# VIII. Affine und projektive Geometrie

Wir beginnen dieses Kapitel mit einem Abschnitt, in dem wir grundlegende Konzepte der affinen Geometrie besprechen: affine Abbildungen, affine Teilräume, affine Hüllen, affine Unabhängigkeit, affine Koordinatensysteme. Alles lässt sich hier sehr leicht auf den linearen Fall zurückführen. Wir vermeiden das Kozept des affinen Raums über einem Vektorraum [**11**] und betrachten nur affine Abbildungen zwischen Vektorräumen, bzw. affine Teilräume von Vektorräumen. Am Ende des ersten Abschnitts geben wir einen Beweis des Fundamentalsatzes der affinen Geometrie, siehe Satz VIII.1.32. Dieser besagt, dass affine Isomorphismen als jene Bijektionen charakterisiert werden können, die Geraden auf Geraden abbilden.

Im zweiten Abschnitt betrachten wir dann Quadriken, d.h. Teilmengen, die sich durch eine quadratische Gleichung beschreiben lassen. Das erste Resultat ist eine Klassifikation aller Quadriken, bis auf affine Isomorphismen. Wir werden zeigen, dass jede Quadrik in $\mathbb{C}^n$ bzw. $\mathbb{R}^n$ zu einer von endlich vielen, sehr expliziten Normalformen affin kongruent ist. Dies ist eine grobe Klassifikation, etwa kann jede Ellipse durch einen affinen Isomorphismus auf den Einheitskreis abgebildet werden und ist daher zum Einheitskreis affin kongruent. Neben den Ellipsen treffen wir hier auch Hyperbeln, Parabeln und einige weitere, degenerierte Fälle an. Dabei ist die komplexe Klassifikation, siehe Korollar VIII.2.10, etwas einfacher als die reelle, siehe Korollar VIII.2.13. Dies hängt damit zusammen, dass die Klassifikation der komplexen quadratischen Form (Rang) einfacher ist als die Klassifikation der reellen quadratische Formen (Signatur). Anschließend diskutieren wir die metrische Klassifikation reeller Quadriken. Wir werde sehen, dass jede reelle Quadrik durch eine Bewegung auf eine Normalform in Hauptlage gebracht werden kann. Die Liste der Normalformen, siehe Korollar VIII.2.19, hat nun auch kontinuierliche Parameter, etwa können zwei Ellipsen nur dann metrisch kongruent sein, wenn sie die gleichen Halbachsen haben.

Nachdem wir im dritten Abschnitt projektive Räume und Abbildungen besprochen haben wenden wir uns im vierten Abschnitt dann den Quadriken in projektiven Räumen zu. Die Klassifikation der projektiven Quadriken ist einfacher als die Klassifikation der affinen Quadriken. Etwa sind Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln alle zum Kreis projektiv kongruent: wir können eine Parabel als eine Kreis verstehen, der die Ferngerade in einem Punkt schneidet; und eine Hyperbel ist ein Kreis, der die Ferngerade in zwei Punkten schneidet.

Wir orientieren uns hier an der Darstellung [**11**], siehe aber auch [**12**].

**VIII.1. Affine Räume und Abbildungen.** Sei $V$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Unter einer *Affinkombination* von $v_1, \dots v_k \in V$ verstehen wir jeden Ausdruck der Form

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k,$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ und $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

VIII.1.1. Beispiel. Sind $v_1$ und $v_2$ zwei verschiedene Punkte in $\mathbb{R}^3$, dann stimmt die Menge der Affinkombinationen, $\{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \mid \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$, mit der Geraden durch $v_1$ und $v_2$ überein. Sind $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, dann ist $\bigl\{\sum_{i=1}^3 \lambda_i v_i \bigm| \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1\bigr\}$ die von $v_1$, $v_2$ und $v_3$ aufgespannte Ebene.

VIII.1.2. Definition (Affine Abbildung). Seien $V$ und $W$ zwei Vektorräume über $\mathbb{K}$. Eine Abbildung $\alpha\colon V \to W$ wird *affin* genannt wenn sie mit Affinkombinationen verträglich ist, d.h. wenn für alle $v_1, \dots, v_k \in V$ und alle $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ gilt:

$$\alpha\bigl(\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_k v_k\bigr) = \lambda_1 \alpha(v_1) + \cdots + \lambda_k \alpha(v_k).$$

VIII.1.3. Lemma. *Die Komposition zweier affiner Abbildungen ist affin. Die Umkehrabbildung einer bijektiven affinen Abbildung ist affin. Insbesondere bildet*

$$\mathrm{Aff}(V) := \bigl\{\alpha\colon V \to V \bigm| \alpha \text{ affin und invertierbar}\bigr\}$$

*eine Gruppe.*

Beweis. Seien $\alpha_1\colon V_1 \to V_2$ und $\alpha_2\colon V_2 \to V_3$ zwei affine Abbildungen, $v_i \in V_1$ und $\lambda_i \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_1 = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(\alpha_2 \circ \alpha_1)\bigl(\textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i\bigr) &= \alpha_2\bigl(\alpha_1\bigl(\textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i\bigr)\bigr) = \alpha_2\bigl(\textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_1(v_i)\bigr)\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_2(\alpha_1(v_i)) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\alpha_2 \circ \alpha_1)(v_i),\end{aligned}$$

also ist auch die Komposition, $\alpha_2 \circ \alpha_1\colon V_1 \to V_3$ affin.

Sei nun $\alpha\colon V \to W$ eine bijektive affine Abbildung, $w_i \in W$ und $\lambda_i \in \mathbb{K}$, sodasss $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Da $\alpha$ affin ist gilt:

$$\alpha\bigl(\textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha^{-1}(w_i)\bigr) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha(\alpha^{-1}(w_i)) = \sum_{i=1}^k \lambda_i w_i.$$

Wenden wir darauf $\alpha^{-1}$ an, erhalten wir

$$\textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha^{-1}(w_i) = \alpha^{-1}\bigl(\sum_{i=1}^k \lambda w_i\bigr),$$

also ist $\alpha^{-1}$ affin. □

VIII.1.4. Beispiel. Sei $\varphi\colon V \to W$ linear und $w \in W$. Dann ist

$$\alpha\colon V \to W, \qquad \alpha(v) := \varphi(v) + w,$$

eine affine Abbildung. Sind nämlich $v_i \in V$ und $\lambda_i \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, so gilt

$$\begin{aligned}\alpha\bigl(\textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i\bigr) &= \varphi\bigl(\textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i\bigr) + w = \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi(v_i) + w\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i\bigl(\varphi(v_i) + w\bigr) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha(v_i).\end{aligned}$$

Wir werden gleich sehen, dass jede affine Abbildung von dieser Form ist.

VIII.1.5. Lemma. *Ist $\alpha\colon V \to W$ eine affine Abbildung, dann existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\phi_\alpha\colon V \to W$ und ein eindeutiges $w_\alpha \in W$, sodass*

$$\alpha(v) = \phi_\alpha(v) + w_\alpha,$$

*für alle $v \in V$. Dabei ist $w_\alpha = \alpha(0)$ und $\phi_\alpha(v) = \alpha(v) - \alpha(0)$. Weiters gilt*

$$\phi_{\alpha_2\circ\alpha_1} = \phi_{\alpha_2}\phi_{\alpha_1} \qquad \textit{und} \qquad w_{\alpha_2\circ\alpha_1} = \phi_{\alpha_2}(w_{\alpha_1}) + w_{\alpha_2}, \tag{VIII.1}$$

*für je zwei affine Abbildungen $\alpha_1\colon V_1 \to V_2$ und $\alpha_2\colon V_2 \to V_3$. Schließlich ist eine affine Abbildung $\alpha$ genau dann invertierbar, wenn ihr linearer Teil $\phi_\alpha$ invertierbar ist, und in diesem Fall gilt:*

$$\phi_{\alpha^{-1}} = \phi_\alpha^{-1} \qquad \textit{und} \qquad w_{\alpha^{-1}} = -\phi_\alpha^{-1}(w_\alpha). \tag{VIII.2}$$

Beweis. Die Eindeutigkeitsaussage ist trivial. Es ist nur zu zeigen, dass die Abbildung $\phi_\alpha\colon V \to W$, $\phi_\alpha(v) := \alpha(v) - \alpha(0)$, linear ist. Sind $v_1, v_2 \in V$ so gilt

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(v_1 + v_2) &= \alpha(v_1 + v_2) - \alpha(0) = \alpha\big(1\cdot v_1 + 1\cdot v_2 - 1\cdot 0\big) - \alpha(0)\\ &= 1\cdot\alpha(v_1) + 1\cdot\alpha(v_2) - 1\cdot\alpha(0) - \alpha(0) = \phi_\alpha(v_1) + \phi_\alpha(v_2),\end{aligned}$$

denn $1\cdot v_1 + 1\cdot v_2 - 1\cdot 0$ ist eine Affinkombination von $v_1$, $v_2$ und $0$, da ja $1+1-1 = 1$. Für $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ erhalten wir analog

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(\lambda v) &= \alpha(\lambda v) - \alpha(0) = \alpha\big(\lambda v + (1-\lambda)0\big) - \alpha(0)\\ &= \lambda\alpha(v) + (1-\lambda)\alpha(0) - \alpha(0) = \lambda\big(\alpha(v) - \alpha(0)\big) = \lambda\phi_\alpha(v),\end{aligned}$$

denn $\lambda v + (1-\lambda)0$ ist eine Affinkombination von $v$ und $0$, da ja $\lambda + (1-\lambda) = 1$.

Sind $\alpha_1\colon V_1 \to V_2$ und $\alpha_2\colon V_2 \to V_3$ zwei affine Abbildungen so folgt

$$\begin{aligned}(\alpha_2\circ\alpha_1)(v) &= \phi_{\alpha_2}(\alpha_1(v)) + w_{\alpha_2}\\ &= \phi_{\alpha_2}(\phi_{\alpha_1}(v) + w_{\alpha_1}) + w_{\alpha_2} = \phi_{\alpha_2}(\phi_{\alpha_1}(v)) + \phi_{\alpha_2}(w_{\alpha_1}) + w_{\alpha_2}.\end{aligned}$$

Dies zeigt (VIII.1). Daraus folgt nun auch, dass der lineare Teil einer invertierbaren affinen Abbildung invertierbar ist und, dass in diesem Fall (VIII.2) gilt, denn $\phi_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$ und $w_{\mathrm{id}} = 0$. Ist umgekehrt $\alpha$ affin und $\phi_\alpha$ invertierbar, dann ist $v \mapsto \phi_\alpha^{-1}(v) - \phi_\alpha^{-1}(w_\alpha)$ die Umkehrabbildung von $\alpha$, also $\alpha$ invertierbar. □

Nach dem vorangehenden Lemma ist

$$\mathrm{Aff}(V) \to \mathrm{GL}(V), \qquad \alpha \mapsto \phi_\alpha, \tag{VIII.3}$$

ein surjektiver Gruppenhomomorphismus. Für jedes $w \in V$ bezeichne $\tau_w\colon V \to V$, $\tau_w(v) := v + w$, die Translation um $w$. Beachte, dass dies einen injektiven Gruppenhomomorphismus

$$V \to \mathrm{Aff}(V), \qquad w \mapsto \tau_w, \tag{VIII.4}$$

liefert, denn offensichtlich gilt $\tau_{w_1+w_2} = \tau_{w_1}\circ\tau_{w_2}$, und $w = \tau_w(0)$. Schließlich stimmt der Kern von (VIII.3) mit dem Bild von (VIII.4) überein, d.h.

$$\{\alpha \in \mathrm{Aff}(V) : \phi_\alpha = \mathrm{id}_V\} = \{\tau_v : v \in V\}.$$

Aus diesem Grund wird $\operatorname{Aff}(V)$ als eine Gruppenerweiterung von $\mathrm{GL}(V)$ bezeichnet. Wir erhalten eine Bijektion

$$\operatorname{Aff}(V) \cong V \times \mathrm{GL}(V), \qquad \alpha \leftrightarrow (w_\alpha, \phi_\alpha),$$

und dies wird ein Gruppenisomorphismus, wenn wir $V \times \mathrm{GL}(V)$ mit der Multiplikation

$$(w_2, \phi_2) \cdot (w_1, \phi_1) := \big(w_2 + \phi_2(w_1), \phi_2\phi_1\big)$$

ausstatten, siehe (VIII.1).

