Insbesondere ist E ein zweischaliges Hyperboloid.

VIII.3. Projektive Räume und Abbildungen.

VIII.3.1. Definition (Projektiver Raum). Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Unter dem *projektiven Raum* $P(V)$ verstehen wir die Menge aller Geraden durch den Ursprung in V, d.h.

$$P(V) := \big\{L \bigm| L \text{ is 1-dimensionaler linearer Teilraum von } V\big\}.$$

Jeder Vektor $0 \neq v \in V$ spannt einen 1-dimensionalen Teilraum $\langle v\rangle$ in V auf und repräsentiert daher einen Punkt in $\langle v\rangle \in P(V)$. Zwei Vektoren $v, v' \in V \setminus 0$ spannen genau dann den selben Teilraum auf, wenn ein Skalar $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$ existiert, sodass $v' = \lambda v$. Die Relation

$$v \sim v' \quad := \quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus 0 : v' = \lambda v$$

ist offensichtlich eine Äquivalenzrelation auf $V \setminus 0$. Die Menge der Äquivalenzklassen kann in kanonischer Weise mit $P(V)$ identifiziert werden,

$$P(V) = (V \setminus 0)/{\sim}, \qquad \langle v\rangle \leftrightarrow [v].$$

Wir werden den von einem Vektor $0 \neq v \in V$ repräsentierten Punkt in $P(V)$ im folgenden mit $[v]$ bezeichnen.

Ist W ein linearer Teilraum von V, dann können wir jede Gerade in W auch als Gerade in V auffassen, und so $P(W)$ als Teilmege von $P(V)$ betrachten. Für zwei Teilräume W und W' von V gilt offensichtlich:

$$P(W) = P(W') \quad \Leftrightarrow \quad W = W'. \tag{VIII.14}$$

VIII.3.2. Definition (Projektive Teilräume). Eine Teilmenge P von $P(V)$ wird als *projektiver Teilraum von* $P(V)$ bezeichnet, wenn sie von der Form $P = P(W)$ ist, wobei W ein linearer Teilraum von V ist. Die *Dimension eines projektiven Teilraums* $P = P(W)$ wird durch

$$\dim(P) := \dim(W) - 1$$

definiert. Da die Bedingung $P = P(W)$ den Teilraum W eindeutig festlegt, vgl. (VIII.14), ist dies wohldefiniert. 1-dimensionale projektive Teilräume heißen *projektive Geraden*, 2-dimensionale projektive Teilräume werden als *projektive Ebenen* bezeichnet. Gilt $\dim(P) = \dim(P(V)) - 1$, dann wird P *projektive Hyperbene* genannt.

VIII.3.3. Beispiel. Die leere Teilmenge bildet einen projektiven Teilraum von $P(V)$ und es gilt $\dim(\emptyset) = -1$. Die 0-dimensionalen projektiven Teilräume von $P(V)$ sind gerade die einpunktigen Teilmengen, d.h. jeder Punkt in $P(V)$, kann als 0-dimenisonaler projektiver Teilraum aufgefasst werden. Auch $P = P(V)$ ist ein projektiver Teilraum von $P(V)$, es gilt $\dim(P(V)) = \dim(V) - 1$.

Sind $P \subseteq P' \subseteq P(V)$ zwei projektive Teilräume, so folgt $\dim(P) \leq \dim(P')$. Gilt Gleichheit, $\dim(P) = \dim(P')$, dann muss schon $P = P'$ sein. Ist nämlich $P = P(W)$ und $P' = P(W')$, so folgt $W \subseteq W'$ und $\dim(W) = \dim(W')$, also $W = W'$ und daher $P = P'$.

Der Durchschnitt zweier projektiver Teilräume W und W' von $P(V)$ ist ein projektiver Teilraum von $P(V)$, denn

$$P(W) \cap P(W') = P(W \cap W').$$

Allgemeiner bildet der Durchschnitt $\bigcap_i P_i$ beliebig vieler projektiver Teilräume, $P_i \subseteq P(V)$, einen projektiven Teilraum von $P(V)$. Sind nämlich W_i lineare Teilräume von V, sodass $P_i = P(W_i)$, dann gilt $\bigcap_i P_i = \bigcap_i P(W_i) = P(\bigcap_i W_i)$.

VIII.3.4. Definition (Projektive Hülle). Die *projektive Hülle* einer Teilmenge $S \subseteq P(V)$ ist der (eindeutig bestimmte) kleinste projektive Teilraum, der S enthält. In anderen Worten,

$$\langle S \rangle_{\mathrm{proj}} := \bigcap_{S \subseteq P} P,$$

wobei der Durchschnitt über alle projektiven Teilräume P von $P(V)$ genommen wird, die S enthalten.

Sind W und W' zwei lineare Teilräume von V, dann gilt

$$\big\langle P(W) \cup P(W') \big\rangle_{\mathrm{proj}} = P(W + W'),$$

denn $W + W'$ ist der kleinste lineare Teilraum, der W und W' enthält.

VIII.3.5. Proposition (Dimensionsformel). *Sind P und P' zwei projektive Teilräume von $P(V)$, dann gilt*

$$\dim(P) + \dim(P') = \dim(P \cap P') + \dim\big(\langle P \cup P' \rangle_{proj}\big).$$

Beweis. Nach Voraussetzung existieren lineare Teilräume W und W' von V, sodass $P = P(W)$ und $P' = P(W)$. Weiters ist $P \cap P' = P(W \cap W')$ und $\langle P \cup P' \rangle_{\mathrm{proj}} = P(W + W')$. Es gilt daher:

$$\begin{aligned}
\dim(P) &= \dim(W) - 1 \\
\dim(P') &= \dim(W') - 1 \\
\dim(P \cap P') &= \dim(W \cap W') - 1 \\
\dim\big(\langle P \cup P' \rangle_{\mathrm{proj}}\big) &= \dim(W + W') - 1
\end{aligned}$$

Die Dimensionsformel folgt somit aus der Dimensionsformel, siehe Satz IV.2.1,

$$\dim(W) + \dim(W') = \dim(W \cap W') + \dim(W + W')$$

für lineare Teilräume. □

Beachte, dass die analoge Dimensionsformel für affine Teilräume nur Fall nicht disjunkter Teilräume gültig ist, vgl. Beispiel VIII.1.24.

VIII.3.6. Beispiel. Zwei verschiedene Punkte (d.h. 0-dimensionale projektive Teilräume) $P \neq P' \in P(V)$ spannen eine projektive Gerade auf, denn aus der Dimensionsformel folgt
$$\dim\bigl(\langle P \cup P' \rangle_{\mathrm{proj}}\bigr) = 1,$$
da ja $P \cap P' = \emptyset$, also $\dim(P \cap P') = -1$. Je zwei verschiedene Punkte in $P(V)$ liegen daher auf genau einer projektiven Geraden.

VIII.3.7. Beispiel. Sind P und P' zwei projektive Teilräume von $P(V)$ mit
$$\dim(P) + \dim(P') \geq \dim(P(V)),$$
so folgt aus der Dimensionsformel $\dim(P \cap P') \geq 0$ und daher $P \cap P' \neq \emptyset$. Insbesondere haben je zwei projektive Geraden in einer projektiven Ebene mindestens einen Schnittpunkt. Sind die beiden Geraden verschieden, so schneiden sie sich in genau einem Punkt, auch dies folgt aus der Dimensionsformel, denn die projektive Hülle zweier verschiedener Geraden in einer projektiven Ebene muss 2-dimensional sein. In der affinen Geometrie ist die Situation komplizierter, da hier Geraden auch parallel sein können.

VIII.3.8. Beispiel. Betrachte eine projektive Gerade G und eine projektive Ebene E in einem 3-dimensionalen projektiven Raum, $\dim(P(V)) = 3$. Aus der Dimensionsformel erhalten wir $\dim(E \cap G) \geq 0$, also $E \cap G \neq \emptyset$. Eine projektive Gerade und eine projektive Ebene im 3-dimensionalen projektiven Raum haben daher stets mindestens einen Schnittpunkt. Liegt die Gerade G nicht zur Gänze in E, dann schneiden sie sich in genau einem Punkt. In diesem Fall gilt nämlich $\dim(\langle G \cup E \rangle_{\mathrm{proj}}) = 3$ und daher $\dim(E \cap G) = 0$. Auch hier ist die analoge affine Situation komplizierter, da die Gerade parallel zur Ebene sein kann.

VIII.3.9. Beispiel. Wir betrachten zwei projektive Ebenen E und E' in einem 3-dimensionalen projektiven Raum, $\dim(P(V)) = 3$. Aus der Dimensionsformel folgt $\dim(E \cap E') \geq 1$, d.h. der Durchschnitt $E \cap E'$ enthält eine projektive Gerade. Sind die beiden Ebenen verschieden, $E \neq E'$, dann ist ihr Durchschnitt $E \cap E'$ eine projektive Gerade, denn in in diesem Fall gilt $\dim(\langle E \cup E' \rangle_{\mathrm{proj}}) = 3$ und daher $\dim(E \cap E') = 1$. Wieder ist die affine Situation komplizierter, da Ebenen parallel sein können, dieser Fall tritt in der projektiven Geometrie nicht auf.

Jedes lineare Funktional, $\alpha\colon V \to \mathbb{K}$, definiert eine Teilmenge
$$\bigl\{[v] \in P(V) \bigm| \alpha(v) = 0\bigr\} = P(\ker(\alpha)).$$
Beachte, dass α keine Funktion auf $P(V)$ definiert, trotzdem ist die Nullstellenmenge wohldefiniert, denn aus $\alpha(v) = 0$ folgt $\alpha(\lambda v) = 0$, für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$. Beachte, dass dies eine projektive Hyperebene bildet, falls $\alpha \neq 0$. Jeder projektive Teilraum P von $P(V)$ lässt sich in der Form
$$P = \bigl\{[v] \in P(V) \bigm| \alpha_1(v) = 0, \dots, \alpha_k(v) = 0\bigr\} = P\Bigl(\bigcap_{i=1}^{k} \ker(\alpha_i)\Bigr)$$

schreiben, für gewisse lineare Funktionale $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V^*$. Darüber hinaus kann $k = \dim(P(V)) - \dim(P)$ gewählt werden, und eine Darstellung mit weniger Funktionalen ist nicht möglich. Dies folgt daraus, dass jeder lineare Teilraum W von V in der Form $W = \bigcap_{i=1}^k \ker(\alpha_i)$ geschrieben werden kann, für geeignete Funktionale α_i, wobei $k = \dim(V) - \dim(W)$.

