I. Einleitung

Die lineare Algebra beschäftigt sich mit dem Studium linearer Abbildungen zwischen Vektorräumen und ist somit auch das geeignete Werkzeug um lineare Gleichungssysteme zu untersuchen. Lösbarkeitsfragen zu linearen Gleichungssystemen haben sehr einfache qualitative Antworten. Selbst große lineare Gleichungssysteme können effizient mit Computerunterstützung gelöst werden, diese Algorithmen haben mittlerweile eine Unzahl an konkreten Anwendungen gefunden. Lineare Gleichungssysteme sind aber auch von theoretischem Interesse. Etwa lassen sich interessantere, d.h. nicht-lineare Gleichungen oft erfolgreich durch lineare approximieren und die Lösbarkeit der linearen Approximation erlaubt manchmal Rückschlüsse auf das ursprüngliche, nicht-lineare Problem.

In dieser Einleitung wollen wir einige der Resultate der folgenden Kapitel anhand eines konkreten Beispiels illustrieren.

I.1. Ein lineares Gleichungssystem. Betrachte folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{rrrrrrrcl}
x_1 & -x_2 & -9x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +3x_7 & = & y_1 \\
2x_1 & -x_2 & -9x_3 & +9x_4 & +3x_5 & +7x_6 & +11x_7 & = & y_2 \\
-x_1 & +3x_2 & +27x_3 & +13x_4 & +2x_5 & +9x_6 & +9x_7 & = & y_3 \\
x_1 & -2x_2 & -18x_3 & -6x_4 & +2x_5 & -4x_6 & +2x_7 & = & y_4 \\
2x_1 & +x_2 & +9x_3 & +23x_4 & +8x_5 & +17x_6 & +27x_7 & = & y_5
\end{array} \tag{I.1}$$

Für welche reelle Zahlen y_1, y_2, y_3, y_4 und y_5 besitzt dieses Gleichungssystem eine Lösung, d.h. existieren reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 und x_7, die allen fünf Gleichungen genügen? Wieviele solche Lösungen gibt es, und wie lassen sie sich finden?

Wir wollen den rechnerischen Aspekt auf später verschieben und zunächst erläutern, was sich mit den Methoden der linearen Algebra über dieses Gleichungssystem sagen lässt, ohne überhaupt zu rechnen zu beginnen. Um die Notation zu vereinfachen definieren wir mit Hilfe der linken Seite von (I.1) eine Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$,

$$\psi\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - 9x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7 \\ 2x_1 - x_2 - 9x_3 + 9x_4 + 3x_5 + 7x_6 + 11x_7 \\ -x_1 + 3x_2 + 27x_3 + 13x_4 + 2x_5 + 9x_6 + 9x_7 \\ x_1 - 2x_2 - 18x_3 - 6x_4 + 2x_5 - 4x_6 + 2x_7 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 + 23x_4 + 8x_5 + 17x_6 + 27x_7 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem (I.1) lässt sich damit in kompakter Form schreiben,

$$\psi(x) = y \tag{I.2}$$

wobei $y \in \mathbb{R}^5$ und $x \in \mathbb{R}^7$. Die Linearität der Gleichungen spiegelt sich in folgender Eigenschaft der Abbildung ψ wider,

$$\psi(x + \tilde{x}) = \psi(x) + \psi(\tilde{x}) \quad \text{und} \quad \psi(\lambda x) = \lambda\psi(x), \tag{I.3}$$

für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^7$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Solche Abbildungen werden wir später als *lineare Abbildungen* bezeichnen, vgl. Übungsaufgabe 1.

Wir betrachten zunächst den Fall $y = 0$, und stellen folgende Frage: Wie lässt sich die Lösungsmenge des Gleichungssystems $\psi(x) = 0$ beschreiben? Dieses Gleichungssystem, $\psi(x) = 0$, wird das assozierte *homogene Gleichungssystem* genannt, wir bezeichnen seine Lösungsmenge mit

$$L := \{x \in \mathbb{R}^7 : \psi(x) = 0\}.$$

Die Menge L besteht daher aus allen Vektoren $x \in \mathbb{R}^7$, deren Komponenten $x_1, \dots, x_7$ folgendes Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} x_1 & -x_2 & -9x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +3x_7 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -9x_3 & +9x_4 & +3x_5 & +7x_6 & +11x_7 & = & 0 \\ -x_1 & +3x_2 & +27x_3 & +13x_4 & +2x_5 & +9x_6 & +9x_7 & = & 0 \\ x_1 & -2x_2 & -18x_3 & -6x_4 & +2x_5 & -4x_6 & +2x_7 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +9x_3 & +23x_4 & +8x_5 & +17x_6 & +27x_7 & = & 0 \end{array} \tag{I.4}$$

Da offensichtlich $\psi(0) = 0$ gilt, besitzt das homogene Gleichungssystem wenigstens die *triviale Lösung* $x = 0$, die Lösungsmenge ist daher nicht leer, es gilt $0 \in L$. Darüber hinaus hat L folgende Eigenschaft: Sind x und $\tilde{x}$ aus L, dann liegt auch ihre Summe $x+\tilde{x}$ in L, und für jede reelle Zahl λ gilt auch $\lambda x \in L$. Dies folgt sofort aus der Linearität von ψ, siehe (I.3) und Übungsaufgabe 2. Teilmengen mit dieser Eigenschaft werden wir später als *Teilräume* bezeichnen.

