangle = 0$.
(c) $\alpha = \pi$, genau dann wenn $\lambda < 0$ existiert, sodass $w = \lambda v$.

Beweis. Ist $w = \lambda v$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, dann folgt $\lambda \neq 0$ und

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\|w\|} = \frac{\langle v, \lambda v\rangle}{\|v\|\|\lambda v\|} = \frac{\lambda\langle v, v\rangle}{|\lambda|\|v\|\|v\|} = \frac{\lambda}{|\lambda|}.$$

Im Fall $\lambda > 0$ erhalten wir $\cos(\alpha) = 1$ und daher $\alpha = 0$. Im Fall $\lambda < 0$ erhalten wir $\cos(\alpha) = -1$, also $\alpha = \pi$. Seien nun $v \neq 0 \neq w$ beliebig und $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$, d.h. $\cos(\alpha) = \pm 1$. Dann gilt $\big|\langle v, w\rangle\big| = \|v\|\|w\|$, nach Proposition VII.2.9 existiert daher $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $w = \lambda v$. Dies zeigt (a) und (c). Behauptung (b) ist trivial, $\cos(\pi/2) = 0$. $\square$

VII.2.18. Bemerkung (Cosinussatz). Sind $v \neq 0 \neq w$ zwei Vektoren in einem Euklidischen Vektorraum und bezeichnet α den Winkel zwischen v und w, so gilt

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\cos(\alpha)\|v\|\|w\|,$$

siehe Aufgabe 101.

VII.2.19. Definition (Orthogonalität). Sei V ein Euklidischer oder unitärer Vektorraum. Zwei Vektoren $v, w \in V$ werden *orthogonal* genannt, falls $\langle v, w\rangle = 0$. Wir schreiben in diesem Fall $v \perp w$. Ein Vektor $v \in V$ wird *normiert* genannt, falls $\|v\| = 1$. Unter einem *Orthonormalsystem* in V verstehen wir ein System von Vektoren $v_i \in V$, $i \in I$, sodass $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$, für alle $i, j \in I$. Eine *Orthonormalbasis* von V ist ein Orthonormalsystem, dass eine Basis von V bildet.

VII.2.20. Beispiel. Die Standardbasen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind Orthonormalbasen bezüglich der standard inneren Produkte, siehe Beispiel VII.2.4 und VII.2.5. Für jedes $\theta \in \mathbb{R}$ bilden die beiden Vektoren,

$$b_1 = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b_2 = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix},$$

eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$.

[11] Der Cosinus schränkt sich zu einer Bijektion $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ ein.

Eine Basis, B, eines endlich dimensionalen Euklidischen oder unitären Vektorraums, V, ist also genau dann eine Orthonormalbasis, wenn die Matrixdarstellung des inneren Produkts bezüglich B durch die Einheitsmatrix gegeben ist, d.h.

$$\langle v, w\rangle = [v]_B^*[w]_B, \qquad \text{bzw.} \qquad \|v\|^2 = [v]_B^*[v]_B, \qquad v, w \in V. \tag{VII.11}$$

Nach den Ergebnissen des vorangehenden Abschnitts besitzt jeder endlich dimensionale Euklidische (Korollar VII.1.39) oder unitäre (Korollar VII.1.26) Vektorraum daher eine Orthonormalbasis.

Ein System von Vektoren $b_1, \dots, b_n$ in $\mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Orthonormalbasis, wenn die Matrix $A = (b_1|\cdots|b_n)$ orthogonal ist, d.h.

$$A \in O_n = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A^t A = I_n\},$$

denn $(A^tA)_{ij} = b_i^t b_j = \langle b_i, b_j\rangle$. Etwa ist

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

für jedes $\theta \in \mathbb{R}$, eine orthogonale Matrix. Beachte, dass jedes $A \in O_n$ invertierbar ist, $A^{-1} = A^t$, es gilt daher auch $AA^t = I_n$. Im vorangehenden Abschnitt haben wir gesehen, dass O_n eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bildet, sie wird die *orthogonale Gruppe* genannt, ihre Elemente werden als *orthogonale Matrizen* bezeichnet. Es gilt $\det(A) = \pm 1$, für jede orthogonale Matrix $A \in O_n$, vgl. Aufgabe 109. Die Determinante liefert einen surjektiven Gruppenhomomorphismus, $\det\colon O_n \to \{\pm 1\}$, wobei $\{\pm 1\}$ bezüglich Multiplikation als (abelsche) Gruppe aufgefasst wird. Sein Kern,

$$\mathrm{SO}_n := \{A \in O_n : \det(A) = 1\},$$

bildet eine Untergruppe von O_n, die als *spezielle orthogonale Gruppe* bezeichnet wird. Es lässt sich zeigen, dass O_n und SO_n kompakte Teilmengen von $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ sind, vgl. Aufgabe 108.