Wir wollen nun projektive und affine Geometrie in Zusammenhang bringen. Dazu wählen wir eine affine Hyperebene A in V, sodass $0 \notin A$. Jeder Punkt in A spannt daher einen 1-dimensionalen linearen Teilraum auf und definiert somit ein Element von $P(V)$. Dies liefert eine injektive Abbildung

$$\iota\colon A \to P(V), \qquad \iota(v) := [v],$$

denn verschiedene Punkte in A spannen unterschiedliche 1-dimensionale Teilräume auf. Wir erhalten so aber nicht alle 1-dimensionalen Teilräume. Es gilt jedoch

$$P(V) = \iota(A) \sqcup P(V_A),$$

wobei V_A die zu A parallele lineare Hyperbene bezeichnet.[14] Da $\dim(P(V_A)) = \dim(P(V)) - 1$, ist der affine Teil, $\iota(A)$, das Komplement einer projektiven Hyperebene. Beachte auch $\dim(A) = \dim(P(V))$. Der n-dimensionalen projektive Raum $P(V)$ zerfällt daher in einen n-dimensionalen affinen Raum A und eine $(n-1)$-dimensionale projektive Hyperebene, $P(V_A)$, deren Elemente als *Fernpunkte* bezeichnet werden. Ob ein Punkt in $P(V)$ Fernpunkt ist oder nicht, hängt von der Einbettung ι, d.h. von der Wahl des Teilraums A ab. Die Punkte in $P(V)$ sind alle gleichberechtigt, erst die Einbettung ι macht manche zu Fernpunkten. Beachte, dass jede projektive Hyperebene in $P(V)$ als Fernhyperebene einer geeigneten Einbettung ι auftreten kann.

VIII.3.10. Beispiel. Die Projektive Gerade zerfällt in eine affine Gerade und einen Fernpunkt. Die projektive Ebene zerfällt in eine affine Ebene und eine Ferngerade. Ein 3-dimensionaler projektiver Raum zerfällt in einen 3-dimensionalen affinen Raum und eine projektive Fernebene.

VIII.3.11. Proposition. *Bezeichne $\iota\colon A \to P(V)$ die mit einer affinen Hyperebene A in V assoziierte Einbettung, $0 \notin A$. Dann gilt:*

(a) Ist P' ein projektiver Teilraum von $P(V)$, so bildet $A' = \iota^{-1}(P')$ einen affinen Teilraum von A. Gilt $A' \neq \emptyset$, dann ist $\dim(A') = \dim(P')$ und

$$P' = \iota(A') \sqcup P(V_{A'}),$$

wobei $V_{A'}$ den zu A' parallelen linearen Teilraum in V bezeichnet.

(b) Ist A' ein affiner Teilraum von A, dann existiert ein projektiver Teilraum P' in $P(V)$, sodass $\iota^{-1}(P') = A'$. Gilt $A' \neq \emptyset$, dann ist P' eindeutig bestimmt, $P' = \langle \iota(A') \rangle_{proj} = P(\langle A' \rangle_{lin})$.

[14] Das Zeichen $\sqcup$ deutet eine *disjunkte Vereinigung* an, d.h. es ist als $P(V) = \iota(A) \cup P(V_A)$ und $\iota(A) \cap P(V_A) = \emptyset$ zu lesen.

Beweis. Ad (a): Nach Voraussetzung existiert ein linearer Teilraum W' von V, sodass $P' = P(W')$. Offensichtlich gilt $\iota^{-1}(P') = A \cap W'$, also bildet A' einen affinen Teilraum von A. Beachte, dass die affine Hülle von $A \cup W'$ echt größer als A ist, denn $0 \notin A$ aber $0 \in W'$. Da A eine affine Hyperebene bildet, folgt $\langle A \cup W' \rangle_{\text{aff}} = V$. Ist nun $A' \neq \emptyset$, dann erhalten wir aus der Dimensionsformel für affine Teilräume,

$$\underbrace{\dim(A)}_{=\dim(V)-1} + \dim(W') = \underbrace{\dim(A \cap W')}_{=\dim(A')} + \underbrace{\dim\big(\langle A \cup W' \rangle_{\text{aff}}\big)}_{=\dim(V)},$$

alos $\dim(A') = \dim(W') - 1 = \dim(P(W')) = \dim(P')$, siehe Beispiel VIII.1.24. In diesem Fall gilt weiters $P' \cap P(V_A) = P(W') \cap P(V_A) = P(W' \cap V_A) = P(V_{W' \cap A}) = P(V_{A'})$, also $P' = \iota(A') \sqcup P(V_{A'})$.

Ad (b): Sei A' ein affiner Teilraum von A und bezeichne $P' := \langle \iota(A') \rangle_{\text{proj}}$. Beachte $P' = P(W')$, wobei $W' = \langle A' \rangle_{\text{lin}}$. Somit $\iota^{-1}(P') = A \cap W' = A'$. Ist P'' ein weitere projektiver Teilraum mit $\iota^{-1}(P'') = A'$, so muss $P' \subseteq P''$ gelten, denn P' ist der kleinste projektive Teilraum, der $\iota(A')$ enthält. Ist nun $A' \neq \emptyset$, dann erhalten wir aus der Dimensionsformel im ersten Teil $\dim(P') = \dim(P'')$ und daher $P' = P''$. Somit ist auch die Eindeutigkeit des Teilraums P' gezeigt. $\square$

VIII.3.12. Beispiel. Sei $\iota\colon A \to P(V)$ und $P(V) = \iota(A) \sqcup P(V_A)$ wie oben. Ist ein projektiver Teilraum P von $P(V)$ durch lineare Gleichungen gegeben,

$$P = \big\{[v] \in P(V) \,\big|\, \alpha_1(v) = 0, \dots, \alpha_k(v) = 0\big\}$$

wobei $\alpha_i \in V^*$, dann folgt

$$\iota^{-1}(P) = \big\{v \in A \,\big|\, \alpha_1(v) = 0, \dots, \alpha_k(v) = 0\big\}.$$

Die Einschrämkungen $\alpha_i|_A\colon A \to \mathbb{K}$ liefern daher ein affines Gleichungssytem für den affinen Teilraum $\iota^{-1}(P)$.

Wir werden die Notation $\mathbb{K}\mathrm{P}^n := P(\mathbb{K}^{n+1})$ verwenden, $\dim(\mathbb{K}\mathrm{P}^n) = n$. Ist $0 \neq (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, dann bezeichnen wir den davon aufgespannten 1-dimensionalen linearen Teilraum mit $[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{K}\mathrm{P}^n$. Beachte, dass

$$[x_0 : \cdots : x_n] = [x_0' : \cdots : x_n'] \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus 0 : (x_0, \dots, x_n) = \lambda(x_0', \dots, x_n').$$

Die Skalare $x_0, \dots, x_n$ werden als *homogene Koordinaten* bezeichnet, und sind nur bis auf ein gemeinsames Vielfaches bestimmt. Die mit der affinen Hyperebene $A = e_0 + \langle e_1, \dots, e_n \rangle_{\text{lin}}$ assoziierte Einbettung,

$$\iota\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}\mathrm{P}^n, \qquad \iota(x_1, \dots, x_n) = [1 : x_1 : \cdots : x_n]$$

wird als *Standardeinbettung* des affinen Raums bezeichnet. Wird erhalten die Zerlegung

$$\mathbb{K}\mathrm{P}^n = \iota(\mathbb{K}^n) \sqcup \mathbb{K}\mathrm{P}^{n-1},$$

wobei die Einbettung $\mathbb{K}\mathrm{P}^{n-1} \subseteq \mathbb{K}\mathrm{P}^n$ durch $[x_1 : \cdots : x_n] \mapsto [0 : x_1 : \cdots : x_n]$ gegeben ist. Ist eine projektive Hyperebene durch eine Gleichung gegeben,

$$P = \big\{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{K}\mathrm{P}^n \bigm| a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\big\}$$

dann erhalten wir sofort eine affine Gleichung für den affinen Teil,

$$\iota^{-1}(P) = \big\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \bigm| a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\big\}.$$

Analoges gilt für projektive Teilräume beliebiger Dimension.

VIII.3.13. Beispiel. Wir betrachten zwei Punkte $p_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$ und $p_2 = \left(\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right)$ in $\mathbb{R}^2$. Die Gerade durch p_1 und p_2 ist daher

$$g = \langle p_1, p_2\rangle_{\mathrm{aff}} = \big\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : 1 + x_1 - x_2 = 0\big\}.$$

Mit Hilfe der Standardeinbettung erhalten wir zwei Punkte $P_1 = \iota(p_1) = [1 : 1 : 2]$ und $P_2 = \iota(p_2) = [1 : 3 : 4]$ in der projektiven Ebene $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Die projektive Gerade durch P_1 und P_2 ist

$$G = \langle P_1, P_2\rangle_{\mathrm{proj}} = \big\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 : x_0 + x_1 - x_2 = 0\big\}.$$

Der affine Teil von G stimmt mit g überein, $\iota^{-1}(G) = g$, die projektive Gerade G besitzt aber auch einen Fernpunkt, $G \cap \mathbb{R}\mathrm{P}^1 = \{[0 : 1 : 1]\}$, die Richtung der Geraden g. Sei nun

$$g' = \big\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : 2 + x_1 - x_2 = 0\big\}$$

eine weitere affine Gerade. Beachte, $g \cap g' = \emptyset$, die beiden Geraden sind parallel. Bezeichnet

$$G' = \big\{[x_0 : x_1 : x_2] : 2x_0 + x_1 - x_2 = 0\big\}$$

die entsprechende projektive Gerade, $g' = \iota^{-1}(G')$, dann gilt jedoch

$$G \cap G' = \big\{[0 : 1 : 1]\big\}.$$

In diesem Sinn haben g und g' einen Schnittpunkt im Fernen, d.h. auf der Ferngeraden. Betrachten wir eine andere Einbettung, etwa

$$\tilde\iota\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2, \qquad \tilde\iota\left(\begin{smallmatrix}x_0\\x_2\end{smallmatrix}\right) = [x_0 : 1 : x_2],$$

dann sind die entsprechenden affinen Geraden durch andere Gleichungen gegeben:

$$\tilde g := \tilde\iota^{-1}(G) = \big\{\left(\begin{smallmatrix}x_0\\x_2\end{smallmatrix}\right) : x_0 + 1 - x_2 = 0\big\},$$
$$\tilde g' := \tilde\iota^{-1}(G') = \big\{\left(\begin{smallmatrix}x_0\\x_2\end{smallmatrix}\right) : 2x_0 + 1 - x_2 = 0\big\},$$

ihr Schnittpunkt $\tilde g \cap \tilde g' = \big\{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\big\}$ liegt nun im affinen Teil.