VIII.1.6. Definition (Affine Teilräume). Eine Teilmenge $A$ eines Vektorraums $V$ wird *affiner Teilraum* genannt, wenn sie invariant unter Affinkombinationen ist, d.h. wenn für alle $a_i \in A$ und $\lambda_i \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ auch $\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i$ in $A$ liegt.

VIII.1.7. Beispiel. Die leere Menge ist ein affiner Teilraum von $V$.

VIII.1.8. Beispiel. Jeder lineare Teilraum von $V$ ist ein affiner Teilraum.

VIII.1.9. Beispiel. Sind $A_i$ affine Teilräume von $V$, dann ist $\bigcap_i A_i$ ein affiner Teilraum von $V$.

VIII.1.10. Beispiel. Ist $\alpha\colon V \to W$ eine affine Abbbildung und $A$ ein affiner Teilraum von $W$, dann ist das Urbild, $\alpha^{-1}(A) = \{v \in V : \alpha(v) \in A\}$, ein affiner Teilraum von $V$. Sind nämlich $v_i \in \alpha^{-1}(A)$ und $\lambda_i \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, dann folgt $\alpha\big(\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i\big) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha(v_i) \in A$, also $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i \in \alpha^{-1}(A)$.

VIII.1.11. Beispiel. Ist $\alpha\colon V \to W$ eine affine Abbbildung und $A$ ein affiner Teilraum von $V$, dann ist das Bild, $\alpha(A)$, ein affiner Teilraum von $W$. Sind nämlich $w_i \in \alpha(A)$, dann existieren $a_i \in A$ mit $\alpha(a_i) = w_i$, und für $\lambda_i \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, erhalten wir $\sum_{i=1}^k \lambda_i w_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha(a_i) = \alpha\big(\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i\big) \in \alpha(A)$.

VIII.1.12. Beispiel. Ist $W$ ein linearer Teilraum von $V$ und $v \in V$, dann ist $A = v + W$ ein affiner Teilraum von $V$. Dies folgt aus den vorangehenden Beispielen, denn $W$ ist affiner Teilraum und die Translation $\tau_v$ ist eine affine Abbildung. Wir werden gleich sehen, dass jeder nicht-leere affine Teilraum von dieser Gestalt ist.

VIII.1.13. Lemma. *Ist $A$ ein nicht-leerer affiner Teilraum von $V$, dann bildet*

$$V_A := \{a_2 - a_1 \mid a_1, a_2 \in A\}$$

*einen linearen Teilraum von $V$ und es gilt $A = a + V_A$, für jedes $a \in A$.*

Beweis. Zunächst ist $V_A$ nicht leer, denn nach Voraussetzung ist $A \neq \emptyset$. Sei $a \in A$ beliebig. Sind $v, w \in V_A$, dann existieren $a_i, b_i \in A$ mit $v = a_2 - a_1$ und $w = b_2 - b_1$, und wir erhalten

$$v + w = \big(1 \cdot a_2 + 1 \cdot b_2 - 1 \cdot a\big) - \big(1 \cdot a_1 + 1 \cdot b_1 - 1 \cdot a\big) \in V_A.$$

Ist $v \in V_A$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann existieren $a_i \in A$ mit $v = a_2 - a_1$, also liegt auch

$$\lambda v = \big(\lambda a_2 + (1-\lambda)a\big) - \big(\lambda a_1 + (1-\lambda)a\big) \in V_A.$$

Dies zeigt, dass $V_A$ einen linearen Teilraum von $V$ bildet. Die Inklusion $A \subseteq a+V_A$ ist offensichtlich. Ist $v \in V_A$, dann existieren $a_i \in A$ mit $v = a_2 - a_1$ und wir erhalten $a+v = 1\cdot a + 1\cdot a_2 - 1\cdot a_1 \in A$, also gilt auch die umgekehrte Inklusion, $a + V \subseteq A$. □

VIII.1.14. Definition (Dimension). Ein affiner Teilraum $A \neq \emptyset$ eines Vektorraums $V$ wird *endlich-dimensional* genannt, wenn der lineare Teilraum $V_A$ endlich-dimensional ist. In diesem Fall definieren wir die Dimension von $A$ durch

$$\dim(A) := \dim(V_A).$$

1-dimensionale und 2-dimensionale affine Teilräume werden *Geraden* bzw. *Ebenen* genannt. Gilt $\dim(V) - \dim(A) = 1$, dann wird $A$ als *affine Hyperebene* bezeichnet.

VIII.1.15. Beispiel. Seien $A_1$ und $A_2$ zwei affine Teilräume eines Vektorraums $V$, sodass $\emptyset \neq A_1 \subseteq A_2$. Dann gilt $V_{A_1} \subseteq V_{A_2}$. Ist darüber hinaus $A_2$ endlich-dimensional, dann ist auch $A_1$ endlich-dimensional und $\dim(A_1) \leq \dim(A_2)$. Ist weiters $\dim(A_1) = \dim(A_2)$, dann ist schon $A_1 = A_2$.

VIII.1.16. Beispiel. Ist $A$ ein nicht-leerer affiner Teilraum eines endlich-dimensionalen Vektorraums $V$, und $k = \dim(V) - \dim(A)$, dann existieren affine Abbildungen $\alpha_1, \dots, \alpha_k \colon V \to \mathbb{K}$, sodass

$$A = \big\{v \in V \bigm| \alpha_1(v) = 0, \dots, \alpha_k(v) = 0\big\}.$$

Es existieren nämlich lineare Funktionale, $\varphi_1, \dots, \varphi_k \colon V \to \mathbb{K}$, sodass $V_A = \bigcap_{i=1}^k \ker(\varphi_i)$. Ist nun $a \in A$ beliebig, dann haben die affinen Abildungen $\alpha_i(v) := \varphi_i(v) - \varphi_i(a)$ die gewünschte Eigenschaft.

VIII.1.17. Beispiel. Ist $\alpha \in \mathrm{Aff}(V)$, dann gilt $\dim(\alpha(A)) = \dim(A)$ für jeden endlich-dimensionalen affinen Teilraum $A$, denn der lineare Teil von $\alpha$ liefert einen linearen Isomorphismus, $\phi_\alpha \colon V_A \to V_{\alpha(A)}$.

VIII.1.18. Beispiel. Sind $A$ und $A'$ zwei endlich-dimensionale affine Teilräume von $V$ mit $\dim(A) = \dim(A')$, dann existiert $\alpha \in \mathrm{Aff}(V)$, sodass $\alpha(A) = A'$. In anderen Worten, je zwei affine Teilräume gleicher Dimension sind *affin kongruent.* Nach den Ergebnissen über lineare Teilräume existiert zunächst $\phi \in \mathrm{GL}(V)$, sodass $\phi(V_A) = V_{A'}$. Sind nun $a \in A$ und $a' \in A'$ beliebig, dann hat $\alpha(v) := \phi(v) + a' - \phi(a)$ die gewünschte Eigenschaft.

VIII.1.19. Definition (Affine Hülle). Unter der *affinen Hülle* einer Teilmenge $S$ eines Vektorraums $V$ verstehen wir den kleinsten affinen Teilraum von $V$, der $S$ enthält, d.h.

$$\langle S\rangle_{\mathrm{aff}} := \bigcap_{S\subseteq A} A,$$

wobei der Durchschnitt über alle affinen Teilräume $A$ von $V$ genommen wird, die $S$ enthalten, vgl. Beispiel VIII.1.9.

VIII.1.20. Beispiel. Sind $\alpha_1, \alpha_2 \colon V \to W$ zwei affine Abbildungen und $S \subseteq V$ eine Teilmenge, sodass $\alpha_1|_S = \alpha_2|_S$, dann gilt schon $\alpha_1|_{\langle S\rangle_{\mathrm{aff}}} = \alpha_2|_{\langle S\rangle_{\mathrm{aff}}}$, denn $\{v \in V : \alpha_1(v) = \alpha_2(v)\}$ ist ein affiner Teilraum, der $S$ enthält.

VIII.1.21. Lemma. *Die affine Hülle einer Teilmenge $S \subseteq V$ lässt sich mittels Affinkombinationen wie folgt beschreiben:*
$$\langle S\rangle_{\mathit{aff}} = \big\{\textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i s_i \bigm| k \in \mathbb{N},\, s_i \in S,\, \lambda_i \in \mathbb{K},\, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\big\}.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass
$$A := \big\{\textstyle\sum_{i=1}^k \lambda_i s_i \bigm| k \in \mathbb{N},\, s_i \in S,\, \lambda_i \in \mathbb{K},\, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1\big\}$$
einen affinen Teilraum von $V$ bildet, denn offensichtlich gilt $\langle S\rangle_{\mathrm{aff}} \supseteq A \supseteq S$. Seien dazu $a_1, \dots, a_l \in A$ und $\mu_1, \dots, \mu_l \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{j=1}^l \mu_j = 1$. Es ist $\sum_{j=1}^l \mu_j a_j \in A$ zu zeigen. Da $a_j \in A$, existieren $s_j^1, \dots, s_j^{k_j} \in S$ und $\lambda_j^1, \dots, \lambda_j^{k_j} \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=1}^{k_j} \lambda_j^i = 1$ und $a_j = \sum_{i=1}^{k_j} \lambda_j^i s_j^i$. Es folgt
$$\sum_{j=1}^l \mu_j a_j = \sum_{j=1}^l \mu_j \sum_{i=1}^{k_j} \lambda_j^i s_j^i = \sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{k_j} \mu_j \lambda_j^i s_j^i \in A,$$
denn $\sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^{k_j} \mu_j \lambda_j^i = \sum_{j=1}^l \mu_j = 1$. □

VIII.1.22. Beispiel. Ist $\alpha \colon V \to W$ eine affine Abbildung und $S \subseteq V$ eine Teilmenge, dann gilt
$$\alpha(\langle S\rangle_{\mathrm{aff}}) = \langle \alpha(S)\rangle_{\mathrm{aff}}.$$
denn einerseits ist $\alpha(\langle S\rangle_{\mathrm{aff}})$ ein affiner Teilraum, der $\alpha(S)$ enthält, und andererseits ist $\alpha^{-1}(\langle \alpha(S)\rangle_{\mathrm{aff}})$ ein affiner Teilraum, der $S$ enthält.

VIII.1.23. Lemma. *Sei $A \neq \emptyset$ ein affiner Teilraum eines Vektorraums $V$ und $a_0, \dots, a_k \in A$. Dann sind äquivalent:*

*(a) $\langle a_0, \dots, a_k\rangle_{\mathit{aff}} = A$*
*(b) Die Vektoren $a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0$ bilden ein Erzeugendensystem von $V_A$.*

Beweis. Ad (a)⇒(b): Ist $v \in V_A$, dann gilt $v + a_0 \in A = \langle a_0, \dots, a_k\rangle_{\mathrm{aff}}$, also existieren $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$, sodass $v + a_0 = \sum_{i=0}^k \lambda_i a_i$, siehe Lemma VIII.1.23. Es folgt $v = \sum_{i=0}^k \lambda_i(a_i - a_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i(a_i - a_0)$, also erzeugen die Vektoren $a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0$ ganz $V_A$.