Analog ist ein System von Vektoren $b_1, \dots, b_n$ in $\mathbb{C}^n$ genau dann eine Orthonormalbasis, wenn die Matrix $A = (b_1|\cdots|b_n)$ unitär ist, d.h.

$$A \in U_n = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) : A^*A = I_n\},$$

denn $(A^*A)_{ij} = b_i^* b_j = \langle b_i, b_j\rangle$. Jedes $A \in U_n$ ist invertierbar, $A^{-1} = A^*$, es gilt daher auch $AA^* = I_n$. Im vorangehenden Abschnitt haben wir gesehen, dass U_n eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ bildet, sie wird die *unitäre Gruppe* genannt, ihre Elemente werden als *unitäre Matrizen* bezeichnet. Es gilt $|\det(A)| = 1$, für jede unitäre Matrix $A \in U_n$. Die Determinante liefert einen surjektiven Gruppenhomomorphismus, $\det\colon U_n \to S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, wobei S^1 bezüglich Multiplikation als (abelsche) Gruppe aufgefasst wird. Sein Kern,

$$\mathrm{SU}_n := \{A \in U_n : \det(A) = 1\},$$

bildet eine Untergruppe von U_n, die als *spezielle unitäre Gruppe* bezeichnet wird. Es lässt sich zeigen, dass U_n und SU_n kompakte Teilmengen von $M_{n\times n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{4n^2}$ sind.

VII.2.21. Lemma. *Jedes Orthonormalsystem eines Euklidischen oder unitären Vektorraums ist linear unabhängig.*

Beweis. O.B.d.A. genügt es endliche Orthonormalsysteme zu betrachten. Sei also $v_1, \dots, v_n$, ein Orthonormalsystem in V. Weiters seien λ_i Skalare, sodass $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$. Für jedes $i = 1, \dots, n$, erhalten wir

$$0 = \langle v_i, 0\rangle = \langle v_i, \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n\rangle = \lambda_1\langle v_i, v_1\rangle + \cdots + \lambda_n\langle v_i, v_n\rangle = \lambda_i,$$

denn $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$, für alle $1 \leq i, j \leq n$. Dies zeigt, dass $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind. □

VII.2.22. Proposition. *Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Orthonormalbasis eines endlich dimensionalen Euklidischen oder unitären Vektorraums V. Dann gilt*

$$v = \sum_{i=1}^{n} \langle b_i, v\rangle b_i \qquad \textit{bzw.} \qquad [v]_B = \begin{pmatrix} \langle b_1, v\rangle \\ \vdots \\ \langle b_n, v\rangle \end{pmatrix},$$

und daher auch

$$\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle b_i, v\rangle|^2 \qquad \textit{und} \qquad \langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle b_i, v\rangle}\langle b_i, w\rangle,$$

für alle $v, w \in V$.

Beweis. Da B eine Basis von V bildet, existieren Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, sodass $v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$. Es folgt

$$\langle b_i, v\rangle = \left\langle b_i, \textstyle\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j \right\rangle = \textstyle\sum_{j=1}^n \lambda_j \langle b_i, b_j\rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \delta_{ij} = \lambda_i.$$

Die verbleibenden Behauptungen folgen aus (VII.11). □

VII.2.23. Satz (Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahren). *Sei V ein Euklidischer oder unitärer Vektorraum und $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig in V. Dann bilden die rekursiv definierten Vektoren*

$$b_i := \frac{v_i - \sum_{j=1}^{i-1}\langle b_j, v_i\rangle b_j}{\left\|v_i - \sum_{j=1}^{i-1}\langle b_j, v_i\rangle b_j\right\|}, \qquad 1 \leq i \leq n, \tag{VII.12}$$

ein Orthonormalsystem von V, das den selben Teilraum wie $v_1, \dots, v_n$ aufspannt. Insbesondere ist der Nenner in (VII.12) *stets verschieden von Null. Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, dann bildet $b_1, \dots, b_n$ eine Orthonormalbasis von V.*