Nach den Resultaten in Kapitel IV besitzen Teilräume stets Basen, d.h. es existieren Vektoren $b_1, \dots, b_l \in L$, sodass sich jedes Element $x \in L$ in der Form

$$x = s_1 b_1 + \cdots + s_l b_l$$

schreiben lässt mit eindeutig bestimmten Skalaren $s_1, \dots, s_l \in \mathbb{R}$. Der Lösungsraum L kann daher durch l reelle Zahlen parametrisieren. Genauer, ist die Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{R}^l \xrightarrow{\cong} L, \qquad \phi\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_l \end{pmatrix} = s_1 b_1 + \cdots + s_l b_l \tag{I.5}$$

eine Bijektion. Manchmal wird dies auch als eine *Parameterdarstellung* von L bezeichnet. Die Surjektivität von ϕ bedeutet gerade, dass wir so alle Lösungen von (I.4) erhalten, d.h.

$$L = \big\{ s_1 b_1 + \cdots + s_l b_l \,\big|\, s_1, \dots, s_l \in \mathbb{R} \big\},$$

und die Injektivität besagt, dass die Parametrisierung ϕ jede Lösung nur einmal liefert. Beachte, dass auch die Parametrisierung ϕ linear ist, denn es gilt offensichtlich $\phi(s + \tilde{s}) = \phi(s) + \phi(\tilde{s})$ und $\phi(\lambda s) = \lambda\phi(s)$, für alle $s, \tilde{s} \in \mathbb{R}^l$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, vgl. Übugsaufgabe 1. Dies bedeutet, dass Addition und Skalarmultiplikation in L genau der üblichen Addition und Skalarmultiplikation in $\mathbb{R}^l$ entsprechen, d.h. ϕ respektiert die lineare Struktur. Wir werden solche Abbildungen später als *lineare Isomorphismen* bezeichnen.

Im Allgemeinen wird L viele verschiedene Basen besitzen, nach den Ergebnissen in Kapitel IV ist die Anzahl der Basisvektoren jedoch immer dieselbe. Diese Zahl l wird als *Dimension* des Teilraums bezeichnet, wir schreiben

$$\dim(L) = l.$$

Da L ein Teilraum von $\mathbb{R}^7$ ist, muss jedenfalls $0 \leq l \leq 7$ gelten, wie wir später sehen werden. Das *Gauß'sche Eliminationsverfahren* liefert einen effizienten Algorithmus zur Bestimmung einer Basis $b_1, \dots, b_l$ von L, wir werden dies unten an unserem Beispiel ausführen, vgl. (I.14).

Die Parameterdarstellung ist gut geeignet (alle) Lösungen des Gleichungssystems anzugeben. Soll umgekehrt überprüft werden ob ein gegebenes $x \in \mathbb{R}^7$ das Gleichungssystem (I.4) erfüllt, dann lässt sich dies durch direktes Einsetzen in die Gleichungen sofort beantworten. Dabei stellt sich allerdings die Frage, ob es wirklich notwendig ist alle Gleichungen zu überprüfen oder ob vielleicht weniger Gleichungen ausreichen. In unserem Beispiel (I.4) gilt etwa: Elf mal die erste Gleichung minus drei mal die zweite plus drei mal die dritte ergibt genau die fünfte Gleichung. Die letzte Gleichung ist daher überflüssig, sie ist eine Konsequenz der vorangehenden. Auch die vierte Gleichung lässt sich übrigens durch geschicktes Kombinieren aus den ersten drei Gleichungen herleiten, auch sie ist redundant. Es stellt sich nun heraus, dass es stets möglich ist L durch ein homogenes lineares Gleichngssystem mit $7 - l$ vielen Gleichungen zu beschreiben. Nebenbei, zumindest ein solches Gleichungssystem lässt sich stets durch Weglassen geeigneter Gleichungen in (I.4) erhalten. Wieviele und welche wegzulassen sind ist jedoch ohne Rechnung nicht klar. Wir werden unten ein möglichst einfaches Gleichungssystem für L angeben, siehe (I.13).