Ad (b)⇒(a): Es genügt $A \subseteq \langle a_0, \dots, a_k\rangle_{\mathrm{aff}}$ zu zeigen, die umgekehrte Inklusion ist trivial. Ist $a \in A$, dann gilt $a - a_0 \in V_A = \langle a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0\rangle$, also existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ mit $a - a_0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i(a_i - a_0)$. Wir erhalten die Darstellung $a = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i + (1 - \sum_{i=1}^k \lambda_i) a_0$, also $a \in \langle a_0, \dots, a_k\rangle_{\mathrm{aff}}$. □

VIII.1.24. Beispiel. Sind $A_1$ und $A_2$ zwei endlich-dimensionale affine Teilräume und $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, dann sind auch $A_1 \cap A_2$ und $\langle A_1 \cup A_2 \rangle_{\mathrm{aff}}$ endlich-dimensional und es gilt

$$\dim(A_1) + \dim(A_2) = \dim(A_1 \cap A_2) + \dim\bigl(\langle A_1 \cup A_2 \rangle_{\mathrm{aff}}\bigr).$$

Dies folgt aus der bekannten Formel für lineare Teilräume, da $V_{A_1 \cap A_2} = V_{A_1} \cap V_{A_2}$ und $V_{\langle A_1 \cup A_2 \rangle_{\mathrm{aff}}} = V_{A_1} + V_{A_2}$. Es ist nicht möglich dem leeren affinen Teilraum eine Dimension so zuzuordnen, dass diese Formel für beliebige endlich-dimensionale Teilräume $A_1$ und $A_2$ richtig bleibt. Diese Unannehmlichkeit löst sich in der projektiven Geometrie in Wohlgefallen auf.

VIII.1.25. Definition (Affine Unabhängigkeit). Sei $V$ ein Vektorraum. Ein System $a_0, \dots, a_k \in V$ wird *affin unabhängig* genannt wenn gilt: Sind $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$, sodass $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 = \sum_{i=0}^k \mu_i$ und $\sum_{i=0}^k \lambda_i a_i = \sum_{i=0}^k \mu_i a_i$, dann muss schon $\lambda_i = \mu_i$ gelten, für jedes $i = 0, \dots, k$.

VIII.1.26. Lemma. *Für ein System $a_0, \dots, a_k \in V$ sind äquivalent:*

*(a) $a_0, \dots, a_k$ sind affin unabhängig.*
*(b) $a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0$ sind linear unabhängig.*
*(c) Für jedes $i \in \{0, \dots, k\}$ gilt $\langle a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_k \rangle_{\mathit{aff}} \neq \langle a_0, \dots, a_k \rangle_{\mathit{aff}}$.*

Beweis. Ad (a)⇒(c): Indirekt angenommen es existiert $i \in \{0, \dots, k\}$, sodass $\langle a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_k \rangle_{\mathrm{aff}} = \langle a_0, \dots, a_k \rangle_{\mathrm{aff}}$. Dann lässt sich $a_i = 1 \cdot a_i$ auch als Affinkombination von $a_0, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_k$ schreiben, was (a) widerspricht.

Ad (c)⇒(b): Mit Lemma VIII.1.23 erhalten wir

$$\langle a_1 - a_0, \dots, a_{i-1} - a_0, a_{i+1} - a_0, \dots, a_k - a_0 \rangle \neq \langle a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0 \rangle,$$

für jedes $i \in \{1, \dots, k\}$, also sind $a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0$ linear unabhängig, siehe Proposition III.2.6.

Ad (b)⇒(a): Seien also $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$, sodass $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 = \sum_{i=0}^k \mu_i$ und $\sum_{i=0}^k \lambda_i a_i = \sum_{i=0}^k \mu_i a_i$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i (a_i - a_0) = \sum_{i=1}^k \mu_i (a_i - a_0),$$

also $\lambda_i = \mu_i$, für $i = 1, \dots, k$, wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0$. Da $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 = \sum_{i=0}^k \mu_i$, muss auch $\lambda_0 = \mu_0$ gelten. □

VIII.1.27. Proposition. *Sei $A$ ein $k$-dimensionaler affiner Teilraum eines Vektorraums $V$ und $a_0, \dots, a_k \in A$. Dann sind äquivalent:*

*(a) $\langle a_0, \dots, a_k \rangle_{\mathit{aff}} = A$.*
*(b) $a_0, \dots, a_k$ sind affin unabhängig.*
*(c) $a_1 - a_0, \dots, a_k - a_0$ ist eine Basis von $V_A$.*

*(d) Jedes $a \in A$ lässt sich in eindeutiger Weise in der Form*

$$a = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i a_i$$

*schreiben, wobei $\lambda_i \in \mathbb{K}$ und $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$. (baryzentrische Koordinaten)*

*(e) Jedes $a \in A$ lässt sich in eindeutiger Weise in der Form*

$$a = a_0 + \sum_{i=1}^{k} x_i(a_i - a_0)$$

*schreiben, wobei $x_i \in \mathbb{K}$. (affine Koordinaten)*

Beweis. Die Äquivalenz der ersten drei Aussagen folgt aus Lemma VIII.1.23 und Lemma VIII.1.26. Offensichtlich ist (d) zu (a) und (b) äquivalent. Schließlich ist auch (c) zu (e) äquivalent. □

VIII.1.28. Definition (Affine Koordinatensysteme). Sei $A$ ein $k$-dimensionaler affiner Teilraum von $V$ und $a_0, \dots, a_k \in A$. Sind die (äquivalenten) Eigenschaften in Proposition VIII.1.27 erfüllt, dann wird $a_0, \dots, a_k$ als (geordnetes) *affines Koordinatensystem* von $A$ bezeichnet.

Aus den Ergebnissen über lineare Teilräume folgt, dass jeder endlich-dimensionale affine Teilraum ein affines Koordinatensystem besitzt. Auch kann jede affin unabhängige Teilmenge von $A$ zu einem affinen Koordinatensytem ergänzt werden. Schließlich enthält auch jede Teilmenge $S$ mit $\langle S \rangle_{\mathrm{aff}} = A$ ein affines Koordinatensystem. Wir erhalten auch sofort folgende Charakterisierung der Invertierbarkeit affiner Abbildungen:

VIII.1.29. Proposition. *Eine affine Abbildung $\alpha\colon V \to W$ ist genau dann invertierbar, wenn sie ein (und dann jedes) affine Koordinatensystem von $V$ auf ein affines Koordinatensytem von $W$ abbildet.*

VIII.1.30. Beispiel. Die Punkte $a_0, \dots, a_n$ bilden genau dann ein affines Koordinatensytem von $V$, wenn folgendes gilt: Zu jedem Vektorraum $W$ und beliebigen $w_0, \dots, w_n \in W$ existiert eine eindeutig bestimmte affine Abbildung $\alpha\colon V \to W$, sodass $\alpha(a_i) = w_i$, für alle $i = 0, \dots, n$.

VIII.1.31. Beispiel. Sind $a_0, \dots, a_n$ und $a'_0, \dots, a'_n$ zwei affine Koordinatensyteme von $V$, dann existiert ein eindeutig bestimmtes $\alpha \in \mathrm{Aff}(V)$, sodass $\alpha(a_i) = a'_i$, für jedes $i = 0, \dots, n$. Insbesondere sind je zwei affine Koordinatensysteme affin kongruent.

Unter gewissen Voraussetzungen lassen sich die invertierbaren affinen Abbildungen auch als jene Bijektionen charakterisieren, die Geraden auf Geraden abbilden:

VIII.1.32. Satz (Fundamentalsatz der affinen Geometrie). *Sei $V$ ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum mit* $\dim(V) \geq 2$. *Dann ist jede Kollineation, d.h. jede Bijektion $\alpha\colon V \to V$, die Geraden auf Geraden abbildet, eine affine Abbildung.*

Beweis. Seien $a_1$ und $a_2 \in V$. Es genügt

$$\alpha\big(\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2\big) = \lambda\alpha(a_1) + (1-\lambda)\alpha(a_2)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ zu zeigen, mittels Induktion folgt dann sofort, dass $\alpha$ affin ist, siehe Aufgabe 19. O.B.d.A. dürfen wir $a_1 \neq a_2$ annehmen. Wegen der Injektivität von $\alpha$ ist dann auch $\alpha(a_1) \neq \alpha(a_2)$. Also muss $\alpha$ die Gerade durch $a_1$ und $a_2$ bijektiv auf die Gerade durch $\alpha(a_1)$ und $\alpha(a_2)$ abbilden. Es existiert daher eine eindeutige bijektive Abbildung $\chi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

$$\alpha\big(\lambda a_1 + (1-\lambda)a_2\big) = \chi(\lambda)\alpha(a_1) + \big(1-\chi(\lambda)\big)\alpha(a_2), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{VIII.5}$$

Es ist also $\chi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ zu zeigen. Zunächst gilt offensichtlich:

$$\chi(0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \chi(1) = 1. \tag{VIII.6}$$

Da $\dim(V) \geq 2$ existiert $a_0 \in V$, sodass die Punkte $a_0, a_1, a_2$ affin unabhängig sind. Beachte, dass auch $\alpha(a_0), \alpha(a_1), \alpha(a_2)$ affin unabhängig sind, denn $\alpha(a_0)$ kann wegen der Injektivität von $\alpha$ nicht auf der Geraden durch $\alpha(a_1)$ und $\alpha(a_2)$ liegen. Es gilt nun auch:

$$\alpha\big(\lambda a_0 + (1-\lambda)a_2\big) = \chi(\lambda)\alpha(a_0) + \big(1-\chi(\lambda)\big)\alpha(a_2), \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{VIII.7}$$

Um dies einzusehen, sei o.B.d.A. $0 \neq \lambda \neq 1$ und es bezeichne $g$ die eindeutige Gerade durch $a := \lambda a_1 + (1-\lambda)a_2$ und $a' := \lambda a_0 + (1-\lambda)a_2$. Nach dem Strahlensatz, siehe Aufgabe 23, schneidet $g$ die Gerade durch $a_0$ und $a_1$ nicht. Also hat auch die Gerade durch $\alpha(a_0)$ und $\alpha(a_1)$ keinen Schnittpunkt mit $\alpha(g)$. Da $\alpha(g)$ die Gerade durch $\alpha(a_1)$ und $\alpha(a_2)$ im Punkt $\alpha(a) = \chi(\lambda)\alpha(a_1) + \big(1-\chi(\lambda)\big)\alpha(a_2)$ schneidet, folgt aus dem Strahlensatz, dass ihr Schnittpunkt mit der Geraden durch $\alpha(a_0)$ und $\alpha(a_2)$ bei $\alpha(a') = \chi(\lambda)\alpha(a_0) + \big(1-\chi(\lambda)\big)\alpha(a_2)$ liegt. Damit ist (VIII.7) gezeigt. Daraus schließen wir, dass (VIII.5) richtig bleibt, wenn wir $a_1$ durch einen beliebigen Punkt $a_1'$ auf der Geraden durch $a_1$ und $a_2$ ersetzen. Eine analoge Aussage gilt für den anderen Punkt. Für je zwei Punkte $a_1'$ und $a_2'$ auf der Geraden durch $a_1$ und $a_2$ gilt daher:

$$\alpha\big(\lambda a_1' + (1-\lambda)a_2'\big) = \chi(\lambda)\alpha(a_1') + \big(1-\chi(\lambda)\big)\alpha(a_2'), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Betrachten wir $a_1' = a_2$ und $a_2' = a_1$ erhalten wir daraus

$$\chi(1-\lambda) = 1 - \chi(\lambda), \tag{VIII.8}$$

denn:

$$\begin{aligned}
\chi(1-\lambda)\alpha(a_1) + \big(1-\chi(1-\lambda)\big)\alpha(a_2) &= \alpha\big((1-\lambda)a_1 + (1-(1-\lambda))a_2\big) \\
&= \alpha\big(\lambda a_2 + (1-\lambda)a_1\big) \\
&= \chi(\lambda)\alpha(a_2) + \big(1-\chi(\lambda)\big)\alpha(a_1)
\end{aligned}$$