Beweis. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach n. Der Induktionsanfang, $n = 1$, ist trivial, denn aus $v_1 \neq 0$ folgt $\|v_1\| \neq 0$, also ist $b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ wohldefiniert, $\|b_1\| = 1$ und $\langle b_1\rangle = \langle v_1\rangle$. Für den Induktionsschritt dürfen wir nun annehmen, dass $b_1, \dots, b_{n-1}$ ein wohldefiniertes Orthonormalsystem bildet, für das $\langle b_1,\dots,b_{n-1}\rangle = \langle v_1,\dots,v_{n-1}\rangle$ gilt. Betrachten wir $\tilde b_n := v_n - \sum_{j=1}^{n-1}\langle b_j, v_n\rangle b_j$, dann gilt zunächst

$$\langle b_1,\dots,b_{n-1},\tilde b_n\rangle = \langle b_1,\dots,b_{n-1},v_n\rangle = \langle v_1,\dots,v_{n-1},v_n\rangle,$$

wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $v_1,\dots,v_n$ muss daher $\tilde b_n \neq 0$ sein. Daher ist $b_n = \frac{\tilde b_n}{\|\tilde b_n\|}$ wohldefiniert und $\langle b_1,\dots,b_n\rangle = \langle v_1,\dots,v_n\rangle$. Nach Konstruktion ist $\|b_n\| = 1$ und

$$\langle b_k,\tilde b_n\rangle = \langle b_k, v_n\rangle - \sum_{j=1}^{n-1}\langle b_j, v_n\rangle \underbrace{\langle b_k, b_j\rangle}_{=\delta_{kj}} = \langle b_k, v_n\rangle - \langle b_k, v_n\rangle = 0, \qquad 1 \le k < n,$$

also auch $\langle b_k, b_n\rangle = \frac{1}{\|\tilde b_n\|}\langle b_k,\tilde b_n\rangle = 0$, für alle $1 \le k < n$. □

VII.2.24. Korollar. *a) Jeder endlich dimensionale Euklidische oder unitäre Vektorraum besitzt eine Orthonormalbasis.*

b) Jedes Orthonormalsystem eines endlich dimensionalen Euklidischen oder unitären Vektorraums kann zu einer Orthonormalbasis erweitert werden.

Beweis. Sei also $v_1,\dots,v_k$ ein Orthonormalsystem in V. Wir ergänzen zu einer Basis, $v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n$ von V und wenden darauf das Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahren an. Dies liefert eine Orthonormalbasis $b_1,\dots,b_n$ von V. Da $v_1,\dots,v_k$ ein Orthonormalsystem bildet gilt $b_i = v_i$ für $i = 1,\dots,k$, vgl. (VII.12). Dies zeigt (b). Behauptung (a) ist ein Spezialfall ($k = 0$), wir haben die Existenz von Orthonormalbasen aber bereits im vorangehenden Abschnitt (mit ähnlichen Methoden) gezeigt, vgl. die Korollare VII.1.39 und VII.1.26. □

VII.2.25. Beispiel. Betrachte den Euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem standard inneren Produkt und die von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}6\\8\\7\end{pmatrix}$$

aufgespannte Ebene $W = \langle v_1, v_2\rangle$ in $\mathbb{R}^3$. Wir wollen eine Orthonormalbasis von W bestimmen. Mit Hilfe des Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahrens erhalten wir

$$b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$$

$$\tilde b_2 = v_2 - \langle b_1, v_2\rangle b_1 = \begin{pmatrix}6\\8\\7\end{pmatrix} - \frac{50}{25}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix}, \qquad b_2 = \frac{\tilde b_2}{\|\tilde b_2\|} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Nach Satz VII.2.23 bildet daher b_1, b_2 eine Orthonormalbasis von W.