VIII.3.14. Beispiel. Wir betrachten die affine Ebene

$$\varepsilon = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : 2 + 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0\right\}.$$

Die entsprechende projektive Ebene ist daher durch

$$E = \big\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \bigm| 2x_0 + 3x_1 + 4x_2 + 5x_4 = 0\big\}$$

gegeben, $\iota^{-1}(E) = \varepsilon$. Für die Fernpunkte von E erhalten wir

$$E \cap \mathbb{R}\mathrm{P}^2 = \big\{[0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 : 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0\big\}.$$

Die projektive Ebene zerfällt daher in die affine Ebene ε und eine projektive Gerade im Fernen. Betrachte nun die Gerade $g = \langle \left(\begin{smallmatrix}6\\7\\8\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}7\\5\\9\end{smallmatrix}\right)\rangle_{\text{aff}}$ in $\mathbb{R}^3$ und bezeichne $G \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ die entsprechende projektive Gerade, $\iota^{-1}(G) = g$. Die projektive Gerade G besteht aus der affinen Geraden g und einem Fernpunkt,

$$G \cap \mathbb{R}\mathrm{P}^2 = \big\{[0 : 1 : -2 : 1]\big\}.$$

Beachte, dass ε und g parallel sind, $\varepsilon \cap g = \emptyset$. Es gilt jedoch

$$E \cap G = \big\{[0 : 1 : -2 : 1]\big\},$$

es gibt daher einen Schnittpunkt auf der Fernebene.

Jede injektive lineare Abbildung, $\phi\colon V \to V'$, induziert eine Abbildung

$$P_\phi\colon P(V) \to P(V'), \qquad P_\phi([v]) := [\phi(v)].$$

Beachte, dass dies tatsächlich wohldefiniert ist. Offensichtlich gilt

$$P_{\mathrm{id}_V} = \mathrm{id}_{P(V)} \qquad \text{und} \qquad P_{\phi'\circ\phi} = P_{\phi'} \circ P_\phi,$$

für jede weitere injektive lineare Abbildung $\phi'\colon V' \to V''$.

VIII.3.15. Definition (Projektive Abbildungen). Seien V und V' zwei Vektorräume gleicher Dimension. Eine Abbildung $\pi\colon P(V) \to P(V')$ wird *projektiv* genannt, wenn sie von der Form $\pi = P_\phi$ ist, wobei $\phi\colon V \to V'$ ein linearer Isomorphismus ist. Unter einer *Projektivität* verstehen wir eine projektive Abbildung $\pi\colon P(V) \to P(V)$. Die Menge aller Projektivitäten bezeichnen wir mit $\mathrm{Pro}(P(V))$ oder $\mathrm{PGL}(V)$.

Beachte, dass projektive Abbildungen invertierbar sind, $(P_\phi)^{-1} = P_{\phi^{-1}}$. Insbesondere bildet die Menge der Projektivitäten bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe.

VIII.3.16. Lemma. *Die Abbildung* $\mathrm{GL}(V) \to \mathrm{Pro}(P(V))$, $\phi \mapsto P_\phi$, *ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern*

$$\big\{\phi \in \mathrm{GL}(V) : P_\phi = \mathrm{id}_{P(V)}\big\} = \big\{\lambda\,\mathrm{id}_V : \lambda \in \mathbb{K} \setminus 0\big\}.$$

Beweis. Die Inklusion $\supseteq$ offensichtlich. Für die umgekehrte Inklusion sei nun $\phi \in \mathrm{GL}(V)$ so, dass $P_\phi = \mathrm{id}_{P(V)}$. Es existieren daher Skalare $\lambda_v \in \mathbb{K}$, sodass $\phi(v) = \lambda_v v$. Aus der Linearität erhalten wir $\lambda_{\mu v}\mu v = \phi(\mu v) = \mu\phi(v) = \mu\lambda_v v$ und daher $\lambda_{\mu v} = \lambda_v$, für alle $0 \neq v \in V$ und $0 \neq \mu \in \mathbb{K}$. Weiters:

$$\lambda_{v_1+v_2}(v_1 + v_2) = \phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2) = \lambda_{v_1}v_1 + \lambda_{v_2}v_2. \tag{VIII.15}$$

Sind v_1 und v_2 linear unabhängig in V, dann folgt $\lambda_{v_1} = \lambda_{v_1+v_2} = \lambda_{v_2}$. Daraus lässt sich nun leicht schließen, dass die Skalare λ_v alle übereinstimmen. Es existiert daher $\lambda \in \mathbb{K}$, sodass $\phi(v) = \lambda v$, für alle $v \in V$. Somit gilt $\phi = \lambda\,\mathrm{id}_V$, womit auch die Inklusion $\subseteq$ gezeigt wäre. □

VIII.3.17. Proposition. *Sind V und V' zwei Vektorräume gleicher Dimension, dann gilt:*

(a) *Ist P ein projektive Teilraum von $P(V)$ und $\pi\colon P(V) \to P(V')$ eine projektive Abbildung, dann bildet $\pi(P)$ einen projektiven Teilraum von $P(V')$ und es gilt $\dim(\pi(P)) = \dim(P)$.*
(b) *Sind P und P' projektive Teilräume gleicher Dimension in $P(V)$ bzw. P' dann existiert eine projektive Abbildung $\pi\colon P(V) \to P(V')$, sodass $\pi(P) = P'$.*

Beweis. Sei $P = P(W)$ ein projektiver Teilraum von $P(V)$, wobei W einen linearen Teilraum von V bezeichnet. Weiters sei $\pi = P_\phi\colon P(V) \to P(V')$ eine projektive Abbildung., wobei $\phi\colon V \to V'$ eine invertierbare lineare Abbildung bezeichnet. Aufgrund der Linearität von ϕ gilt $\pi(P) = P(\phi(W))$. Also ist $\pi(P)$ ein projektiver Teilraum von P'. Da ϕ injektiv ist haben wir auch $\dim(\phi(W)) = \dim(W)$, also $\dim(\pi(P)) = \dim(P)$. Damit ist (a) gezeigt.

Um (b) einzusehen, seien nun W und W' lineare Teilräume in V und V', sodass $P = P(W)$ und $P' = P(W')$. Nach Voraussetzung gilt $\dim(W) = \dim(W')$. Es existiert daher eine invertierbare lineare Abbildung $\phi\colon V \to V'$, sodass $\phi(W) = W'$. Für die projektive Abbildung $\pi = P_\phi$ gilt dann $\pi(P) = P'$. $\square$

VIII.3.18. Bemerkung. Nach Proposition VIII.3.17(b) existiert eine projektive Abbildung $P(V) \to \mathbb{K}\mathrm{P}^n$, wobei $n = \dim(P(V))$. Jeder projektive Raum ist daher zu $\mathbb{K}\mathrm{P}^n$ projektiv äquivalent.

VIII.3.19. Proposition. *Sei $A \subseteq V$ eine affine Hyperebene, $0 \notin A$ und $\iota\colon A \to P(V)$ die damit assoziierte Einbettung, $P(V) = \iota(A) \sqcup P(V_A)$. Zu jedem affinen Isomorphismus $\alpha\colon A \to A$ existiert eine eindeutige Projektivität $\pi_\alpha\colon P(V) \to P(V)$, sodass $\pi_\alpha \circ \iota = \iota \circ \alpha$.[15] Darüber hinaus stimmt die Einschränkung $\pi_\alpha|_{P(V_A)}\colon P(V_A) \to P(V_A)$ mit P_{ϕ_α} überein, wobei $\phi_\alpha\colon V_A \to V_A$ den linearen Teil von α bezeichnet. Wir erhalten so einen injektiven Gruppenhomomorphismus*

$$\mathrm{Aff}(A) \to \mathrm{Pro}(P(V)), \qquad \alpha \mapsto \pi_\alpha,$$

dessen Bild aus genau jenen Projektivitäten besteht, die $\iota(A)$ auf $\iota(A)$, oder äquivalent $P(V_A)$ auf $P(V_A)$, abbilden.

Beweis. Sei $\alpha\colon A \to A$ ein affiner Isomorphismus. Dann existiert ein eindeutiger affiner Isomorphismus $\phi\colon V \to V$, sodass $\phi|_A = \alpha$ und $\phi(0) = 0$, siehe Beispiel VIII.1.30. Aufgrund der zweiten Bedingung ist ϕ linear. Somit ist $\pi_\alpha := P_\phi$ eine Projektivität für die $\pi_\alpha \circ \iota = \iota \circ \alpha$ gilt. Offensichtlich gilt für den linearen Teil, $\phi_\alpha\colon V_A \to V_A$, von α auch $\phi_\alpha = \phi|_{V_A}$ und daher $\pi_\alpha|_{P(V_A)} = P_\phi|_{P(V_A)} = P_{\phi|_{V_A}} = P_{\phi_\alpha}\colon P(V_A) \to P(V_A)$. Darüber hinaus gilt $\pi_{\alpha' \circ \alpha} = \pi_{\alpha'} \circ \pi_\alpha$, also ist die Zuordnung $\alpha \mapsto \pi_\alpha$ ein Gruppenhomomorphismus und offensichtlich auch injektiv.

[15] Unterdrücken wir die Einbettung $\iota\colon A \to P(V)$ und fassen A als Teilmenge von $P(V)$ auf, dann bedeuted diese Gleichung gerade $\pi_\alpha|_A = \alpha$, d.h. π_α ist eine (projektive) Fortsetzung der affinen Abbildung α.