Für $a_1' = \mu a_1 + (1-\mu)a_2$ und $a_2' = a_2$ erhalten wir

$$\chi(\lambda\mu) = \chi(\lambda)\chi(\mu), \tag{VIII.9}$$

denn:

$$\begin{aligned}
\chi(\lambda\mu)\alpha(a_1) + \bigl(1-\chi(\lambda\mu)\bigr)\alpha(a_2)&\\
&= \alpha\bigl(\lambda\mu a_1 + (1-\lambda\mu)a_2\bigr)\\
&= \alpha\bigl(\lambda(\mu a_1 + (1-\mu)a_2) + (1-\lambda)a_2\bigr)\\
&= \chi(\lambda)\alpha\bigl(\mu a_1 + (1-\mu)a_2\bigr) + (1-\chi(\lambda))\alpha(a_2)\\
&= \chi(\lambda)\bigl(\chi(\mu)\alpha(a_1) + (1-\chi(\mu))a_2\bigr) + (1-\chi(\lambda))\alpha(a_2)\\
&= \chi(\lambda)\mu(\mu)\alpha(a_1) + \bigl(1-\chi(\lambda)\chi(\mu)\bigr)\alpha(a_2)
\end{aligned}$$

Insbesondere $1 = \chi(1) = \chi\bigl((-1)(-1)\bigr) = \chi(-1)\chi(-1)$, also $\chi(-1) = -1$, denn wegen der Bijektivität von $\chi$ muss $\chi(-1) \neq \chi(1) = 1$ gelten. Somit auch $\chi(-\lambda) = \chi\bigl((-1)\lambda\bigr) = \chi(-1)\chi(\lambda) = -\chi(\lambda)$, und wegen (VIII.8) daher auch $\chi(1+\lambda) = 1+\chi(\lambda)$. Zusammen mit (VIII.9) folgt $\chi(\lambda+\mu) = \chi\bigl(\lambda(1+\frac{\mu}{\lambda})\bigr) = \chi(\lambda)\chi(1+\frac{\mu}{\lambda}) = \chi(\lambda)\bigl(1+\chi(\frac{\mu}{\lambda})\bigr) = \chi(\lambda) + \chi(\lambda)\chi(\frac{\mu}{\lambda}) = \chi(\lambda) + \chi(\mu)$, also:

$$\chi(\lambda+\mu) = \chi(\lambda) + \chi(\mu). \tag{VIII.10}$$

Dies zeigt, dass $\chi$ ein Körperautomorphismus von $\mathbb{R}$ ist.

Aus (VIII.6) und (VIII.10) folgt zunächst $\chi(n) = \chi(1+\cdots+1) = 1+\cdots+1 = n$ für $n \in \mathbb{N}$, und dann $\chi(n) = n$, für alle $n \in \mathbb{Z}$. Mit (VIII.9) und $0 \neq m, n \in \mathbb{Z}$ daher $n = \chi(n) = \chi(m\frac{n}{m}) = \chi(m)\chi(\frac{n}{m}) = m\chi(\frac{n}{m})$, also $\chi(q) = q$, für alle $q \in \mathbb{Q}$. Ist $\lambda \geq \mu$, dann existiert $r \in \mathbb{R}$, sodass $\lambda - \mu = r^2$, also $\chi(\lambda) - \chi(\mu) = \chi(\lambda-\mu) = \chi(r^2) = \chi(r)^2 \geq 0$, und somit auch $\chi(\lambda) \geq \chi(\mu)$. Daraus folgt nun $\chi(\lambda) = \lambda$. Wäre nämlich $\chi(\lambda) > \lambda$, dann existiert $q \in \mathbb{Q}$ mit $\chi(\lambda) > q \geq \lambda$, also auch $\chi(q) \geq \chi(\lambda)$, im Widerspruch zu $\chi(q) = q$. Analog lässt sich die Annahme $\chi(\lambda) < \lambda$ auf einen Widerspruch führen. Folglich $\chi(\lambda) = \lambda$, und der Beweis ist vollständig. □

VIII.1.33. Satz. *Sei $V$ ein endlich dimensionaler Euklidischer Vektorraum und $\alpha\colon V \to V$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:*

*(a) $d\bigl(\alpha(v), \alpha(w)\bigr) = d(v, w)$, für alle $v, w \in V$.*
*(b) $\alpha$ ist affin mit linearem Teil $\phi_\alpha \in O(V)$.*
*(c) $\alpha$ ist affin und für ein (und dann jedes) affine Koordinatensystem $a_0, \dots, a_n$ von $V$ gilt $d\bigl(\alpha(a_i), \alpha(a_j)\bigr) = d(a_i, a_j)$, für alle $0 \leq i, j \leq n$.*

Beweis. Die nicht triviale Implikation (a)⇒(b) haben wir bereits weiter oben gezeigt, siehe Satz VII.4.7. Die Implikationen (b)⇒(c) und (b)⇒(a) sind offensichtlich. Es genügt daher (c)⇒(b) zu zeigen. Betrachte die Vektoren $b_i := a_i - a_0$ und $b_i' := \alpha(a_i) - \alpha(a_0)$, $1 \leq i \leq n$. Nach Voraussetzung ist $\|b_i\| = \|b_i'\|$ und $\|b_j - b_i\| = \|b_j' - b_i'\|$, für $1 \leq i, j \leq n$. Daraus erhalten wir $\langle b_i, b_j\rangle = \langle b_i', b_j'\rangle$, also

$$\langle \phi_\alpha(b_i), \phi_\alpha(b_j)\rangle = \langle b_i, b_j\rangle, \qquad 1 \leq i, j \leq n, \tag{VIII.11}$$

denn $\phi_\alpha(b_i) = b_i'$. Nach Proposition VIII.1.27 bilden die Vektoren $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von $V$. Sind $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ und $w = \sum_{j=1}^n \mu_j b_j$ beliebige Vektoren in $V$, so

$$\langle \phi_\alpha(v), \phi_\alpha(w) \rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j \langle \phi_\alpha(b_i), \phi_\alpha(b_j) \rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i \mu_j \langle b_i, b_j \rangle = \langle v, w \rangle,$$

und daher $\phi_\alpha \in O(V)$. □

VIII.1.34. Definition (Bewegungen). Sei $V$ ein Euklidischer Vektorraum. Eine Abbildung $\alpha\colon V \to V$ wird *Bewegung* genannt, wenn sie die äquivalenten Eigenschaften in Satz VIII.1.33 hat.

Offensichtlich bildet die Menge der Bewegungen eine Untergruppe von $\mathrm{Aff}(V)$, die alle Translationen enthält.

VIII.1.35. Beispiel. Sind $a_0, \dots, a_n$ und $a_0', \dots, a_n'$ zwei affine Koordinatensysteme eines Euklidischen Vektorraums, sodass $d(a_i, a_j) = d(a_i', a_j')$ für alle $0 \leq i, j \leq n$, dann existiert eine eindeutige Bewegung $\alpha\colon V \to V$ mit $\alpha(a_i) = a_i'$, für alle $0 \leq i \leq n$. Insbesondere sind zwei affine Koordinatensysteme $a_0, \dots, a_n$ und $a_0', \dots, a_n'$ genau dann metrisch kongruent, wenn $d(a_i, a_j) = d(a_i', a_j')$ für alle $0 \leq i, j \leq n$.

VIII.1.36. Beispiel. Sind $A$ und $A'$ zwei affine Teilräume eines Euklidischen Vektorraums mit $\dim(A) = \dim(A')$, dann existiert eine Bewegung $\alpha\colon V \to V$, sodass $\alpha(A) = A'$. Ist nämlich $\phi \in \mathrm{O}(V)$ mit $\phi(V_A) = V_{A'}$ und $a \in A$, $a' \in A'$, dann hat $\alpha(v) = \phi(v - a) + a'$ die gewünschte Eigenschaft. Zwei affine Teilräume sind also genau dann metrisch kongruent, wenn sie gleiche Dimension haben.

VIII.1.37. Beispiel. Sei $A \neq \emptyset$ ein affiner Teilraum eines Euklidischen Vektorraums $V$. Unter der Spiegelung $\sigma_A\colon V \to V$ an $A$ verstehen wir die Bewegung

$$\sigma_A(v) := \sigma_{V_A}(v - a) + a,$$

wobei $\sigma_{V_A} \in O(V)$ die orthogonale Spiegelung am linearen Teilraum $V_A$ bezeichnet und $a \in A$ beliebig ist. Beachte, dass dies nicht von der Wahl von $a \in A$ abhängt. Offensichtlich gilt $\sigma_A^2 = \mathrm{id}_V$ und $\{v \in V : \sigma_A(v) = v\} = A$. Etwa ist die Spiegelung an einem Punkt $P \in V$ durch $\sigma_P(v) = -(v - P) + P$ gegeben.

VIII.1.38. Satz. *Sei $V$ ein $n$-dimensionaler Euklidischer Vektorraum. Dann lässt sich jede Bewegung $V \to V$ als Komposition von höchstens $n+1$ Spiegelungen an affinen Hyperebenen schreiben.*

Beweis. In Satz VII.4.6 haben wir gesehen, dass sich jede orthogonale lineare Abbildung $V \to V$ als Komposition von höchstens $n$ Spiegelungen an Hyperebenen durch den Koordinatenursprung schreiben lässt. In der Vorlesung haben wir dann gezeigt, dass sich jede Translation als Komposition von zwei Spiegelungen an affinen Hyperebenen schreiben lässt.[13] Dies zeigt aber nur, dass sich jede Bewegung als Komposition von höchstens $n+2$ Spiegelungen schreiben lässt.

Um den Satz in voller Allgemeinheit zu beweisen sei nun $\alpha\colon V \to V$ eine Bewgung. O.B.d.A. dürfen wir $\alpha(0) \neq 0$ annehmen, andernfalls ist $\alpha$ eine lineare orthogonale Abbildung und wir kommen sogar mit $n$ Spiegelungen aus, siehe Satz VII.4.6. Es ist dann $A := \frac{1}{2}\alpha(0) + \alpha(0)^\perp$ eine affine Hyperebene, und die Spiegelung $\sigma_A$ bildet $\alpha(0)$ auf $0$ ab. Somit ist $\sigma_A \circ \alpha$ eine Bewegung, die den Koordinatenursprung fixiert, d.h. eine orthogonale lineare Abbildung. Nach Satz VII.4.6 lässt sich $\sigma_A \circ \alpha$ also als Komposition von höchstens $n$ Spiegelungen an (affinen) Hyperebenen schreiben. Folglich ist $\alpha$ Komposition von $n+1$ solchen Spiegelungen. □

**VIII.2. Affine Quadriken.** Sei $V$ ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ mit Charakteristik, $\operatorname{char}(\mathbb{K}) \neq 2$. Unter einer *quadratischen Funktion* auf $V$ verstehen wir jede Funktion, $Q\colon V \to \mathbb{K}$, die sich in der Form

$$Q(v) = q(v) + l(v) + c$$

schreiben lässt, wobei $c \in \mathbb{K}$, $l \in V^*$ und $q$ eine quadratische Form auf $V$ bezeichnet, d.h. $q(v) = b(v,v)$ für eine (eindeutige) symmetrische Bilinearform $b$ auf $V$. Beachte, dass $q$, $l$ und $c$ durch $Q$ eindeutig bestimmt sind, denn $c = Q(0)$ und $2l(v) = Q(v) - Q(-v)$. Unter dem *Rang* einer quadratischen Funktion verstehen wir den Rang der quadratischen Form $q$. Im reellen Fall, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, wird die *Signatur* von $Q$ als die Signatur der quadratischen Form $q$ definiert. Unter einer *Quadrik* verstehen wir eine Teilmenge $E$ von $V$, die sich in der Form

$$E = \{v \in V : Q(v) = 0\}$$

schreiben lässt, wobei $Q$ eine quadratische Funktion auf $V$ bezeichnet.

VIII.2.1. Beispiel. Für $a, b > 0$ und $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ bildet die durch die Gleichung

$$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

beschriebene Ellipse mit Mittelpunkt $\left(\begin{smallmatrix} x_0 \\ y_0 \end{smallmatrix}\right)$ eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$. Analog sind auch Hyperbeln und Parabeln Quadriken in $\mathbb{R}^2$.