VII.2.26. Beispiel. Betrachte den Euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem standard inneren Produkt und den von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Teilraum $W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ von $\mathbb{R}^4$. Wir wollen eine Orthonormalbasis von W bestimmen. Mit Hilfe des Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahrens erhalten wir

$$b_1 = \frac{v_1}{\|\tilde{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_2 = v_2 - \langle b_1, v_2 \rangle b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{8}{14} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 13 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{\tilde{b}_2}{\|\tilde{b}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{462}} \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 13 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_3 = v_3 - \langle b_1, v_3 \rangle b_1 - \langle b_2, v_3 \rangle b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{8}{14} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{10}{462} \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \\ 13 \\ -12 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} 94 \\ -26 \\ -14 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = \frac{\tilde{b}_3}{\|\tilde{b}_3\|} = \frac{1}{4\sqrt{627}} \begin{pmatrix} 94 \\ -26 \\ -14 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Nach Satz VII.2.23 ist daher b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von W.

VII.2.27. Beispiel. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem inneren Produkt

$$\langle x, y \rangle = x^t A y, \qquad \text{wobei} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}. \tag{VII.13}$$

Aus dem Sylvester Kriterium folgt sofort, dass dies tatsächlich positiv definit ist. Wir wollen eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bestimmen und wenden dazu das Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahren auf die Standardbasis e_1, e_2, e_3 an.

$$b_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

denn $\|e_1\|^2 = e_1^t A e_1 = 1$.

$$\tilde{b}_2 = e_2 - \langle b_1, e_2\rangle b_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{\tilde{b}_2}{\|\tilde{b}_2\|} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},$$

denn $\langle b_1, e_2\rangle = b_1^t A e_2 = -2$ und $\|\tilde{b}_2\|^2 = \tilde{b}_2^t A \tilde{b}_2 = 1$.

$$\tilde{b}_3 = e_3 - \langle b_1, e_3\rangle b_1 - \langle b_2, e_3\rangle b_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$b_3 = \frac{\tilde{b}_3}{\|\tilde{b}_3\|} = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix},$$

denn $\langle b_1, e_3\rangle = b_1^t A e_3 = 1$, $\langle b_2, e_3\rangle = b_2^t A e_3 = -2$ und $\|\tilde{b}_3\|^2 = \tilde{b}_3^t A \tilde{b}_3 = 1$. Nach Satz VII.2.23 ist daher b_1, b_2, b_3 eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des inneren Produkts (VII.13).

VII.2.28. Korollar (QR-Zerlegung).

a) Jede invertierbare Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ lässt sich auf eindeutige Weise in der Form $A = QR$ schreiben, wobei $Q \in O_n$ und $R \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ eine (invertierbare) obere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonaleinträgen ist.

b) Jede invertierbare Matrix $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ lässt sich auf eindeutige Weise in der Form $A = QR$ schreiben, wobei $Q \in U_n$ und $R \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ eine (invertierbare) obere Dreiecksmatrix mit positiven (reellen) Diagonaleinträgen ist.

Beweis. Wir zeigen nur (b), der erste Teil lässt sich völlig analog beweisen. Da die Matrix $A = (v_1|\cdots|v_n)$ invertierbar ist, bilden ihre Spalten $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$. Wenden wir darauf das Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahren an, erhalten wir eine Orthonormalbasis $b_1, \dots, b_n$ von $\mathbb{C}^n$ und Skalare $r_{1i}, \dots, r_{ii} \in \mathbb{C}$, sodass

$$v_i = r_{1i} b_1 + \cdots + r_{ii} b_i \quad \text{und} \quad r_{ii} > 0, \tag{VII.14}$$

für alle $i = 1, \dots, n$, siehe (VII.12). Die Matrix $Q := (b_1|\cdots|b_n)$ ist unitär, denn $(Q^*Q)_{ij} = b_i^* b_j = \langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij}$, also $Q^*Q = I_n$. Offensichtlich ist

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & r_{nn} \end{pmatrix}$$

eine obere Dreiecksmatrix mit positiven reellen Diagonaleinträgen. Die Gleichungen (VII.14) besagen gerade $A = QR$.