Schließlich ist noch zu zeigen, dass jede Projektivität $\pi\colon P(V) \to P(V)$, die $P(V_A)$ auf $P(V_A)$ abbildet von der Form $\pi = \pi_\alpha$ ist, wobei $\alpha \in \mathrm{Aff}(A)$. Nach Voraussetzung ist $\pi = P_\phi$, wobei $\phi \in \mathrm{GL}(V)$ und $\phi(V_A) = V_A$. Wir fixieren einen Punkt $a \in A$. Da $\phi(a) \notin V_A$ existiert $\lambda \in \mathbb{K}$, sodass $\lambda\phi(a) \in A$. O.B.d.A. dürfen wir daher $\phi(a) \in A$ annehmen. Daraus folgt $\phi(A) = \phi(a + V_A) = \phi(a) + \phi(V_A) = \phi(a)+V_A = A$. Wir schließen, dass die Einschränkung von ϕ einen affinen Isomorphismus $\alpha := \phi|_A\colon A \to A$ definiert. Nach Konstruktion gilt $\pi_\alpha = P_\phi = \pi$.

Lässt die Projektivität π alle Punkt in $\iota(A)$ fest, d.h. $\pi \circ \iota = \iota$, dann folgt aus obigen Betrachtungen sofort $\pi = P_{\mathrm{id}_V} = \mathrm{id}_{P(V)}$. Dies zeigt, dass die Projektivität π durch die Gleichung $\pi \circ \iota = \iota \circ \alpha$ eindeutig bestimmt ist. □

VIII.3.20. Beispiel. Seien $\iota\colon A \to P(V)$ und $P(V) = \iota(A) \sqcup P(V_A)$ wie oben. Betrachte eine Translation $\tau \in \mathrm{Aff}(A)$. Die Projektivität $\pi_\tau\colon P(V) \to P(V)$ lässt dann alle Punkte der Fernhyperebene $P(V_A)$ fest. Dies folgt aus Proposition VIII.3.19, denn für den linearen Teil einer Translation gilt $\phi_\tau = \mathrm{id}_{V_A}$. Umgekehrt muss eine Projektivität, die alle Punkte der Fernhyperebene festlässt, eine affine Abbildung mit linearem Teil $\lambda\,\mathrm{id}_{V_A}$ sein, siehe Lemma VIII.3.16. Die Projektivität, die die Fernhyperebene punktweise festlassen sind daher genau die Kompositionen von Translationen und Streckungen.

Ist $\alpha\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ein affiner Isomorphismus, $\alpha(x) = Ax+b$, wobei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $b \in \mathbb{K}^n$, dann wird die entsprechende Projektivität $\pi_\alpha\colon \mathbb{KP}^n \to \mathbb{KP}^n$ durch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$ repräsentiert. Die auf der Fernhyperebene induzierte Projektivität, $\pi_\alpha|_{\mathbb{KP}^{n-1}}\colon \mathbb{KP}^{n-1} \to \mathbb{KP}^{n-1}$, ist durch die Matrix A gegeben.

Sei nun $\pi\colon \mathbb{KP}^n \to \mathbb{KP}^n$ eine beliebige Projektivität und

$$\begin{pmatrix} d & c^t \\ b & A \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$$

eine Matrix die π darstellt, $d \in \mathbb{K}$, $b, c \in \mathbb{K}^n$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Die nur teilweise definierte Einschränkung auf den affinen Teil, $\mathbb{K}^n \subseteq \mathbb{KP}^n$, ist durch eine rationale Funktion gegeben,

$$x \mapsto \frac{1}{c^t x + d}(Ax + b), \qquad x \in \mathbb{K}^n.$$

Die affine Hyperebene auf der der Nenner verschwindet, $\{x \in \mathbb{K}^n : c^t x + d = 0\}$, besteht genau aus jenen Punkten die durch π auf die Fernhyperebene abgebildet werden. Insbesonder sind die Projektivitäten $\pi\colon \mathbb{KP}^1 \to \mathbb{KP}^1$ auf dem affinen Teil $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{KP}^1$ genau die rationalen Abbildungen der Form

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}, \qquad x \in \mathbb{K}.$$

wobei $ad - bc \neq 0$.

VIII.3.21. Beispiel. Die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ stellt eine Projektivität $\pi\colon \mathbb{KP}^1 \to \mathbb{KP}^1$ dar. Diese lässt den Punkt $\iota(1) = [1 : 1]$ fest und vertauscht $\iota(0) = [1 : 0]$ mit dem Fernpunkt $[0 : 1]$. Auf dem affinen Teil ist sie durch $x \mapsto x^{-1}$ gegeben.

Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\dim(P(V)) \geq 2$, dann können die Projektivitäten auf $P(V)$ auch als jene Bijektionen charakterisiert werden, die projektive Geraden auf projektive Geraden abbilden. Genauer haben wir:

VIII.3.22. Satz (Fundamentalsatz der projektiven Geometrie). *Sei V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum und* $\dim(P(V)) \geq 2$. *Dann ist jede projektive Kollineation, d.h. jede Bijektion $\pi\colon P(V) \to P(V)$, die projektive Geraden auf projektive Geraden abbildet, eine Projektivität.*

Beweis. Wir werden dies auf den Fundamentalsatz der affinen Geometrie zurückführen, siehe Satz VIII.1.32. Wir zeigen zunächst, dass π auch k-dimensionale projektive Teilräume auf k-dimensionale projektive Teilräume abbildet. Wir zeigen dies mittels Induktion nach k. Die Fälle $k = -1$ und $k = 0$ sind trivial.[16] Für den Induktionsschritt sei nun P ein k-dimensionaler projektiver Teilraum von $P(V)$ und $k \geq 1$. Wähle einen $(k-1)$-dimensionalen projektiven Teilraum $P' \subseteq P$ und einen Punkt $p \in P \setminus P'$. Jede projektive Gerade in P, die p enthält, muss P' schneiden, siehe Beispiel VIII.3.7. Es gilt daher

$$P = \bigcup_{p' \in P'} \langle p, p' \rangle_{\mathrm{proj}}.$$

Da π projektive Geraden auf projektive Geraden abbildet, folgt

$$\pi(P) = \bigcup_{p' \in P'} \pi\big(\langle p, p' \rangle_{\mathrm{proj}}\big) = \bigcup_{p' \in P'} \langle \pi(p), \pi(p') \rangle_{\mathrm{proj}} = \bigcup_{\tilde{p}' \in \pi(P')} \langle \pi(p), \tilde{p}' \rangle_{\mathrm{proj}}.$$

Nach Induktionsvoraussetzung bildet $\pi(P')$ einen $(k-1)$-dimensionalen projektiven Teilraum von $P(V)$. Da $\pi(p) \notin \pi(P')$ folgt aus obiger Darstellung, dass $\pi(P)$ einen k-dimensionalen projektiven Teilraum bildet.

Sei nun $A \subseteq V$ eine affine Hyperebene, $0 \notin A$ und $P(V) = \iota(A) \sqcup P(V_A)$ die damit assoziierte Zerlegung. Nach dem vorangehenden Absatz ist $\pi(P(V_A))$ eine projektive Hyperebene. Nach Proposition VIII.3.17(b) existiert eine Projektivität $\pi'\colon P(V) \to P(V)$, sodass $\pi'(\pi(P(V_A))) = P(V_A)$. O.B.d.A. dürfen wir daher annehmen, dass π die Fernhyperebene bewahrt, d.h. $\pi(P(V_A)) = P(V_A)$. Es existiert daher eine Bijektion $\alpha\colon A \to A$, sodass $\pi \circ \iota = \iota \circ \alpha$. Da π projektive Geraden auf projektive Geraden abbildet, muss α affine Geraden auf affine Geraden Abbilden, siehe Proposition VIII.3.11. Nach dem Fundamentalsatz der affinen Geometrie ist α daher ein affiner Isomorphismus, siehe Satz VIII.1.32. Nach Proposition VIII.3.19 existiert eine Projektivität $\pi''\colon P(V) \to P(V)$, sodass $\pi'' \circ \iota = \iota \circ \alpha$. O.B.d.A. dürfen wir daher $\pi|_{\iota(A)} = \mathrm{id}_{\iota(A)}$ annehmen. Jeder Punkt in $P(V_A)$ lässt sich als Schnittpunkt zweier verschiedener projektiver Geraden schreiben, die nicht zur Gänze in $P(V_A)$ liegen. Da π projektive Geraden auf projektive Geraden abbildet, und weil $\pi|_{\iota(A)} = \mathrm{id}_{\iota(A)}$, muss π auch alle Punkte in $P(V_A)$ fest lassen, d.h. $\pi|_{P(V_A)} = \mathrm{id}|_{P(V_A)}$. Somit $\pi = \mathrm{id}_{P(V)}$. □

[16] Der Fall $k = 1$ ist unsere Voraussetzung an π.

Wir betrachten wieder einen allgemeinen Körper $\mathbb{K}$.

Eine projektive Abbildung $\pi\colon P(V) \to P(V')$ ist durch die Bilder von $n+1$ Punkten noch nicht eindeutig bestimmt, $n = \dim(P(V)) = \dim(P(V'))$. Etwa liefert die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$, wobei $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, eine Projektivität $\pi\colon \mathbb{K}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{K}\mathrm{P}^1$, mit

$$\pi([1:0]) = [1:0], \qquad \pi([0:1]) = [0:1], \qquad \pi([1:1]) = [1:\lambda].$$

Ist darüber hinaus $\lambda \neq 1$, dann gilt $\pi([1:1]) \neq [1:1])$, also $\pi \neq \mathrm{id}_{\mathbb{K}\mathrm{P}^1}$. Die Einschränkung auf den affinen Teil ist in diesem Fall eine Streckung, $x \mapsto \lambda x$.

VIII.3.23. Definition (Projektive Bezugssysteme). Sei $P(V)$ ein projektiver Raum und $n = \dim(P(V))$. Punkte $P_0, \dots, P_{n+1} \in P(V)$ werden als *projektives Bezugssystem* bezeichnet, falls die projektive Hülle von je $n+1$ dieser Punkte mit $P(V)$ übereinstimmt. In diesem Fall sagen wir auch die Punkte $P_0, \dots, P_{n+1}$ sind in *allgemeiner Lage*.

VIII.3.24. Lemma. *Seien $v_0, \dots, v_{n+1} \in V \setminus 0$, wobei $n = \dim(P(V))$. Dann sind äquivalent:*

(a) Die Punkte $[v_0], \dots, [v_{n+1}]$ bilden ein projektives Bezugssystem von $P(V)$.
(b) Je $n+1$ der Vektoren $v_0, \dots, v_{n+1}$ bilden eine Basis von V.
(c) $v_0, \dots, v_n$ ist eine Basis von V und in der Darstellung $v_{n+1} = \sum_{i=0}^n \mu_i v_i$ sind alle Koeffizienten verschieden von Null, d.h. $\mu_i \neq 0$ für alle, $i = 0, \dots, n$.