---

[13] Dabei sind wir wie folgt vorgegangen: Sei $\tau_w\colon V \to V$, $\tau_w(v) = v + w$, eine Translation, $w \in V$. Weiters sei $A_1$ eine affine Hyperebene, sodass $V_{A_1} = w^\perp$, und setze $A_2 := A_1 + \frac{1}{2}w$. Dann gilt $\sigma_{V_{A_1}} = \sigma_{w^\perp} = \sigma_{V_{A_2}}$. Für $a_1 \in A_1$ und $a_2 := a_1 + \frac{1}{2}w \in A_2$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\bigl(\sigma_{A_2} \circ \sigma_{A_1}\bigr)(v) &= \sigma_{A_2}\bigl(\sigma_{w^\perp}(v - a_1) + a_1\bigr) \\
&= \sigma_{w^\perp}\bigl(\sigma_{w^\perp}(v - a_1) + a_1 - a_2\bigr) + a_2 \\
&= v - a_1 + \sigma_{w^\perp}(-\tfrac{1}{2}w) + a_1 + \tfrac{1}{2}w \\
&= v + \tfrac{1}{2}w + \tfrac{1}{2}w = \tau_w(v),
\end{aligned}$$

also $\sigma_{A_2} \circ \sigma_{A_1} = \tau_w$.

VIII.2.2. Beispiel. Auch die Menge der Punkte $\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2$, die der quadratischen Gleichung $x^2 - y^2 = 0$ genügen bildet eine Quadrik. Da $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ besteht sie aus zwei verschiedenen Geraden durch den Koordinatenursprung. Noch degenerierter ist die Quadrik $x^2 + y^2 + 1 = 0$, sie enthält nämlich gar keinen Punkt. Beachte, dass dieselbe Quadrik auch durch die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ beschrieben werden kann.

VIII.2.3. Lemma. *Sei $\alpha\colon W \to V$ affin. Ist $Q\colon V \to \mathbb{K}$ eine quadratische Funktion auf $V$, dann ist $Q \circ \alpha$ eine quadratische Funktion auf $W$. Insbesondere ist für jede Quadrik $E$ in $V$ auch $\alpha^{-1}(E)$ eine Quadrik in $W$. Ist $\alpha$ invertierbar, dann haben $Q \circ \alpha$ und $Q$ den selben Rang, und im reellen Fall auch die gleiche Signatur.*

Beweis. Es sei $Q(v) = q(v) + l(v) + c$ und $b$ die mit $q$ assoziierte symmetrische Bilinearform, $q(w) = b(w, w)$. Weiters sei $\alpha(w) = \phi_\alpha(w) + v_\alpha$, wobei $\phi_\alpha\colon W \to V$ linear und $v_\alpha \in V$. Eine einfache Rechnung zeigt $Q(\alpha(w)) = q'(w) + l'(w) + c'$ wobei:

$$\begin{aligned} q'(w) &= q(\phi_\alpha(w)) \\ l'(w) &= l(\phi_\alpha(w)) + 2b\big(v_\alpha, \phi_\alpha(w)\big) \\ c' &= Q(\alpha(0)) = q(v_\alpha) + l(v_\alpha) + c \end{aligned}$$

Mit $E = \{v \in V : Q(v) = 0\}$ ist daher auch $\alpha^{-1}(E) = \{w \in W : (Q \circ \alpha)(w) = 0\}$ eine Quadrik. Alle weiteren Behauptungen sind nun offensichtlich. □

VIII.2.4. Proposition (Mittelpunkte). *Ist $Q(v) = q(v) + l(v) + c$ eine quadratische Funktion auf $V$ und $m \in V$, dann sind äquivalent:*

*(a) $Q \circ \sigma_m = Q$, wobei $\sigma_m\colon V \to V$ die Spiegelung am Punkt $m$ bezeichnet.*
*(b) $Q \circ \tau_m = q + c'$, wo $\tau_m\colon V \to V$ die Translation um $m$ bezeichnet, $c' = Q(m)$.*
*(c) $Q(m + v) = q(v) + c'$, für alle $v \in V$, wobei $c' = Q(m)$.*
*(d) $2b(m, v) + l(v) = 0$, für alle $v \in V$, wobei $b$ die mit $q$ assoziierte symmetrische Bilinearform bezeichnet, $q(v) = b(v, v)$.*

*Jeder Punkt $m$, der diese äquivalenten Eigenschaften besitzt, wird als* Mittelpunkt *der quadratischen Funktion $Q$ bezeichnet. Die Menge aller Mittelpunkte, $M$, ist entweder leer, oder bildet einen affinen Teilraum mit $V_M = \ker(b)$ und $\dim(M) = \dim(V) - \operatorname{rank}(q)$. Darüber hinaus ist $Q$ auf der Menge der Mittelpunkte konstant. Ist $q$ nicht-degeneriert, dann besitzt $Q$ genau einen Mittelpunkt.*

Beweis. Da $\sigma_m \circ \tau_m = \tau_m \circ \sigma_0$ ist (a) zu $Q \circ \tau_m \circ \sigma_0 = Q \circ \tau_m$ äquivalent. Dies bedeutet gerade, dass der lineare Teil der quadratischen Funktion $Q \circ \tau_m$ verschwindet, also (b). Die Äquivalenz (b)⇔(c) ist offensichtlich. Eine einfache Rechnung zeigt (c)⇔(d). Die restlichen Behauptungen folgen nun aus bekannten Eigenschaften linearer Gleichungssysteme. □

Ist $V = \mathbb{K}^n$, so kann jede quadratische Funktion $Q\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ in der Form

$$Q(x) = x^t A x + b^t x + c, \qquad x \in \mathbb{K}^n,$$

geschrieben werden, wobei $A^t = A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine symmetrische Matrix bezeichnet, $b \in \mathbb{K}^n$ und $c \in \mathbb{K}$. Die Gleichung für Mittelpunkte $m \in \mathbb{K}^n$ von $Q$ lautet dann $2m^tA + b^t = 0$, oder äquivalent dazu:

$$2Am + b = 0.$$

Ist $A$ nicht degeneriert, dann ist der eindeutige Mittelpunkt daher durch

$$m = -\tfrac{1}{2}A^{-1}b$$

gegeben. Ist $m$ ein Mittelpunkt, dann gilt

$$Q(m + x) = x^tAx + c',$$

wobei $c' = Q(m)$.

VIII.2.5. Beispiel. Die quadratische Funktion $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$Q\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = x^2 + 2y^2 - 2x - 12y + 18 = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-12\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + 18,$$

besitzt genau einen Mittelpunkt, nämlich

$$m = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}-2\\-12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}.$$

In bei $m$ zentrierten Koordinaten hat $Q$ daher keinen linearen Teil,

$$Q\big(m + \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\big) = x^2 + 2y^2 - 1.$$

Die Menge der Punkte $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$, für die $Q\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = 0$ gilt, bildet daher eine Ellipse.

VIII.2.6. Beispiel. Die quadratische Funktion $Q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$Q\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = y^2 - x = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + 0,$$

besitzt keinen Mittelpunkt, denn das Gleichungssystem $2\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)m + \left(\begin{smallmatrix}-1\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ besitzt keine Lösung. Die Menge der Punkte $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$, für die $Q\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = 0$ gilt, bildet hier eine Parabel.

VIII.2.7. Beispiel. Betrachte die quadratische Funktion $Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$Q\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = x^2 + y^2 - 2x = \left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)^t\left(\begin{smallmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}-2\\0\\0\end{smallmatrix}\right)^t\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right).$$

In diesem Fall hat die Gleichung $2Am + b$ einen 1-dimensionalen Lösungsraum, die Menge der Mittelpunkte ist $M = \left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\t\end{smallmatrix}\right) : t \in \mathbb{R}\right\}$. Für jedes $m \in M$ gilt:

$$Q\left(m + \left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\right) = x^2 + y^2 - 1.$$

Die Menge der Punkte $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$, für die $Q\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = 0$ gilt, bildet hier einen kreisförmigen Zylinder mit Achse $M$.

VIII.2.8. Satz (Affine Normalform quadratischer Funktionen). *Sei $V$ ein $n$-dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ mit $\operatorname{char}(\mathbb{K}) \neq 2$, und sei $Q\colon V \to \mathbb{K}$ eine quadratische Funktion. Dann existiert ein affines Koordinatensystem $a_0, \dots, a_n$ von $V$, sodass die Funktion $\tilde{Q}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$,*

$$\tilde{Q}(x) := Q\big(a_0 + \textstyle\sum_{i=1}^n x_i(a_i - a_0)\big)$$

*folgende Gestalt hat:*

*(a) $\tilde{Q}(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2 + c$, falls $Q$ einen Mittelpunkt besitzt, $c = Q(a_0)$.*
*(b) $\tilde{Q}(x) = \sum_{i=1}^r \lambda_i x_i^2 + x_{r+1}$, falls $Q$ keinen Mittelpunkt besitzt.*

*Dabei sind $0 \neq \lambda_i \in \mathbb{K}$, $r = \operatorname{rank}(Q)$ und $c \in \mathbb{K}$. In anderen Worten, $\alpha\colon \mathbb{K}^n \to V$, $\alpha(x) := a_0 + \sum_{i=1}^n x_i(a_i - a_0)$, ist ein affiner Isomorphismus und $Q \circ \alpha$ stimmt mit einer der beiden Normalformen oben überein.*

*Besitzt jedes Element von $\mathbb{K}$ eine Quadratwurzel (etwa weil $\mathbb{K}$ algebraisch abgeschlossen ist), dann kann darüber hinaus $\lambda_i = 1$ erreicht werden. Im reellen Fall dürfen wir $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 1$ und $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_{p+q} = -1$ annehmen, wobei $(p, q)$ die Signatur von $Q$ bezeichnet, $p + q = r$.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, wo $Q$ einen Mittelpunkt besitzt. Ist $a_0$ ein Mittelpunkt, dann gilt $Q(a_0 + v) = q(v) + c$, siehe Proposition VIII.2.4. Nach Satz VII.1.25 existiert eine Basis $b_1, \dots, b_n$ von $V$, sodass

$$q\big(\textstyle\sum_{i=1}^n x_i b_i\big) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2, \tag{VIII.12}$$

wobei $r = \operatorname{rank}(q)$ und $0 \neq \lambda_i \in \mathbb{K}$. Besitzt jedes Element in $\mathbb{K}$ eine Quadratwurzel, dann dürfen wir $\lambda_i = 1$ annehmen, siehe Satz VII.1.25. Im reellen Fall können wir immerhin $\lambda_i = \pm 1$ erreichen, siehe Satz VII.1.35. Setzen wir $a_i := a_0 + b_i$, $i = 1, \dots, n$, dann bildet $a_0, a_1, \dots, a_n$ das gesuchte affine Koordinatensystem, siehe Proposition VIII.1.27.