Um die Eindeutigkeit der Darstellung einzusehen, seien nun $Q_1, Q_2 \in U_n$ und R_1, R_2 zwei obere Dreiecksmatrizen mit positiven reellen Diagonaleinträgen mit

$$Q_1 R_1 = Q_2 R_2.$$

Es gilt daher

$$R = Q,$$

wobei $Q := (Q_2)^{-1}Q_1 \in U_n$ und $R := R_2(R_1)^{-1}$ eine obere Dreiecksmatrix mit positiven reellen Diagonaleinträgen ist.[12] Daraus erhalten wir $R^*R = Q^*Q = I_n$, also $R^* = R^{-1}$. Beachte, dass R^* eine untere Dreiecksmatrix ist und R^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist. Aus der vorangehenden Gleichheit schließen wir, dass R eine Diagonalmatrix sein muss. Aus $R^*R = I_n$ folgt, dass alle Diagonaleinträge Absolutbetrag 1 haben. Da sie alle positiv und reell sind muss $R = I_n$ gelten, d.h. $R_1 = R_2$. Somit auch $Q = I_n$ und $Q_1 = Q_2$. □

VII.2.29. Beispiel. Wir wollen die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Wir wenden also das Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahren auf die Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

an und erhalten:

$$b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \frac{v_2 - \langle b_1, v_2\rangle b_1}{\|v_2 - \langle b_1, v_2\rangle b_1\|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = \frac{v_3 - \langle b_1, v_3\rangle b_1 - \langle b_2, v_3\rangle b_2}{\|v_3 - \langle b_1, v_3\rangle b_1 - \langle b_2, v_3\rangle b_2\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$b_4 = \frac{v_4 - \langle b_1, v_4\rangle b_1 - \langle b_2, v_4\rangle b_2 - \langle b_3, v_4\rangle b_3}{\|v_4 - \langle b_1, v_4\rangle b_1 - \langle b_2, v_4\rangle b_2 - \langle b_3, v_4\rangle b_3\|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[12] Die Menge der reellen bzw. komplexen oberen Dreiecksmatrizen mit positiven Diagonaleinträgen bildet eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, vgl. Aufgabe 112.

Somit ist $A = QR$ wobei

$$Q = (b_1|b_2|b_3|b_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = Q^{-1}A = Q^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

VII.2.30. Definition (Orthogonales Komplement). Sei V ein Euklidischer oder unitärer Vektorraum und $X \subseteq V$ eine Teilmenge. Unter dem *orthogonalen Komplement* von X verstehen wir den Teilraum

$$X^\perp := \big\{ v \in V \bigm| \forall x \in X : \langle x, v \rangle = 0 \big\} = \bigcap_{x \in X} \ker\big(\langle x, - \rangle\big).$$

VII.2.31. Lemma. *Sei V ein Euklidischer oder unitärer Vektorraum. Weiters seien X, Y, X_1, X_2 Teilmengen und W, W_1, W_2 Teilräume von V. Dann gilt:*

(a) $\{0\}^\perp = V$.
(b) $X \subseteq X^{\perp\perp}$.
(c) $X \subseteq Y$ *dann* $Y^\perp \subseteq X^\perp$.
(d) $(X_1 \cup X_2)^\perp = X_1^\perp \cap X_2^\perp$.
(e) $\langle X \rangle^\perp = X^\perp$.
(f) $W \cap W^\perp = \{0\}$.
(g) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.

Beweis. Die erste Aussage (a) ist trivial. Behauptung (b) folgt sofort aus: $\langle x, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle v, x \rangle = 0$. Die Aussagen (c) und (d) sind trivial. Ad (e): Die eine Inklusion, $\langle X \rangle^\perp \subseteq X^\perp$, folgt aus (c), denn $X \subseteq \langle X \rangle$. Um auch die umgekehrte Inklusion, $X^\perp \subseteq \langle X \rangle^\perp$, einzusehen, sei $v \in X^\perp$ und $w \in \langle X \rangle$. Es existieren daher $x_i \in X$ und Skalare λ_i, sodass $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. Mit der Bilinearität des inneren Produkts erhalten wir $\langle v, w \rangle = \lambda_1 \langle v, x_1 \rangle + \cdots + \lambda_n \langle v, x_n \rangle = 0$, da ja $\langle v, x_i \rangle = 0$. Dies zeigt $v \in \langle X \rangle^\perp$, für jedes $v \in X^\perp$, also $X^\perp \subseteq \langle X \rangle^\perp$. Ad (f): Für $v \in W \cap W^\perp$ gilt $\langle v, v \rangle = 0$ und daher $v = 0$. Behauptung (g) ist eine Konsequenz von (d) und (e), denn $W_1 + W_2 = \langle W_1 \cup W_2 \rangle$ und daher $(W_1 + W_2)^\perp = \langle W_1 \cup W_2 \rangle^\perp = (W_1 \cup W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$. □