Beweis. Sind $w_0, \dots, w_n \in V \setminus 0$, dann gilt

$$\langle [w_0], \dots, [w_n] \rangle_{\mathrm{proj}} = P\big(\langle w_0, \dots, w_n \rangle_{\mathrm{lin}}\big).$$

Es gilt daher $\langle [w_0], \dots, [w_n] \rangle_{\mathrm{proj}} = P(V)$ genau dann wenn $w_0, \dots, w_n$ eine Basis von V bilden. Daraus folgt die Äquivalenz der ersten beiden Aussagen.

In der Darstellung $v_{n+1} = \sum_{i=0}^n \mu_i v_i$ müssen alle $\mu_i \neq 0$ sein, denn andernfalls wären die restlichen $n+1$ Vektoren v_i linear abhängig. Es gilt daher (b)$\Rightarrow$(c). Die Implikation (c)$\Rightarrow$(b) folgt daraus, dass je $n+1$ der Vektoren $v_0, \dots, v_{n+1}$ ein Erzeugendensystem von V bilden. $\square$

VIII.3.25. Beispiel. Die Punkte

$$P_0 = [1:0:\cdots:0], \dots, P_n = [0:\cdots:0:1], P_{n+1} = [1:1:\cdots:1]$$

bilden ein projektives Bezugssystem von $\mathbb{K}\mathrm{P}^n$.

VIII.3.26. Beispiel. Drei Punkte einer projektiven Gerade bilden genau dann ein projektives Bezugssystem, wenn sie paarweise verschieden sind.

VIII.3.27. Proposition. *Ist $\dim(P(V)) = n = \dim(P(V'))$ dann gilt:*

(a) Bilden die Punkte $P_0, \dots, P_{n+1}$ ein projektives Bezugssytem von $P(V)$ und ist $\pi\colon P(V) \to P(V')$ eine projektive Abildung, dann bilden auch die Punkte $\pi(P_0), \dots, \pi(P_{n+1})$ ein projektives Bezugssystem von $P(V')$.
(b) Sind $P_0, \dots, P_{n+1}$ und $P'_0, \dots, P'_{n+1}$ projektive Bezugssysteme von $P(V)$ bzw. $P(V')$, dann existiert eine eindeutige projektive Abbildung $\pi\colon P(V) \to P(V')$, sodass $\pi(P_i) = P'_i$, für alle $i = 0, \dots, n+1$.

Beweis. Die erste Aussage ist offensichtlich.

Wir werden nun die Existenz einer projektiven Abbildung $\pi\colon P(V) \to P(V')$ mit $\pi(P_i) = P'_i$ zeigen. Wir wählen dazu Vektoren $0 \neq v_i \in V$ und $0 \neq v'_i \in V'$, sodass $P_i = [v_i]$ und $P'_i = [v'_i]$, $i = 0, \dots, n+1$. Nach Lemma VIII.3.24 bilden $v_0, \dots, v_n$ und $v'_0, \dots, v'_n$ Basen von V bzw. V' und existieren Skalare $0 \neq \mu_i \in \mathbb{K}$ und $0 \neq \mu'_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, \dots, n$, sodass

$$v_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \mu_i v_i \qquad \text{und} \qquad v'_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \mu'_i v'_i.$$

Es bezeichne $\phi\colon V \to V'$ die eindeutige lineare Abbildung mit

$$\phi(v_i) = \frac{\mu'_i}{\mu_i} v'_i, \qquad i = 0, \dots, n.$$

Da ϕ die Basis $v_0, \dots, v_n$ auf eine Basis von V' abbildet, ist ϕ invertierbar. Nach Konstruktion gilt weiters

$$\phi(v_{n+1}) = \phi\big(\textstyle\sum_{i=0}^n \mu_i v_i\big) = \sum_{i=0}^n \mu_i \phi(v_i) = \sum_{i=0}^n \mu'_i v'_i = v'_{n+1}.$$

Die damit assoziierte projektive Abbildung, $\pi = P_\phi\colon P(V) \to P(V')$, erfüllt daher $\pi(P_i) = P'_i$, für alle $i = 0, \dots, n+1$.

Schließlich widmen wir uns der Eindeutigkeit der projektiven Abbildung. Es genügt zu zeigen, dass eine Projektivität $\pi\colon P(V) \to P(V)$, die die Punkte P_i alle festlässt, d.h. $\pi(P_i) = P_i$, $i = 0, \dots, n+1$, schon die identische Abbildung sein muss, $\pi = \mathrm{id}_{P(V)}$. Wie zuvor seien $0 \neq v_i \in V$, sodass $P_i = [v_i]$, $i = 0, \dots, n+1$ und $0 \neq \mu_i \in \mathbb{K}$ mit $v_{n+1} = \sum_{i=0}^n \mu_i v_i$. Weiters sei $\phi \in \mathrm{GL}(V)$, sodass $\pi = P_\phi$. Nach Voraussetzung existieren daher $0 \neq \lambda_i \in \mathbb{K}$, sodass $\phi(v_i) = \lambda_i v_i$, für $i = 0, \dots, n+1$. Aus der Linearität von ϕ erhalten wir

$$\textstyle\sum_{i=0}^n \lambda_{n+1} \mu_i v_i = \lambda_{n+1} v_{n+1} = \phi(v_{n+1}) = \phi\big(\sum_{i=0}^n \mu_i v_i\big) = \sum_{i=0}^n \mu_i \lambda_i v_i.$$

Da $v_0, \dots, v_n$ eine Basis von V bildet folgt $\mu_i \lambda_{n+1} = \mu_i \lambda_i$ und dann $\lambda_{n+1} = \lambda_i$, für alle $i = 0, \dots, n$, denn $\mu_i \neq 0$. Somit stimmen alle λ_i überein, also $\phi = \lambda\, \mathrm{id}_V$ und daher $\pi = P_\phi = \mathrm{id}_{P(V)}$. □

VIII.3.28. Beispiel. Ist $P_0, \dots, P_{n+1}$ ein projektives Bezugssystem von $P(V)$, dann existiert eine eindeutige projektive Abbildung $\pi\colon \mathbb{K}\mathrm{P}^n \to P(V)$, sodass:

$$\begin{aligned} \pi([1:0:\cdots:0]) &= P_0 \\ &\vdots \\ \pi([0:\cdots:0:1]) &= P_n \\ \pi([1:1:\cdots:1]) &= P_{n+1}. \end{aligned}$$

VIII.3.29. Definition (Doppelverhältnis). Seien P_0, P_1, P_2, P_3 vier Punkte auf einer projektiven Gerade G, sodass P_0, P_1, P_2 paarweise verschieden sind. Weiters sei $\pi\colon \mathbb{K}\mathrm{P}^1 \to G$ die eindeutige projektive Abbildung mit

$$\pi([1:0]) = P_0, \quad \pi([0:1]) = P_1 \quad \text{und} \quad \pi([1:1]) = P_2.$$

Bezeichnet $[x_0 : x_1] \in \mathbb{K}\mathrm{P}^1$ jenen Punkt mit $\pi([x_0 : x_1]) = P_3$, dann wird

$$\mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3) := \frac{x_1}{x_0} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

als Doppelverhältnis der Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 bezeichnet. Beachte, dass dieser Quotient wohldefiniert ist, denn x_0 und x_1 sind bis auf ein gemeinsames Vielfaches bestimmt. Falls $x_0 = 0$, dann ist dies als $\frac{x_1}{x_0} = \infty$ zu verstehen.

VIII.3.30. Beispiel. Vermöge der Einbettung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}\mathrm{P}^1$, $x \mapsto [1 : x]$, ist

$$\mathbb{K}\mathrm{P}^1 = \mathbb{K} \cup \{\infty\},$$

wobei $\infty := [0 : 1] \in \mathbb{K}\mathrm{P}^1$ den Fernpunkt bezeichnet. Für jedes $x \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ gilt

$$\mathrm{DV}(0, \infty, 1, x) = x.$$

VIII.3.31. Beispiel. Seien P_0, P_1, P_2 drei paarweise verschiedene Punkte einer projektiven Gerade. Dann gilt:

$$\mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_0) = 0, \quad \mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_1) = \infty, \quad \mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_2) = 1.$$

VIII.3.32. Beispiel. Seien P_0, P_1, P_2, P_3 vier paarweise verschiedene Punkte einer projektiven Gerade. Dann gilt:

$$\mathrm{DV}(P_1, P_0, P_2, P_3) = \frac{1}{\mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3)} = \mathrm{DV}(P_0, P_1, P_3, P_2)$$

sowie

$$\mathrm{DV}(P_2, P_1, P_0, P_3) = 1 - \mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3) = \mathrm{DV}(P_0, P_3, P_2, P_1)$$

siehe Aufgabe 46. Da diese Transpositionen die Gruppe $\mathfrak{S}_4$ erzeugen, lässt sich damit $\mathrm{DV}(P_{\sigma(0)}, P_{\sigma(1)}, P_{\sigma(2)}, P_{\sigma(3)})$ für jede Permutation σ aus $\mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3)$ berechnen.