Sei nun $Q(v) = q(v) + l(v) + c$ eine quadratische Funktion, die keinen Mittelpunkt besitzt. Wie zuvor sei $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von $V$, sodass (VIII.12) und $\lambda_i \neq 0$ gilt. Da $Q$ keinen Mittelpunkt besitzt liegt das Funktional $l \in V^*$ nicht im Bild von $b\colon V \to V^*$, wobei $b$ die mit $q$ assoziierte symmetrische Bilinearform bezeichnet, $q(v) = b(v, v)$, vgl. Proposition VIII.2.4(d). Da das Bild von $b$ durch die Elemente $b_1^*, \dots, b_r^*$ der zu $b_1, \dots, b_n$ dualen Basis aufgespannt wird, existiert daher $j > r$, sodass $l(b_j) \neq 0$. O.B.d.A. dürfen wir $\mu := l(b_{r+1}) \neq 0$ und $l(b_{r+2}) = \cdots = l(b_n) = 0$ annehmen. Setzen wir

$$\tilde{a}_0 := -\sum_{j=1}^r \frac{l(b_j)}{2\lambda_j} b_j,$$

dann gilt $2q(\tilde{a}_0, b_i) + l(b_i) = 0$, für alle $1 \leq i \leq r$, und daher

$$\begin{aligned} Q\big(\tilde{a}_0 + \textstyle\sum_{i=1}^n x_i b_i\big) &= q\big(\textstyle\sum_{i=1}^n x_i b_i\big) + 2b\big(\tilde{a}_0, \textstyle\sum_{i=1}^n x_i b_i\big) + l\big(\textstyle\sum_{i=1}^n x_i b_i\big) + \tilde{c} \\ &= \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + \mu x_{r+1} + \tilde{c}, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{c} = Q(\tilde{a}_0)$. Setzen wir $a_0 := \tilde{a}_0 - \frac{\tilde{c}}{\mu} b_{k+1}$, dann ist

$$Q\big(a_0 + \textstyle\sum_{i=1}^n x_i b_i\big) = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_r x_r^2 + \mu x_{r+1}.$$

Ersetzen wir $b_{r+1}$ durch $\frac{1}{\mu} b_{r+1}$ dann können wir auch $\mu = 1$ erreichen. Sind nun $a_i := a_0 + b_i$, $i = 1, \dots, n$, dann bildet $a_0, \dots, a_n$ ein affines Koordinatensystem mit den gewünschten Eigenschaften. □

VIII.2.9. Bemerkung. Ist $Q\colon V \to \mathbb{K}$ eine quadratische Funktion und $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, dann ist auch $Q' := \lambda Q\colon V \to \mathbb{K}$ eine quadratische Funktion, und beschreibt die selbe Quadrik, $\{v \in V : Q(v) = 0\} = \{v \in V : Q'(v) = 0\}$. Die Umkehrung gilt i.A. jedoch nicht, etwa beschreiben die Gleichungen $x^2 + 1 = 0$ und $x^2 + y^2 + 1 = 0$ die selbe (leere) Quadrik in $\mathbb{R}^2$. Aber auch die Gleichungen $x^2 = 0$ und $x = 0$ beschreiben beide eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{C}^2$.

VIII.2.10. Korollar (Affine Normalform komplexer Quadriken). *Sei $V$ ein $n$-dimensionaler komplexer Vektorraum. Dann ist jede Quadrik in $V$ zu einer der folgenden Quadriken in $\mathbb{C}^n$ affin kongruent:*

*(a) Typ $A_r$: $\{x_1^2 + \cdots + x_r^2 = 0\}$, wobei $0 \leq r \leq n$.*
*(b) Typ $B_r$: $\{x_1^2 + \cdots + x_r^2 = 1\}$, wobei $0 \leq r \leq n$.*
*(c) Typ $C_r$: $\{x_1^2 + \cdots + x_r^2 = x_{r+1}\}$, wobei $0 \leq r < n$.*

*D.h. es existiert ein affiner Isomorphismus, $V \cong \mathbb{C}^n$, der die Quadrik in $V$ auf eine dieser Normalformen in $\mathbb{C}^n$ abbildet.*

Beweis. Sei $E = \{v \in V : Q(v) = 0\}$ eine Quadrik in $V$, wobei $Q\colon V \to \mathbb{C}$ eine quadratische Funktion bezeichnet. Nach Satz VIII.2.8 existiert ein affiner Isomorphismus $\alpha\colon \mathbb{C}^n \xrightarrow{\cong} V$, sodass

$$\alpha^{-1}(E) = \big\{x \in \mathbb{C}^n : x_1^2 + \cdots + x_r^2 + c = 0\big\}$$

oder

$$\alpha^{-1}(E) = \big\{x \in \mathbb{C}^n : x_1^2 + \cdots + x_r^2 + x_{r+1} = 0\big\},$$

wobei $r = \operatorname{rank}(Q)$. Gilt im ersten Fall $c = 0$, dann ist $\alpha^{-1}(E)$ vom Typ $A_r$. Gilt im ersten Fall $c \neq 0$, so ist $\tilde{\alpha}\colon \mathbb{C}^n \xrightarrow{\cong} V$, $\tilde{\alpha}(x) := \alpha(\sqrt{-c}x)$, ein affiner Isomorphismus und nach Bemerkung VIII.2.9

$$\tilde{\alpha}^{-1}(E) = \big\{x \in \mathbb{C}^n : x_1^2 + \cdots + x_r^2 - 1 = 0\big\},$$

d.h. $\tilde{\alpha}^{-1}(E)$ ist vom Typ $B_r$. Im zweiten Fall ist $\tilde{\alpha}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$,

$$\tilde{\alpha}(x) := \alpha(x_1, \dots, x_r, -x_{x+1}, x_{r+2}, \dots, x_n),$$

einen affinen Isomorphismus, sodass

$$\tilde{\alpha}^{-1}(E) = \big\{x \in \mathbb{C}^n : x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1} = 0\big\},$$

d.h. $\tilde{\alpha}^{-1}(E)$ ist vom Typ $C_r$. □

VIII.2.11. Beispiel. Jede Quadrik in $\mathbb{C}^2$ ist zu einer der folgenden Quadriken affin kongruent:

| | |
|---|---|
| $A_0$: $\{0 = 0\}$ | (die gesamte Ebene, $\mathbb{C}^2$) |
| $A_1$: $\{x^2 = 0\}$ | (komplexe Gerade) |
| $A_2$: $\{x^2 + y^2 = 0\}$ | (zwei sich schneidende komplexe Geraden) |
| $B_0$: $\{0 = 1\}$ | (leer) |
| $B_1$: $\{x^2 = 1\}$ | (zwei parallele komplexe Geraden) |
| $B_2$: $\{x^2 + y^2 = 1\}$ | (komplexe Version des Kreises) |
| $C_0$: $\{0 = x\}$ | (komplexe Gerade) |
| $C_1$: $\{x^2 = y\}$ | (komplexe Version der Parabel) |

VIII.2.12. Beispiel. Wir wollen den Typ der komplexen Quadrik

$$E := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2 \;\middle|\; x^2 + 5y^2 + 4xy + 2x + 10y + 6 = 0 \right\}$$

bestimmen. Durch Ergänzen auf vollständige Quadrate erhalten wir

$$\begin{aligned} x^2 + 5y^2 + 4xy + 2x + 10y + 6 &= (x + 2y)^2 + y^2 + 2x + 10y + 6 \\ &= (x + 2y + 1)^2 + y^2 + 6y + 5 \\ &= (x + 2y + 1)^2 + (y + 3)^2 - 4 \\ &= 4\Big\{ \Big(\frac{x + 2y + 1}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{y + 3}{2}\Big)^2 - 1 \Big\} \end{aligned}$$

Es ist daher $\alpha \colon \mathbb{C}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^2$,

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (x + 2y + 1)/2 \\ (y + 3)/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

ein affiner Isomorphismus und $\alpha(E) = \{x^2 + y^2 - 1 = 0\}$, d.h. $E$ ist vom Typ $B_2$, also affin kongruent zu einem komplexen Kreis.

VIII.2.13. Korollar (Affine Normalform reeller Quadriken). *Sei $V$ ein $n$-dimensionaler reeller Vektorraum. Dann ist jede Quadrik in $V$ zu einer der folgenden Quadriken in $\mathbb{R}^n$ affin kongruent:*

*(a) Typ $A_{pq}$: $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 = 0$, wobei $0 \le q \le p$ und $p + q \le n$.*
*(b) Typ $B_{pq}$: $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 = 1$, wobei $0 \le p, q$ und $p + q \le n$.*
*(c) Typ $C_{pq}$: $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 = x_{p+q+1}$, wobei $0 \le q \le p$, $p + q < n$.*

*D.h. es existiert ein affiner Isomorphismus, $\mathbb{R}^n \cong V$, der die Quadrik in $V$ auf eine dieser Normalformen in $\mathbb{R}^n$ abbildet.*

Beweis. Sei $E = \{v \in V : Q(v) = 0\}$ eine Quadrik in $V$, wobei $Q \colon V \to \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion bezeichnet. Nach Satz VIII.2.8 existiert ein affiner Isomorphismus $\alpha \colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} V$, sodass

$$\alpha^{-1}(E) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 + c = 0 \right\}$$

oder

$$\alpha^{-1}(E) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 + x_{p+q+1} = 0 \right\},$$

wobei $(p, q)$ die Signatur von $Q$ bezeichnet. Gilt im ersten Fall $c = 0$ und $p \geq q$, dann ist $\alpha^{-1}(E)$ vom Typ $A_{pq}$. Ist $p < q$, dann bildet $\tilde{\alpha}\colon \mathbb{R}^n \to V$,

$$\tilde{\alpha}(x) = \alpha(x_{q+1}, \dots, x_{q+p}, x_1, \dots, x_q, x_{p+q+1}, \dots, x_n),$$

einen affinen Isomorphismus, sodass

$$\tilde{\alpha}^{-1}(E) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_q^2 - x_{q+1}^2 - \cdots - x_{q+p}^2 = 0\big\},$$

d.h. $\tilde{\alpha}^{-1}(E)$ ist vom Typ $A_{qp}$. Gilt im ersten Fall $c < 0$, dann ist $\tilde{\alpha}\colon \mathbb{R}^n \to V$, $\tilde{\alpha}(x) := \alpha(\sqrt{-c}x)$, ein affiner Isomorphismus, sodass

$$\tilde{\alpha}^{-1}(E) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 - 1 = 0\big\},$$

d.h. $\tilde{\alpha}^{-1}(E)$ ist vom Typ $B_{pq}$. Ist $c > 0$, dann bildet $\tilde{\alpha}\colon \mathbb{R}^n \to V$,

$$\tilde{\alpha}(x) := \alpha(\sqrt{c}x_{q+1}, \dots, \sqrt{c}x_{q+p}, \sqrt{c}x_1, \dots, \sqrt{c}x_q, x_{p+q+1}, \dots, x_n),$$

einen affinen Isomorphismus, sodass

$$\tilde{\alpha}^{-1}(E) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_q^2 - x_{q+1}^2 - \cdots - x_{q+p}^2 - 1 = 0\big\},$$

d.h. $\tilde{\alpha}^{-1}(E)$ ist vom Typ $B_{qp}$. Gilt im zweiten Fall $p \geq q$, so ist $\tilde{\alpha}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\tilde{\alpha}(x) := \alpha(x_1, \dots, x_{p+q}, -x_{p+q+1}, x_{p+q+2}, \dots, x_n),$$

ein affiner Isomorphismus mit

$$\tilde{\alpha}^{-1}(E) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 - x_{q+p+1} = 0\big\},$$

d.h. $\tilde{\alpha}^{-1}(E)$ ist vom Typ $C_{pq}$. Ist $p < q$, dann bildet $\tilde{\alpha}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\tilde{\alpha}(x) := \alpha(x_{p+1}, \dots, x_{p+q}, x_1, \dots, x_p, x_{p+q+1}, \dots, x_n),$$

einen affinen Isomorphismus, sodass

$$\tilde{\alpha}^{-1}(E) = \big\{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_q^2 - x_{q+1}^2 - \cdots - x_{q+p}^2 - x_{q+p+1} = 0\big\},$$

d.h. $\tilde{\alpha}^{-1}(E)$ ist vom Typ $C_{qp}$. □

VIII.2.14. Beispiel. Jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ ist zu einer der folgenden Quadriken affin kongruent:

| | |
|---|---|
| $A_{00}$: $\{0 = 0\}$ | (die gesamte Ebene, $\mathbb{R}^2$) |
| $A_{10}$: $\{x^2 = 0\}$ | (eine Gerade) |
| $A_{20}$: $\{x^2 + y^2 = 0\}$ | (ein Punkt) |
| $A_{11}$: $\{x^2 - y^2 = 0\}$ | (zwei sich schneidende Geraden) |
| $B_{00}$: $\{0 = 1\}$ | (leer) |
| $B_{10}$: $\{x^2 = 1\}$ | (zwei parallele Geraden) |
| $B_{01}$: $\{-x^2 = 1\}$ | (leer) |
| $B_{20}$: $\{x^2 + y^2 = 1\}$ | (Kreis) |
| $B_{11}$: $\{x^2 - y^2 = 1\}$ | (Hyperbel) |
| $B_{02}$: $\{-x^2 - y^2 = 1\}$ | (leer) |
| $C_{00}$: $\{0 = x\}$ | (eine Gerade) |
| $C_{10}$: $\{x^2 = y\}$ | (Parabel) |

VIII.2.15. Beispiel. Wir wollen den Typ der reellen Quadrik

$$E := \big\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 11y + 10 = 0\big\}$$

bestimmen. Durch Ergänzen auf vollständige Quadrate erhalten wir:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 11y + 10 &= (x + y)^2 + 2x + 11y + 10 \\ &= (x + y + 1)^2 + 9y + 9 \\ &= (x + y + 1)^2 + 9(y + 1) \\ &= 9\Big\{\Big(\frac{x + y + 1}{3}\Big)^2 + (y + 1)\Big\} \end{aligned}$$

Es ist daher, $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2$,

$$\alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}(x + y + 1)/3\\ y + 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3 & 1/3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1/3\\1\end{pmatrix},$$

ein affiner Isomorphismus, und $\alpha(E) = \{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = 0\}$, d.h. $E$ ist eine Parabel.