VII.2.32. Satz (Orthogonalprojektion). *Ist V ein Euklidischer oder unitärer Vektorraum und W ein endlich dimensionaler Teilraum von V, dann gilt*

$$V = W \oplus W^\perp. \tag{VII.15}$$

Der mit dieser Zerlegung assoziierte Projektor, $p \colon V \to W$, wird Orthogonalprojektion *auf W genannt. Ist $b_1, \dots, b_k$ eine Orthonormalbasis von W, so gilt*

$$p(v) = \sum_{i=1}^k \langle b_i, v \rangle b_i, \qquad v \in V. \tag{VII.16}$$

Für jedes $v \in V$ ist $p(v)$ der eindeutig bestimmte Punkt in W mit kleinstem Abstand zu v, d.h. es gilt

$$d(p(v), v) \leq d(w, v),$$

für jedes $w \in W$, und Gleichheit tritt nur dann ein, wenn $w = p(v)$. Der Punkt $p(v) \in W$ mit kleinstem Abstand zu v ist daher durch $v - p(v) \in W^\perp$ eindeutig charakterisiert.

Beweis. Sei $b_1, \dots, b_k$ eine Orthonormalbasis von W, vgl. Korollar VII.2.24. Für die durch (VII.16) definierte lineare Abbildung $p\colon V \to W$ gilt $p|_W = \mathrm{id}_W$, siehe Proposition VII.2.22, also ist p ist ein Projektor mit $\mathrm{img}(p) = W$. Für seinen Kern erhalten wir aus der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $b_1, \dots, b_k$,

$$\ker(p) = \bigcap_{i=1}^k b_i^\perp = \{b_1, \dots, b_k\}^\perp = \langle b_1, \dots, b_k\rangle^\perp = W^\perp,$$

vgl. Lemma VII.2.31(e). Dies zeigt (VII.15) und (VII.16), vgl. Proposition II.5.8. Nach dem Satz von Pythagoras, siehe Proposition VII.2.8, gilt für jedes $w \in W$,

$$\|v - w\|^2 = \|v - p(v) + p(v) - w\|^2 = \|v - p(v)\|^2 + \|p(v) - w\|^2 \geq \|v - p(v)\|^2,$$

denn $v - p(v) \in \ker(p) = W^\perp$ und $p(v) - w \in W$, also $\big\langle v - p(v), p(v) - w\big\rangle = 0$. Dies zeigt $d(w, v) \geq d(p(v), v)$. Gleichheit kann nur dann eintreten, wenn $\|p(v) - w\|^2 = 0$, d.h. $w = p(v)$ gilt. □

VII.2.33. Korollar. *Ist V ein endlich dimensionaler Euklidischer oder unitärer Vektorraum dann gilt für jeden Teilraum W von V:*
(a) $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W)$.
(b) $W^{\perp\perp} = W$.
(c) $W^\perp = \{0\} \Rightarrow W = V$.
(d) $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$, *für je zwei Teilräume W_1 und W_2 von V.*

Beweis. Behauptung (a) folgt aus (VII.15) und einer bekannten Dimensionsformel. Daraus erhalten wir auch $\dim(W^{\perp\perp}) = \dim(W)$, also (b), da ja $W \subseteq W^{\perp\perp}$ nach Lemma VII.2.31(b). Behauptung (c) folgt dann aus $\{0\}^\perp = V$, siehe Lemma VII.2.31(a). Aus Lemma VII.2.31(g) erhalten wir

$$(W_1^\perp + W_2^\perp)^\perp = W_1^{\perp\perp} \cap W_2^{\perp\perp} = W_1 \cap W_2$$

und daher $(W_1 \cap W_2)^\perp = (W_1^\perp + W_2^\perp)^{\perp\perp} = W_1^\perp + W_2^\perp$, womit auch (d) gezeigt wäre. □

Ist W ein endlich dimensionaler Teilraum eines Euklidischen oder unitären Vektorraums V, und ist $v \in V$, dann wird

$$d(v, W) := \min_{w \in W} d(v, w) = d\big(v, p(v)\big) = \|v - p(v)\| = \Big\|v - \sum_{i=1}^k \langle b_i, v\rangle b_i\Big\|$$