Projektive Abbildungen bewahren das Doppelverhältnis:

VIII.3.33. Proposition. *Sei $\pi\colon P(V) \to P(V')$ eine projektive Abbildung. Weiters seien P_0, P_1, P_2, P_3 vier Punkt auf einer projektiven Gerade in $P(V)$, sodass die Punkte und P_0, P_1, P_2 paarweise verschieden sind. Dann liegen auch die Bildpunkte $\pi(P_0), \pi(P_1), \pi(P_2), \pi(P_3)$ auf einer projektiven Gerade in $P(V')$, die Punkte $\pi(P_0), \pi(P_1), \pi(P_2)$ sind paarweise verschieden und für das Doppelverhältnis gilt*

$$\mathrm{DV}\big(\pi(P_0), \pi(P_1), \pi(P_2), \pi(P_3)\big) = \mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3).$$

Beweis. Es bezeichne G die eindeutige projektive Gerade in $P(V)$, die die Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 enthält. Weiters sei $\tilde{\pi}\colon \mathbb{K}\mathrm{P}^1 \to G$ die eindeutige projektive Abbildung mit

$$\tilde{\pi}([1 : 0]) = P_0, \quad \tilde{\pi}([0 : 1]) = P_1 \quad \text{und} \quad \tilde{\pi}([1 : 1]) = P_2$$

und $\tilde{\pi}([x_0 : x_1]) = P_3$, also $\mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3) = \frac{x_1}{x_0}$. Es ist dann $G' := \pi(G)$ die eindeutige projektive Gerade in $P(V')$, die die Punkte $\pi(P_0)$, $\pi(P_1)$, $\pi(P_2)$, $\pi(P_3)$

enthält. Weiters ist $\tilde{\pi}' := \pi \circ \tilde{\pi}\colon \mathbb{K}\mathrm{P}^1 \to G'$ die eindeutige projektive Abbildung, für die

$$\tilde{\pi}'([1:0]) = \pi(P_0), \quad \tilde{\pi}'([0:1]) = \pi(P_1) \quad \text{und} \quad \tilde{\pi}'([1:1]) = \pi(P_2)$$

gilt. Darüber hinaus haben wir $\tilde{\pi}'([x_0 : x_1]) = \pi\big(\tilde{\pi}([x_0 : x_1])\big) = \pi(P_3)$ und daher $\mathrm{DV}\big(\pi(P_0), \pi(P_1), \pi(P_2), \pi(P_3)\big) = \frac{x_1}{x_0} = \mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3)$. □

VIII.3.34. Proposition. *Seien $P_0 = [x_0 : y_0]$, $P_1 = [x_1 : y_1]$, $P_2 = [x_2 : y_2]$, $P_3 = [x_3 : y_3]$ vier Punkte in $\mathbb{K}\mathrm{P}^1$, sodass P_0, P_1, P_2 paarweise verschieden sind. Dann gilt für ihr Doppelverhältnis*

$$\mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3) = \frac{\left|\begin{smallmatrix} x_0 & x_3 \\ y_0 & y_3 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} x_0 & x_2 \\ y_0 & y_2 \end{smallmatrix}\right|} : \frac{\left|\begin{smallmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{smallmatrix}\right|}$$

Beweis. Aus der Cramer'schen Regel erhalten wir

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\mu_0 = \begin{vmatrix} x_2 & x_1 \\ y_2 & y_1 \end{vmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mu_1 = \begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ y_0 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \mu_0 x_0 & \mu_1 x_1 \\ \mu_0 y_0 & \mu_1 y_1 \end{pmatrix}$$

repräsentiert daher eine Projektivität $\pi\colon \mathbb{K}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{K}\mathrm{P}^1$, sodass $\pi([1:0]) = P_0$, $\pi([0:1]) = P_1$ und $\pi([1:1]) = P_2$. Nochmaliges Anwenden der Cramer'schen Regel liefert

$$\det(A) \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \lambda_0 \begin{pmatrix} \mu_0 x_0 \\ \mu_0 y_0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} \mu_1 x_1 \\ \mu_1 y_1 \end{pmatrix},$$

wobei

$$\lambda_0 = \begin{vmatrix} x_3 & \mu_1 x_1 \\ y_3 & \mu_1 y_1 \end{vmatrix} \qquad \text{und} \qquad \lambda_1 = \begin{vmatrix} \mu_0 x_0 & x_3 \\ \mu_0 y_0 & y_3 \end{vmatrix},$$

d.h. $\pi([\lambda_0 : \lambda_1]) = P_3$. Für das Doppelverhältnis erhalten wir

$$\mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3) = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{\mu_0 \left|\begin{smallmatrix} x_0 & x_3 \\ y_0 & y_3 \end{smallmatrix}\right|}{\mu_1 \left|\begin{smallmatrix} x_3 & x_1 \\ y_3 & y_1 \end{smallmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{smallmatrix} x_0 & x_3 \\ y_0 & y_3 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} x_0 & x_2 \\ y_0 & y_2 \end{smallmatrix}\right|} : \frac{\left|\begin{smallmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{smallmatrix}\right|},$$

wie behauptet. □

VIII.3.35. Beispiel. Sind $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{K}$ und bezeichnen

$$P_i = \iota(x_i) = [1 : x_i] \in \mathbb{K}\mathrm{P}^1$$

die entsprechenden Punkte in $\mathbb{K}\mathrm{P}^1$, dann gilt

$$\mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3) = \frac{x_0 - x_3}{x_1 - x_3} : \frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2}.$$

Dies folgt aus der vorangehenden Proposition.

VIII.3.36. Bemerkung (Teilverhältnis). Seien p_0 und p_1 zwei verschiedene Punkte auf einer affinen Geraden G. Es existiert daher ein eindeutiger affiner Isomorphismus $\alpha\colon \mathbb{K} \to G$, sodass $\alpha(0) = p_0$ und $\alpha(1) = p_1$, nämlich $\alpha(x) = p_0 + x(p_1 - p_0)$. Ist p_2 ein weiterer Punkt auf G, dann wird der eindeutig bestimmte Skalar $x \in \mathbb{K}$ mit $\alpha(x) = p_2$ als *Teilverhältnis*[17] *der Punkte* p_0, p_1, p_2 bezeichnet,

$$\mathrm{TV}(p_0, p_1, p_2) := \frac{p_2 - p_0}{p_1 - p_0}.$$

Beachte

$$\mathrm{TV}(p_0, p_1, p_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathrm{TV}(p_0, p_1, p_1) = 1,$$

sowie

$$\mathrm{TV}(p_0, p_2, p_1) = \frac{1}{\mathrm{TV}(p_0, p_1, p_2)} \quad \text{und} \quad \mathrm{TV}(p_1, p_0, p_2) = 1 - \mathrm{TV}(p_0, p_1, p_2).$$

Offensichtlich haben wir auch:

$$\mathrm{TV}(p_0, p_1, p_3) = \mathrm{TV}(p_0, p_1, p_2) \cdot \mathrm{TV}(p_0, p_2, p_3). \tag{VIII.16}$$

Für die Punkte 0, 1 und x auf der affinen Geraden $\mathbb{K}$ gilt

$$\mathrm{TV}(0, 1, x) = x.$$

Ist G' eine weitere affine Gerade und $\alpha\colon G \to G'$ ein affiner Isomorphismus, dann

$$\mathrm{TV}\big(\alpha(p_0), \alpha(p_1), \alpha(p_2)\big) = \mathrm{TV}(p_0, p_1, p_2),$$

d.h. affine Abbildungen bewahren das Teilverhältnis. Ist $P = G \cup \{\infty\}$ eine projektive Gerade und $p_i \in G$, dann gilt

$$\mathrm{TV}(p_0, p_1, p_2) := \mathrm{DV}(p_0, \infty, p_1, p_2)$$

und aus der vorangehenden Beispiel folgt

$$\mathrm{DV}(p_0, p_1, p_2, p_3) = \frac{\mathrm{TV}(p_3, p_1, p_0)}{\mathrm{TV}(p_2, p_1, p_0)}.$$

Der letzten Gleichung verdankt das Doppelverhältnis seinen Namen.

VIII.3.37. Proposition. *Seien G_0, G_1, G_2, G_3 vier verschiedene projektive Geraden in einer projektiven Ebene E, die sich alle im Punkt P schneiden. Seien G und G' zwei weitere projektive Geraden in E, die P nicht enthalten. Weiters bezeichne P_i den eindeutigen Schnittpunkt von G mit G_i sowie P'_i den eindeutigen Schnittpunkt von G' mit G_i. Dann gilt*

$$\mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3) = \mathrm{DV}(P'_0, P'_1, P'_2, P'_3).$$

[17] In der Literatur finden sich auch andere Konventionen.

Beweis. Nach Proposition VIII.3.33 genügt es eine Projektivität $\pi\colon E \to E$ zu konstruieren, sodass $\pi(P_i) = P_i'$, $i = 0, \ldots, 3$. Dafür wiederum genügt es eine Projektivität π zu konstruieren, sodass $\pi(G) = G'$ und $\pi(H) = H$, für jede projektive Gerade H durch P. Es bezeichne F die Gerade durch P und den Schnittpunkt von G und G'. Wir betrachten nun den affinen Raum $A := E \setminus F$. Nach Konstruktion sind die Geraden G und G' parallel in A, denn sie haben keinen Schnittpunkt in A. Nach Konstruktion sind auch alle Geraden durch P in A parallel. Eine geeignete Translation in Richtung dieser Geraden wird G auf G' abbilden und hat daher die gewünschte Eigenschaft. □

Für zwei verschiedene Punkte p und q eines affinen Raums bezeichnen wir die von ihnen aufgespannte Gerade mit $\overline{pq} := \langle\{p, q\}\rangle_{\text{aff}}$. Der Strahlensatz, siehe Aufgabe 23, lässt sich wie folgt reformulieren:

VIII.3.38. Proposition (Strahlensatz). *Seien g_1 und g_2 zwei verschiedene affine Geraden in einer affinen Ebene. Weiters seien p_1, q_1 zwei verschiedene Punkte auf g_1 und p_2, q_2 zwei verschieden Punkte auf g_2.*

a) Schneiden sich g_1 und g_2 in einem Punkt o und sind p_1, p_2, q_1, q_2 alle verschieden von o dann gilt:

$$\overline{p_1p_2} \parallel \overline{q_1q_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{TV}(o, p_1, q_1) = \mathrm{TV}(o, p_2, q_2).$$

b) Haben g_1 und g_2 keinen Schnittpunkt dann gilt:

$$\overline{p_1p_2} \parallel \overline{q_1q_2} \qquad \Leftrightarrow \qquad q_1 - p_1 = q_2 - p_2.$$

Daraus erhalten wir sofort:

VIII.3.39. Proposition (Satz von Desargues, affine Version). *Seien g_1, g_2, g_3 drei verschiedene affine Geraden in einer affinen Ebene, die sich entweder in einem Punkt o schneiden oder alle parallel sind. Weiters seien p_i und q_i verschiedene Punkte auf g_i, die im Fall $g_1 \cap g_2 \cap g_3 = \{o\}$ auch alle verschieden von o sein sollen, $i = 1, 2, 3$. Dann gilt:*

$$\overline{p_1p_2} \parallel \overline{q_1q_2} \quad \textit{und} \quad \overline{p_2p_3} \parallel \overline{q_2q_3} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{p_1p_3} \parallel \overline{q_1q_3}.$$

Für zwei verschiedene Punkte P und Q eines projektiven Raums bezeichnen wir die von ihnen aufgespannte Gerade ebenfalls mit $\overline{PQ} := \langle\{P, Q\}\rangle_{\text{proj}}$.