VIII.2.16. Beispiel. Jede Quadrik in $\mathbb{R}^3$ ist zu einer der folgenden Quadriken affin kongruent:

| | |
|---|---|
| $A_{00}$: $\{0 = 0\}$ | (der gesamte Raum, $\mathbb{R}^3$) |
| $A_{10}$: $\{x^2 = 0\}$ | (Ebene) |
| $A_{20}$: $\{x^2 + y^2 = 0\}$ | (Gerade) |
| $A_{11}$: $\{x^2 - y^2 = 0\}$ | (zwei sich schneidende Ebenen) |
| $A_{30}$: $\{x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ | (ein Punkt) |
| $A_{21}$: $\{x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ | (kreisförmiger Kegel) |
| $B_{00}$: $\{0 = 1\}$ | (leer) |
| $B_{10}$: $\{x^2 = 1\}$ | (zwei parallele Ebenen) |
| $B_{01}$: $\{-x^2 = 1\}$ | (leer) |
| $B_{20}$: $\{x^2 + y^2 = 1\}$ | (kreisförmiger Zylinder) |
| $B_{11}$: $\{x^2 - y^2 = 1\}$ | (hyperbolischer Zylinder) |
| $B_{02}$: $\{-x^2 - y^2 = 1\}$ | (leer) |
| $B_{30}$: $\{x^2 + y^2 + y^2 = 1\}$ | (Sphäre) |
| $B_{21}$: $\{x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ | (einschaliges Hyperboloid) |
| $B_{12}$: $\{x^2 - y^2 - z^2 = 1\}$ | (zweischaliges Hyperboloid) |
| $B_{03}$: $\{-x^2 - y^2 - z^2 = 1\}$ | (leer) |
| $C_{00}$: $\{0 = x\}$ | (Ebene) |
| $C_{10}$: $\{x^2 = y\}$ | (parabolischer Zylinder) |
| $C_{20}$: $\{x^2 + y^2 = z\}$ | (Paraboloid) |
| $C_{11}$: $\{x^2 - y^2 = z\}$ | (hyperbolisches Paraboloid, Sattel) |

VIII.2.17. Beispiel. Wir wollen den Typ der Quadrik $E \subseteq \mathbb{R}^3$ bestimmen, die durch die quadratische Gleichung

$$4x^2 - 8y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz + 4x + 4y - 6z + 5 = 0$$

gegeben ist. Durch Ergänzen auf vollständige Quadrate erhalten wir:

$$\begin{aligned}
4x^2 - 8y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz + 4x + 4y - 6z + 5 \\
&= (2x-y-z)^2 - 9y^2 - 6yz + 4x + 4y - 6z + 5 \\
&= (2x-y-z)^2 - (3y+z)^2 + z^2 + 4x + 4y - 6z + 5 \\
&= (2x-y-z+1)^2 - (3y+z)^2 + z^2 + 6y - 4z + 4 \\
&= (2x-y-z+1)^2 - (3y+z-1)^2 + z^2 - 6z + 5 \\
&= (2x-y-z+1)^2 - (3y+z-1)^2 + (z-3)^2 - 4 \\
&= 4\Big\{\Big(\frac{2x-y-z+1}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{z-3}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{3y+z-1}{2}\Big)^2 - 1\Big\}
\end{aligned}$$

Es ist daher, $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} (2x-y-z+1)/2 \\ (z-3)/2 \\ (3y+z-1)/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ein affiner Isomorphismus und $\alpha(E) = \{x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0\}$, d.h. $E$ ist ein einschaliges Hyperboloid.

Punkte $a_0, \dots, a_n$ eines Euklidischen Vektorraums $V$ werden als *affines Orthonormalsystem* bezeichnet, falls $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ eine Orthonormalbasis von $V$ bilden. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathbb{R}^n \to V$, $x \mapsto a_0 + \sum_{i=1}^n x_i(a_i - a_0)$, eine Bewegung ist, d.h. Längen bewahrt. Bewegungen bilden affine Orthonormalsysteme auf affine Orthonormalsysteme ab. Umgekehrt sind je zwei affine Orthonormalsystem metrisch kongruent, d.h. können durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden.

VIII.2.18. Satz (Metrische Normalform quadratischer Funktionen). *Sei $V$ ein $n$-dimensionaler Euklidischer Vektorraum und $Q\colon V \to \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion. Dann existiert ein affines Orthonormalsystem $a_0, \dots, a_n$ von $V$, sodass die Funktion $\tilde{Q}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\tilde{Q}(x_1, \dots, x_n) := Q\big(a_0 + \sum_{i=1}^n x_i(a_i - a_0)\big)$ folgende Gestalt hat:*

*(a) $\tilde{Q}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} \lambda_i x_i^2 + c$, falls $Q$ einen Mittelpunkt besitzt.*

*(b) $\tilde{Q}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i^2 - \sum_{i=p+1}^{p+q} \lambda_i x_i^2 + \mu\, x_{p+q+1}$, falls $Q$ keinen MP hat.*

*Dabei ist $(p, q)$ die Signatur von $Q$, $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_p$, $0 < \lambda_{p+1} \leq \dots \leq \lambda_{p+q}$, $\mu > 0$ und $c \in \mathbb{R}$. In anderen Worten, $\alpha\colon \mathbb{R}^n \to V$, $\alpha(x) := a_0 + \sum_{i=1}^n x_i(a_i - a_0)$, ist eine Bewegung und $Q \circ \alpha$ stimmt mit einer der beiden Normalformen oben überein.*

Beweis. Wir gehen genau wie im Beweis von Satz VIII.2.8 vor, können nun aber $b_1, \dots, b_n$ als Orthonormalbasis wählen, siehe Korollar VII.3.16. □

VIII.2.19. Korollar (Metrische Normalform reeller Quadriken). *Sei $V$ ein $n$-dimensionaler Euklidischer Vektorraum. Dann ist jede Quadrik in $V$ zu einer der folgenden Quadriken in $\mathbb{R}^n$ metrisch kongruent:*

*(a) Typ $A_{pq}$:*

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_p}{a_p}\right)^2-\left(\frac{x_{p+1}}{a_{p+1}}\right)^2-\cdots-\left(\frac{x_{p+q}}{a_{p+q}}\right)^2=0,$$

*wobei $0\leq q\leq p$, $p+q\leq n$, $1=a_1\geq\cdots\geq a_p>0$, und $a_{p+1}\geq\cdots\geq a_{p+q}>0$.*

*(b) Typ $B_{pq}$:*

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_p}{a_p}\right)^2-\left(\frac{x_{p+1}}{a_{p+1}}\right)^2-\cdots-\left(\frac{x_{p+q}}{a_{p+q}}\right)^2=1,$$

*wobei $0\leq p$, $0\leq q$, $p+q\leq n$, $a_1\geq\cdots\geq a_p>0$, und $a_{p+1}\geq\cdots\geq a_{p+q}>0$.*

*(c) Typ $C_{pq}$:*

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x_p}{a_p}\right)^2-\left(\frac{x_{p+1}}{a_{p+1}}\right)^2-\cdots-\left(\frac{x_{p+q}}{a_{p+q}}\right)^2=x_{p+q+1},$$

*wobei $0\leq q\leq p$, $p+q<n$, $a_1\geq\cdots\geq a_p>0$, und $a_{p+1}\geq\cdots\geq a_{p+q}>0$.*

*D.h. es existiert eine Bewegung, $\mathbb{R}^n\cong V$, die die Quadrik in $V$ auf eine dieser Normalformen in $\mathbb{R}^n$ abbildet. Jede solche Bewegung wird als* Hauptachsentransformation *bezeichnet.*

Beweis. Sei $E=\{v\in V:Q(v)=0\}$ eine Quadrik in $V$, wobei $Q\colon V\to\mathbb{R}$ eine quadratische Funktion bezeichnet. Nach Satz VIII.2.18 existiert eine Bewegung, $\alpha\colon\mathbb{R}^n\xrightarrow{\cong}V$, sodass $\alpha^{-1}(E)$ die Gestalt

$$\Big\{x\in\mathbb{R}^n\ \Big|\ \big(\tfrac{x_1}{a_1}\big)^2+\cdots+\big(\tfrac{x_p}{a_p}\big)^2-\big(\tfrac{x_{p+1}}{a_{p+1}}\big)^2-\cdots-\big(\tfrac{x_{p+q}}{a_{p+q}}\big)^2+c=0\Big\}$$

oder

$$\Big\{x\in\mathbb{R}^n\ \Big|\ \big(\tfrac{x_1}{a_1}\big)^2+\cdots+\big(\tfrac{x_p}{a_p}\big)^2-\big(\tfrac{x_{p+1}}{a_{p+1}}\big)^2-\cdots-\big(\tfrac{x_{p+q}}{a_{p+q}}\big)^2+\mu x_{p+q+1}=0\Big\}$$

hat, wobei $a_1\geq\cdots\geq a_p>0$, $a_{p+1}\geq\cdots\geq a_{p+q}>0$, $c\in\mathbb{R}$ und $\mu\neq0$. Dabei ist $a_i=1/\sqrt{\lambda_i}$, vgl. Satz VIII.2.18. Durch einfache Manipulationen lassen sich diese Quadriken nun auf einen der Typen $A_{pq}$, $B_{pq}$ oder $C_{pq}$ transformieren.