VIII.3.40. Satz (Satz von Desargues). *Seien G_1, G_2, G_3 drei verschiedene projektive Geraden in einer projektiven Ebene E, die sich in einem Punkt o schneiden. Weiters seien P_i und Q_i verschiedene Punkte auf G_i, die auch alle verschieden von o sein sollen, $i = 1, 2, 3$. Dann liegen die Schnittpunkte*

$$R_3 := \overline{P_1P_2} \cap \overline{Q_1Q_2}, \quad R_1 := \overline{P_2P_3} \cap \overline{Q_2Q_3} \quad \textit{und} \quad R_2 := \overline{P_1P_3} \cap \overline{Q_1Q_3}$$

auf einer Geraden.

Beweis. Es bezeichne F die eindeutige Gerade durch R_3 und R_1. Wir betrachten nun den affinen Raum $A := E \setminus F$. Nach Konstruktion sind die Geraden $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{Q_1Q_2}$ in A parallel. Ebenso sind die Geraden $\overline{P_2P_3}$ und $\overline{Q_2Q_3}$ in A parallel. Nach Proposition VIII.3.39 sind dann auch die Geraden $\overline{P_1P_3}$ und $\overline{Q_1Q_3}$ parallel in A, ihr Schnittpunkt R_2 liegt daher ebenfalls in F. Dies zeigt, dass die Punkte R_1, R_2, R_3 alle auf der Geraden F liegen. □

VIII.3.41. Proposition (Satz von Pappos, affine Version). *Seien g und g' zwei verschiedene affine Geraden in einer affinen Ebene. Weiters seien p_1, p_2, p_3 verschiedene Punkte auf g und p'_1, p'_2, p'_3 verschiedene Punkte auf g'. Schneiden sich g und g' in einem Punkt o, dann seien die Punkte p_i und p'_i auch alle verschieden von o, $i = 1, 2, 3$. In dieser Situation gilt:*

$$\overline{p_1p'_3} \parallel \overline{p_3p'_1} \quad \textit{und} \quad \overline{p_1p'_2} \parallel \overline{p_2p'_1} \qquad \Rightarrow \qquad \overline{p_2p'_3} \parallel \overline{p_3p'_2}.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall wo sich g und g' in einem Punkt o schneiden. Aus dem Strahlensatz erhalten wir

$$\mathrm{TV}(o, p_1, p_3) = \mathrm{TV}(o, p'_3, p'_1) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{TV}(o, p_1, p_2) = \mathrm{TV}(o, p'_2, p'_1).$$

Mit (VIII.16) folgt:

$$\mathrm{TV}(o, p_2, p_3) = \frac{\mathrm{TV}(o, p_1, p_3)}{\mathrm{TV}(o, p_1, p_2)} = \frac{\mathrm{TV}(o, p'_3, p'_1)}{\mathrm{TV}(o, p'_2, p'_1)} = \mathrm{TV}(o, p'_3, p'_2).$$

Nach dem Strahlensatz sind die Geraden $\overline{p_2p'_3}$ und $\overline{p_3p'_2}$ daher parallel. Haben die beiden Geraden g und g' keinen Schnittpunkt, dann gilt

$$p_3 - p_1 = p'_1 - p'_3 \qquad \text{und} \qquad p_2 - p_1 = p'_1 - p'_2$$

und daher $p_3 - p_2 = p'_2 - p'_3$. Wieder folgt, dass $\overline{p_2p'_3}$ und $\overline{p_3p'_2}$ parallel sind. □

VIII.3.42. Satz (Satz von Pappos). *Seien G und G' zwei verschiedene projektive Geraden in einer projektiven Ebene E, die sich im Punkt o schneiden. Weiters seien P_1, P_2, P_3 verschiedene Punkte auf G und P'_1, P'_2, P'_3 verschiedene Punkte auf G', die auch alle verschieden von o seien sollen, $i = 1, 2, 3$. Dann liegen die Schnittpunkte*

$$R_2 := \overline{P_1P'_3} \cap \overline{P_3P'_1}, \quad R_3 := \overline{P_1P'_2} \cap \overline{P_2P'_1} \quad \textit{und} \quad R_1 := \overline{P_2P'_3} \cap \overline{P_3P'_2}$$

auf einer Geraden.

Beweis. Es bezeichne F die eindeutige Gerade durch R_2 und R_3. Wir betrachten wieder den affinen Raum $A := E \setminus F$. Nach Konstruktion sind die Geraden $\overline{P_1P'_3}$ und $\overline{P_3P'_1}$ parallel in A, und auch die Geraden $\overline{P_1P'_2}$ und $\overline{P_2P'_1}$ sind parallel in A. Nach Proposition VIII.3.41 sind daher auch $\overline{P_2P'_3}$ und $\overline{P_3P'_2}$ parallel in A, ihr Schnittpunkt R_1 liegt also in F. Dies zeigt, dass die drei Punkte R_1, R_2, R_3 alle auf der Geraden F liegen. □

VIII.3.43. Definition (Dualität). Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Ist $P = P(W)$ ein projektiver Teilraum in $P(V)$, dann wird $P^\circ := P(W^\circ)$ der zu P duale projektive Teilraum von $P(V^*)$ genannt. Hier bezeichnet $W^\circ \subseteq V^*$ den Annihilator des linearen Teilraums $W \subseteq V$, d.h. $W^\circ = \{\alpha \in V^* : \alpha|_W = 0\}$.

VIII.3.44. Lemma. *Seien P und Q projektive Teilräume von $P(V)$. Dann gilt:*

(a) $\dim(P) + \dim(P^\circ) + 1 = \dim(P(V)) = \dim(P(V^*))$.
(b) $P \subseteq Q \Leftrightarrow P^\circ \supseteq Q^\circ$.
(c) $(P \cap Q)^\circ = \langle P^\circ \cup Q^\circ \rangle_{proj}$.
(d) $\langle P \cup Q \rangle_{proj} = P^\circ \cap Q^\circ$.

Beweis. Für jeden linearen Teilraum W von V gilt die Dimensionsformel $\dim(W^\circ) = \dim(V) - \dim(W)$ und somit (a). Für je zwei lineare Teilräume W und U von V gilt $W \subseteq U \Leftrightarrow W^\circ \supseteq U^\circ$, also (b). Nach Satz III.4.9 gilt weiters $(W \cap U)^\circ = W^\circ + U^\circ$ und $(W + U)^\circ = W^\circ \cap U^\circ$. Daraus folgen (c) und (d). $\square$

Daraus erhalten wir sofort folgendes metamathematische Dualitätsprinzip:

VIII.3.45. Satz (Dualitätsprinzip). *Angenommen wir haben einen Satz über projektive Teilräume eines n-dimensionalen projektiven Raums bewiesen, dessen Formulierung nur die Begriffe Dimension, Inklusion, Durchschnitt und projektive Hülle involviert. Ersetzen wir in dieser Aussage überall*

(a) k-dimensionaler Teilraum *durch* $(n - k - 1)$-dimensionaler Teilraum,
(b) enthält *durch* ist enthalten in,
(c) Durchschnitt von Teilräumen *durch* projektive Hülle ihrer Vereinigung *und*
(d) projektive Hülle der Vereinigung *durch* Durchschnitt der Teilräume,

so erhalten wir erneut einen Satz über projektive Teilräume eines n-dimensionalen projektiven Raums.

VIII.3.46. Beispiel. Die Aussage "*Zwei verschiedene Punkte einer projektiven Ebene liegen auf genau einer projektiven Geraden*" ist dual zu der Aussage "*Zwei verschiedene projektive Geraden einer projektiven Ebene haben genau einen Schnittpunkt.*"

VIII.3.47. Beispiel. Die Aussage "*Zwei verschiedene Punkte eines 3-dimensionalen projektiven Raums liegen auf genau einer projektiven Geraden*" ist dual zu der Aussage "*Zwei verschiedene projektive Ebenen eines 3-dimensionalen projektiven Raums schneiden sich in einer projektiven Geraden.*"

VIII.3.48. Beispiel. Die Aussage "*Zwei verschiedene Punkte eines n-dimensionalen projektiven Raums liegen auf genau einer projektiven Geraden*" ist dual zu der Aussage "*Zwei verschiedene projektive Hyperebenen eines projektiven Raums schneiden sich in einem $(n - 2)$-dimensionalen projektiven Teilraum.*"

Dual zum Satz von Desargues ist folgende Umkehrung desselben:

VIII.3.49. Korollar. *In einer projektiven Ebene betrachte drei verschiedene Punkte R_1, R_2 und R_3, die auf einer projektiven Geraden F liegen. Weiters seien H_i und K_i verschiedene projektive Geraden durch R_i, die auch alle verschieden von F sein sollen, $i = 1, 2, 3$. Betrachten wir die Schnittpunkte*

$$P_3 := H_1 \cap H_2, \quad P_2 := H_1 \cap H_3, \quad P_1 := H_2 \cap H_3,$$
$$Q_3 := K_1 \cap K_2, \quad Q_2 := K_1 \cap K_3, \quad Q_1 := K_2 \cap K_3,$$

dann schneiden sich die Geraden $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$ und $\overline{P_3Q_3}$ in einem Punkt.

Dualsieren wir den Satz von Pappus, so erhalten wir:

VIII.3.50. Korollar. *Seien R und R' zwei verschiedene Punkte einer projektiven Ebene. Weiters seien G_1, G_2, G_3 drei Geraden durch R und G'_1, G'_2, G'_3 drei Geraden durch R'. Betrachten wir die Schnittpunkte*

$$P_1 := G_2 \cap G'_3, \quad P_2 := G_1 \cap G'_3, \quad P_3 := G_1 \cap G'_2$$
$$Q_1 := G'_2 \cap G_3, \quad Q_2 := G'_1 \cap G_3, \quad Q_3 := G'_1 \cap G_2$$

dann schneiden sich die Geraden $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{P_2Q_2}$ und $\overline{P_3Q_3}$ in einem Punkt.

VIII.4. Projektive Quadriken. Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ mit $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$.

VIII.4.1. Definition (Projektive Quadriken). Unter einer projektiven Quadrik verstehen wir jede Teilmenge $E \subseteq P(V)$ von der Form

$$E = \{[v] \in P(V) : q(v) = 0\},$$

wobei q eine quadratische Form auf V bezeichnet. Beachte, dass q keine Funktion auf $P(V)$ definiert, die Nullstellenmenge aber trotzdem wohldefiniert ist, denn aus $q(v) = 0$ folgt $q(\lambda v) = 0$, für jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$.

VIII.4.2. Beispiel. Die Teilmenge

$$E := \left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \;\middle|\; x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0\right\}$$

bildet eine Quadrik in $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Bezeichnet $\iota\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, $\iota\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = [1 : x_1 : x_2]$, die Standardeinbettung, so ist der affine Teil, $\iota^{-1}(E) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1+x_1^2-x_2^2 = 0\right\}$, eine Hyperbel in $\mathbb{R}^2$. Beachte, dass E aber auch die beiden Fernpunkte $[0 : 1 : 1]$ und $[0 : 1 : -1]$ enthält, sie entsprechen den Richtungen der beiden Asymptoten der Hyperbel.

VIII.4.3. Proposition. *Ist $\pi\colon P(V) \to P(V')$ eine projektive Abbildung und E eine projektive Quadrik in $P(V)$, dann ist auch $\pi(E)$ eine projektive Quadrik in $P(V')$.*

Beweis. Nach Vorraussetzung existiert ein linearer Isomorphismus $\phi\colon V \to V'$, sodass $\pi([v]) = [\phi(v)]$ für alle $0 \neq v \in V$. Weiters existiert eine quadratische Form q auf V, sodass $E = \{[v] \in P(V) : q(v) = 0\}$. Es ist daher $q' := q \circ \phi^{-1}$ eine quadratische Form auf V', und somit $E' := \{[v'] \in P(V') : q'(v') = 0\}$ eine projektive Quadrik in $P(V')$. Nach Konstruktion gilt $\pi(E) = E'$. $\square$

VIII.4.4. Proposition. *Sei $A \subseteq V$ eine affine Hyperebene, $0 \notin A$ und $\iota\colon A \to P(V)$ die damit assoziierte Einbettung. Ist E eine projektive Quadrik in $P(V)$, dann ist $\iota^{-1}(E)$ eine affine Quadrik in A. Umgekehrt ist jede affine Quadrik in A von der Form $\iota^{-1}(E)$ für eine geeignete, i.A. nicht eindeutig bestimmte, projektive Quadrik E in $P(V)$.*

Beweis. Ist $E \subseteq P(V)$ eine projektive Quadrik, dann existiert eine quadratische Form q auf V, sodass $E = \{[v] \in P(V) : q(v) = 0\}$. Die Einschränkung $Q := q|_A\colon A \to \mathbb{K}$ ist eine quadratische Funktion. Offensichtlich gilt $\iota^{-1}(E) = \{a \in A : Q(a) = 0\}$, also ist $\iota^{-1}(E)$ eine affine Quadrik in A.

Für die zweite Aussage nehmen wir o.B.d.A. $P(V) = \mathbb{K}\mathrm{P}^n$ und $\iota\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}\mathrm{P}^n$, $\iota(x) = [1 : x_1 : \cdots : x_n]$, an. Ist $Q(x) = x^t Ax + b^t x + c$ eine quadratische Funktion auf $\mathbb{K}^n$, dann repräsentiert die symmetrische $(n+1)\times(n+1)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} c & b^t/2 \\ b/2 & A \end{pmatrix}$$

eine quadratische Form $q\colon \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$, und es gilt

$$\iota^{-1}\bigl(\{[v] \in \mathbb{K}\mathrm{P}^n : q(v) = 0\}\bigr) = \{x \in \mathbb{K}^n : Q(x) = 0\},$$

denn $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} c & b^t/2 \\ b/2 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = x^t Ax + b^t x + c = Q(x).$ $\square$

VIII.4.5. Beispiel. Betrachte die affine Quadrik

$$E_0 := \{\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1^2 + 1\}.$$

Wir wollen eine projektive Quadrik $E \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ bestimmen, deren affiner Teil mit E_0 überein stimmt, d.h. so, dass $\iota^{-1}(E) = E_0$ gilt, wobei $\iota\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ die Standardeinbettung bezeichnet. Ersetzen wir in der definierenden Gleichung für E_0 die Variable x_i durch $\frac{x_i}{x_0}$ so erhalten wir

$$\frac{x_2}{x_0} = \Bigl(\frac{x_1}{x_0}\Bigr)^2 + 1.$$

Multiplikation mit x_0^2 liefert den Ausdruck

$$x_2 x_0 = x_1^2 + x_0^2.$$

Die gesuchte projektive Quadrik ist daher

$$E = \bigl\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \bigm| x_2 x_0 = x_1^2 + x_0^2\bigr\}.$$

VIII.4.6. Satz (Normalform komplexer projektiver Quadriken). *Sei V ein endlich dimensionaler komplexer Vektorraum, $\dim(P(V)) = n$ und E eine projektive Quadrik in $P(V)$. Dann existiert eine projektive Abbildung $\pi\colon \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to P(V)$, die E auf die Quadrik*

$$\pi^{-1}(E) = \bigl\{[z_0 : \cdots : z_n] \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n \bigm| z_0^2 + \cdots + z_{k-1}^2 = 0\bigr\}$$

abbildet, für ein geeignetes $0 \le k \le n+1$.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine quadratische Form q auf V, sodass $E = \{[v] \in P(V) : q(v) = 0\}$. Nach Satz VII.1.25 existiert ein linerer Isomorphismus $\phi\colon \mathbb{C}^{n+1} \to V$, sodass $q(\phi(z)) = z_0^2 + \cdots + z_{k-1}^2$, wobei $k = \operatorname{rank}(q)$. Die davon repräsentierte projektive Abbildung $\pi = P_\phi\colon \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to P(V)$ hat die gewünschte Eigenschaft. □

VIII.4.7. Satz (Normalform reeller projektiver Quadriken). *Sei V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum,* $\dim(P(V)) = n$ *und E eine projektive Quadrik in $P(V)$. Dann existiert eine projektive Abbildung $\pi\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to P(V)$, die E auf die Quadrik*

$$\pi^{-1}(E) = \left\{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^n \,\middle|\, x_0^2 + \cdots + x_{p-1}^2 - x_p^2 - \cdots - x_{p+k-1}^2 = 0\right\}$$

abbildet, für geeignete $0 \leq k \leq p \leq n+1$.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine quadratische Form q auf V, sodass $E = \{[v] \in P(V) : q(v) = 0\}$. Nach Satz VII.1.35 existiert ein linerer Isomorphismus $\phi\colon \mathbb{R}^{n+1} \to V$, sodass

$$q(\phi(x)) = x_0^2 + \cdots + x_{p-1}^2 - x_p^2 - \cdots - x_{p+k-1}^2,$$

wobei (p, k) die Signatur von q bezeichnet. Da q und $-q$ die selbe projektive Quadrik beschreiben. dürfen wir o.B.d.A. $p \geq k$ annehmen. Die davon repräsentierte projektive Abbildung, $\pi = P_\phi\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^n \to P(V)$, hat die gewünschte Eigenschaft. □

VIII.4.8. Beispiel. Jede Quadrik in der projektiven Ebene $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ ist zu einer der folgenden Quadriken projektiv kongruent:

(a) $\left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \,\middle|\, 0 = 0\right\}$ (ganz $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$)
(b) $\left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \,\middle|\, x_0^2 = 0\right\}$ (Gerade)
(c) $\left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \,\middle|\, x_0^2 + x_1^2 = 0\right\}$ (ein Punkt)
(d) $\left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \,\middle|\, x_0^2 - x_1^2 = 0\right\}$ (zwei Geraden)
(e) $\left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \,\middle|\, x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\right\}$ (leer)
(f) $E := \left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \,\middle|\, x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0\right\}$

Bezeichnet $\iota_0\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, $\iota_0(x, y) = [1 : x : y]$, die Standardeinbettung, dann ist $\iota_0^{-1}(E) = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : 1 + x^2 - y^2 = 0\}$ eine Hyperbel und es liegen zwei Punkte von E auf der Ferngeraden, $[0 : 1 : 1]$ und $[0 : 1 : -1]$. Betrachten wir die Einbettung $\iota_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, $\iota_0(x, y) = [x : y : 1]$, dann ist $\iota_2^{-1}(E) = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ ein Kreis und kein Punkt von E liegt auf der Ferngeraden. Für die mit der affinen Hyperebene $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ assoziierten Einbettung $\iota\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, $\iota(x, y) = [x : y + 1 : y - 1]$, ist $\iota^{-1}(E) = \{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y = 0\}$ eine Parabel. In diesem Fall liegt nur ein Punkt von E auf der Ferngeraden, nämlich $[0 : 1 : 1]$.

VIII.4.9. Beispiel. Jede Quadrik in des projektiven Raums $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$ ist zu einer der folgenden Quadriken projektiv kongruent:

(a) $\left\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \,\middle|\, 0 = 0\right\}$ (ganz $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$)

(b) $\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \mid x_0^2 = 0\}$ (eine Ebene)
(c) $\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \mid x_0^2 + x_1^2 = 0\}$ (eine Gerade)
(d) $\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \mid x_0^2 - x_1^2 = 0\}$ (zwei Ebenen)
(e) $\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\}$ (ein Punkt)
(f) $\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \mid x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0\}$
(g) $\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$ (leer)
(h) $\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}$
(i) $\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \mid x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0\}$

VIII.4.10. Beispiel. Wir wollen eine Projektivität $\pi\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ bestimmen, die die projektive Quadrik

$$E = \{[x : y : z] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \mid x^2 + 2y^2 + z^3 + 2xy + 2xz + 4yz = 0\}$$

auf Normalform bringt. Durch Ergänzen auf vollständige Quadrate erhalten wir

$$x^2 + 2y^2 + z^3 + 2xy + 2xz + 4yz = (x + y + z)^2 + (y + z)^2 - z^2.$$

Die lineare Abbildung $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\phi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+z \\ y+z \\ z \end{pmatrix}$, induziert daher eine Projektivität $\pi = P_\phi\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, sodass

$$\pi(E) = \{[x : y : z] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$$

Normalform hat.