Wir gehen genau wie im Beweis von Korollar VIII.2.13. Gilt im ersten Fall $c=0$ und $p\geq q$, dann können wir die definierende Gleichung mit $a_1^2$ multiplizieren und sehen, dass $\alpha^{-1}(E)$ vom Typ $A_{pq}$. Ist $p<q$, dann bildet $\tilde\alpha\colon\mathbb{R}^n\to V$,

$$\tilde\alpha(x)=\alpha(x_{q+1},\dots,x_{q+p},x_1,\dots,x_q,x_{p+q+1},\dots,x_n),\tag{VIII.13}$$

eine Bewegung, sodass

$$\tilde\alpha^{-1}(E)=\Big\{x\in\mathbb{R}^n\ \Big|\ \big(\tfrac{x_1}{a_{p+1}}\big)^2+\cdots+\big(\tfrac{x_q}{a_{p+q}}\big)^2-\big(\tfrac{x_{q+1}}{a_1}\big)^2-\cdots-\big(\tfrac{x_{q+p}}{a_p}\big)^2=0\Big\}.$$

Multiplizieren wir die definierende Gleichung mit $a_{p+1}^2$, so sehen wir, dass $\tilde{\alpha}^{-1}(E)$ vom Typ $A_{qp}$ ist. Gilt im ersten Fall $c < 0$, dann

$$\alpha^{-1}(E) = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \big(\tfrac{x_1}{\tilde{a}_1}\big)^2 + \cdots + \big(\tfrac{x_p}{\tilde{a}_p}\big)^2 - \big(\tfrac{x_{p+1}}{\tilde{a}_{p+1}}\big)^2 - \cdots - \big(\tfrac{x_{p+q}}{\tilde{a}_{p+q}}\big)^2 - 1 = 0\Big\},$$

wobei $\tilde{a}_i = \sqrt{-c}a_i$, d.h. $\alpha^{-1}(E)$ ist vom Typ $B_{pq}$. Gilt $c > 0$, dann ist (VIII.13) eine Bewegung, sodass

$$\tilde{\alpha}^{-1}(E) = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \big(\tfrac{x_1}{\tilde{a}_{p+1}}\big)^2 + \cdots + \big(\tfrac{x_q}{\tilde{a}_{p+q}}\big)^2 - \big(\tfrac{x_{q+1}}{\tilde{a}_1}\big)^2 - \cdots - \big(\tfrac{x_{q+p}}{\tilde{a}_p}\big)^2 - 1 = 0\Big\}.$$

wobei $\tilde{a}_i = \sqrt{c}a_i$, d.h. $\tilde{\alpha}^{-1}(E)$ ist vom Typ $B_{qp}$. Auch im zweiten Fall dürfen wir o.B.d.A. $p \geq q$ annehmen in dem wir gegebenenfalls eine Bewegung der Form (VIII.13) anwenden. Durch eine Bewegung der Form

$$\tilde{\alpha}(x) := \alpha(x_1, \dots, x_{p+q}, -x_{p+q+1}, x_{p+q+2}, \dots, x_n),$$

können wir auch $\mu < 0$ erreichen. Es gilt dann

$$\tilde{\alpha}^{-1}(E) = \Big\{x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \big(\tfrac{x_1}{\tilde{a}_1}\big)^2 + \cdots + \big(\tfrac{x_p}{\tilde{a}_p}\big)^2 - \big(\tfrac{x_{p+1}}{\tilde{a}_{p+1}}\big)^2 - \cdots - \big(\tfrac{x_{p+q}}{\tilde{a}_{p+q}}\big)^2 - x_{p+q+1} = 0\Big\}.$$

wobei $\tilde{a}_i = \sqrt{-\mu}a_i$, d.h. $\alpha^{-1}(E)$ is vom Typ $C_{pq}$. □

VIII.2.20. Beispiel. Jede Quadrik in $\mathbb{R}^2$ ist zu einer der folgenden Quadriken metrisch kongruent:

| | |
|---|---|
| $A_{00}$: $\{0 = 0\}$ | (die gesamte Ebene, $\mathbb{R}^2$) |
| $A_{10}$: $\{x^2 = 0\}$ | (Gerade) |
| $A_{20}$: $\{x^2 + \big(\tfrac{y}{b}\big)^2 = 0\}$ | (ein Punkt, $b > 0$) |
| $A_{11}$: $\{x^2 - \big(\tfrac{y}{b}\big)^2 = 0\}$ | (zwei sich schneidende Geraden, $b > 0$) |
| $B_{00}$: $\{0 = 1\}$ | (leer) |
| $B_{10}$: $\{\big(\tfrac{x}{a}\big)^2 = 1\}$ | (zwei parallele Geraden, $a > 0$) |
| $B_{01}$: $\{-\big(\tfrac{x}{a}\big)^2 = 1\}$ | (leer, $a > 0$) |
| $B_{20}$: $\{\big(\tfrac{x}{a}\big)^2 + \big(\tfrac{y}{b}\big)^2 = 1\}$ | (Ellipse in Hauptlage, $a \geq b > 0$) |
| $B_{11}$: $\{\big(\tfrac{x}{a}\big)^2 - \big(\tfrac{y}{b}\big)^2 = 1\}$ | (Hyperbel in Hauptlage, $a, b > 0$) |
| $B_{02}$: $\{-\big(\tfrac{x}{a}\big)^2 - \big(\tfrac{y}{b}\big)^2 = 1\}$ | (leer, $a, b > 0$) |
| $C_{00}$: $\{0 = x\}$ | (Gerade) |
| $C_{10}$: $\{\big(\tfrac{x}{a}\big)^2 = y\}$ | (Parabel in Hauptlage, $a > 0$) |

VIII.2.21. Beispiel. Betrachte die Quadrik

$$E = \big\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : 13x^2 + 13y^2 - 10xy + 26\sqrt{2}x - 10\sqrt{2}y - 46 = 0\big\}.$$

Wir wollen eine Bewegung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bestimmen, die $E$ auf Normalform bringt. Dazu diagonalisieren wir zunächst den quadratischen Teil der Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 13 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix} U^t, \qquad \text{wobei} \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in O_2.$$

Setzen wir $\left(\begin{smallmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{smallmatrix}\right) := U^t \left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)$ dann folgt für den quadratischen Teil,

$$13x^2 + 13y^2 - 10xy = \left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right)^t \left(\begin{smallmatrix}13 & -5\\ -5 & 13\end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{smallmatrix}\right)^t \left(\begin{smallmatrix}8 & 0\\ 0 & 18\end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{smallmatrix}\right) = 8\tilde{x}^2 + 18\tilde{y}^2,$$

und daher mit $\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right) = U \left(\begin{smallmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{y}\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}(\tilde{x}-\tilde{y})/\sqrt{2}\\ (\tilde{x}+\tilde{y})/\sqrt{2}\end{smallmatrix}\right)$:

$$\begin{aligned}
13x^2 + 13y^2 - 10xy + 26\sqrt{2}x - 10\sqrt{2}y - 46 &\\
&= 8\tilde{x}^2 + 18\tilde{y}^2 + 26\sqrt{2}(\tilde{x} - \tilde{y})/\sqrt{2} - 10\sqrt{2}(\tilde{x} + \tilde{y})/\sqrt{2} - 36\tilde{y} - 46\\
&= 8\tilde{x}^2 + 18\tilde{y}^2 + 16\tilde{x} - 36\tilde{y} - 46\\
&= 8(\tilde{x} + 1)^2 + 18(\tilde{y} - 1)^2 - 72\\
&= 72\Big\{\Big(\frac{\tilde{x}+1}{3}\Big)^2 + \Big(\frac{\tilde{y}-1}{2}\Big)^2 - 1\Big\}
\end{aligned}$$

Somit ist $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$\alpha\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} := U^t\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\tilde{x}+1\\ \tilde{y}-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(x+y)/\sqrt{2}+1\\ (-x+y)/\sqrt{2}-1\end{pmatrix},$$

eine Bewegung, für die

$$\alpha(E) = \big\{\left(\begin{smallmatrix}x\\ y\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : \left(\tfrac{x}{3}\right)^2 + \left(\tfrac{y}{2}\right)^2 = 1\big\}$$

gilt. Es handelt sich also um eine Ellipse mit Halbachsen 3 und 2.

VIII.2.22. Beispiel. Jede Quadrik in $\mathbb{R}^3$ ist zu einer der folgenden Quadriken metrisch kongruent:

| | | |
|---|---|---|
| $A_{00}$: | $\{0 = 0\}$ | (der gesamte Raum, $\mathbb{R}^3$) |
| $A_{10}$: | $\{x^2 = 0\}$ | (Ebene) |
| $A_{20}$: | $\{x^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0\}$ | (Gerade, $b > 0$) |
| $A_{11}$: | $\{x^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0\}$ | (zwei sich schneidende Ebenen, $b > 0$) |
| $A_{30}$: | $\{x^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0\}$ | (ein Punkt, $b, c > 0$) |
| $A_{21}$: | $\{x^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0\}$ | (Kegel, $b, c > 0$) |
| $B_{00}$: | $\{0 = 1\}$ | (leer) |
| $B_{10}$: | $\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1\}$ | (zwei parallele Ebenen, $a > 0$) |
| $B_{01}$: | $\{-\left(\frac{x}{a}\right)^2 = 1\}$ | (leer, $a > 0$) |
| $B_{20}$: | $\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}$ | (elliptischer Zylinder, $a \geq b > 0$) |
| $B_{11}$: | $\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}$ | (hyperbolischer Zylinder, $a, b > 0$) |
| $B_{02}$: | $\{-\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1\}$ | (leer, $a, b > 0$) |
| $B_{30}$: | $\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\}$ | (Ellipsoid, $a \geq b \geq c > 0$) |
| $B_{21}$: | $\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\}$ | (einschal. Hyperboloid, $a \geq b > 0$, $c > 0$) |
| $B_{12}$: | $\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\}$ | (zweischal. Hyperboloid, $a > 0$, $b \geq c > 0$) |
| $B_{03}$: | $\{-\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1\}$ | (leer, $a \geq b \geq c > 0$) |

$C_{00}$: $\{0 = x\}$ (Ebene)
$C_{10}$: $\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 = y\}$ (parabolischer Zylinder, $a > 0$)
$C_{20}$: $\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = z\}$ (elliptisches Paraboloid, $a \geq b > 0$)
$C_{11}$: $\{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = z\}$ (hyperbolisches Paraboloid, Sattel, $a, b > 0$)

VIII.2.23. Beispiel. Betrachte die Quadrik $E \subseteq \mathbb{R}^3$, die durch die Gleichung

$$-21x^2 - 5y^2 - 5z^2 + 30xy + 30xz - 2yz + 8\sqrt{2}y - 8\sqrt{2}z - 52 = 0$$

beschrieben ist. Wir wollen eine Bewegung $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bestimmen, die $E$ auf Normalform bringt. Wir diagonalisieren zunächst den quadratischen Teil der Gleichung und bestimmen dazu eine orthogonale Matrix $U$, sodass

$$\begin{pmatrix} -21 & 15 & 15 \\ 15 & -5 & -1 \\ 15 & -1 & -5 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} 9 & & \\ & -4 & \\ & & -36 \end{pmatrix} U^t,$$

mit einer orthogonalen Matrix,

$$U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \in O_3.$$

Setzen wir $\left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{smallmatrix}\right) := U^t \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$ dann erhalten wir für den quadratischen Teil:

$$\begin{aligned} -21x^2 - 5y^2 - 5z^2 + 30xy + 30xz - 2yz &= \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)^t \left(\begin{smallmatrix} -21 & 15 & 15 \\ 15 & -5 & -1 \\ 15 & -1 & -5 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \\ &= \left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{smallmatrix}\right)^t \left(\begin{smallmatrix} 9 & & \\ & -4 & \\ & & -36 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{smallmatrix}\right) = 9\tilde{x}^2 - 4\tilde{y}^2 - 36\tilde{z}^2 \end{aligned}$$

Verwenden wir noch $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = U \left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{smallmatrix}\right)$, dann $8\sqrt{2}(y - z) = -16\sqrt{2}\tilde{y}$ und daher:

$$\begin{aligned} -21x^2 - 5y^2 - 5z^2 + 30xy + 30xz - 2yz &+ 8\sqrt{2}y - 8\sqrt{2}z - 52 \\ &= 9\tilde{x}^2 - 4\tilde{y}^2 - 36\tilde{z}^2 - 16\tilde{y} - 52 \\ &= 9\tilde{x}^2 - 4(\tilde{y} + 2)^2 - 36\tilde{z}^2 - 36 \\ &= 36\Big\{\Big(\frac{\tilde{x}}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{\tilde{y} + 2}{3}\Big)^2 - \tilde{z}^2 - 1\Big\} \end{aligned}$$

Somit ist $\alpha\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = U^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} + 2 \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x + y + z)/\sqrt{3} \\ (-y + z)/\sqrt{2} + 2 \\ (-2x + y + z)/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

eine Bewegung, sodass

$$\alpha(E) = \Big\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : \left(\tfrac{x}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{y}{3}\right)^2 - \left(\tfrac{z}{1}\right)^2 - 1 = 0\Big\}.$$