Nun da wir die Lösungen des homogenen Systems (I.4) zumindest qualitativ gut verstehen, stellen wir folgende naheliegende Frage: Für welche y besitzt das Gleichungssystem (I.1) wenigstens eine Lösung, bzw. wie lässt sich die Menge dieser y, d.h. das Bild der Abbildung ψ,

$$W := \psi(\mathbb{R}^7) = \big\{ y \in \mathbb{R}^5 \,\big|\, \exists x \in \mathbb{R}^7 : \psi(x) = y \big\},$$

gut beschreiben? Offensichtlich gilt $0 \in W$, denn $\psi(0) = 0$. Aus (I.3) folgt sofort, dass W einen Teilraum von $\mathbb{R}^5$ bildet, d.h. sind $y, \tilde{y} \in W$, dann gilt auch $y + \tilde{y} \in W$ und $\lambda y \in W$, für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, vgl. Übungsaufgabe 2. Nach den oben erwähnten Resultaten besitzt W daher eine Basis, d.h. es existieren Vektoren $w_1, \dots, w_k \in W$, sodass sich jedes $y \in W$ auf eindeutige Weise in der Form

$$y = t_1 w_1 + \cdots + t_k w_k$$

schreiben lässt, für geeignete Skalare $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$. Auch W lässt sich daher in linearer Weise parametrisieren,

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{\cong} W, \qquad \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} \mapsto t_1 w_1 + \cdots + t_k w_k, \tag{I.6}$$

ist eine Bijektion, d.h. ein linearer Isomorphismus. Inbesondere gilt

$$W = \big\{ t_1 w_1 + \cdots + t_k w_k \bigm| t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R} \big\}.$$

Soll umgekehrt von einem gegebenen $y \in \mathbb{R}^5$ überprüft werden, ob es in W liegt, dann wäre ein Gleichungssystem für W besser geeignet. Analog zu L, lässt sich W durch ein homogenes Gleichungssystem mit $5 - k$ vielen Gleichungen in den Variablen $y_1, \dots, y_5$ beschreiben. Wir werden unten ein möglichst einfaches solches Gleichungssytem angeben, siehe (I.10), und auch eine Basis $w_1, \dots, w_k$ von W explizit bestimmen, vgl. (I.11). Nebenbei, wenigstens eine der vielen Basen von W lässt sich gewinnen, indem wir die Koeffizienten des Gleichungssystems (I.4) als Vektoren in $\mathbb{R}^5$ auffassen, d.h. die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 27 \\ -18 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 13 \\ -6 \\ 23 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \\ -4 \\ 17 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 9 \\ 2 \\ 27 \end{pmatrix},$$

betrachten und geeignete davon auswählen. Wieviele und welche dies sein sollen ist jedoch nicht ganz offensichtlich.

Wir haben oben die Anzahl der Basisvektoren von W mit k bezeichnet, d.h.

$$\dim(W) = k.$$

Da W ein Teilraum von $\mathbb{R}^5$ ist, muss jedenfalls $0 \leq k \leq 5$ gelten. Interessanter Weise sind die Dimensionen von L und W nicht unabhängig voneinander. Nach einer *Dimensionsformel* in Kapitel IV muss stets

$$l + k = \dim(L) + \dim(W) = \dim(\mathbb{R}^7) = 7 \tag{I.7}$$

gelten. Insbesondere folgt $l = 7 - k \geq 7 - 5 = 2$, d.h.

$$l = \dim(L) \geq 2.$$

Es sind daher mindestens zwei reelle Parameter notwendig, um den Lösungsraum L in linearer Weise zu parametrisieren.

Wir wenden uns nun dem ursprünglichen Gleichungssystem (I.1) zu. Zu gegebenem $y \in W$ fragen wir: Wie lässt sich die Lösungsmenge des Systems $\psi(x) = y$ gut beschreiben? Wir geben auch ihr einen Namen,

$$L_y := \{x \in \mathbb{R}^7 \mid \psi(x) = y\}.$$

Da $y \in W$ gibt es zumindest eine Lösung $\xi_y \in L_y$, d.h. $\psi(\xi_y) = y$. Aus der Linearität von ψ, siehe (I.3), folgt nun sofort, dass wir alle Lösungen des Systems $\psi(x) = y$ erhalten, in dem wir zu der *speziellen Lösung* ξ_y die Lösungen des homogenen Systems addieren, d.h.

$$L_y = \{\xi_y + x \mid \psi(x) = 0\} = \xi_y + L.$$

Die Lösungsmenge L_y ensteht daher aus L durch Verschieben um ξ_y. Somit lässt sich auch L_y parametrisieren,

$$\phi_y \colon \mathbb{R}^l \xrightarrow{\cong} L_y, \qquad \phi_y \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_l \end{pmatrix} = \xi_y + s_1 b_1 + \cdots + s_l b_l, \tag{I.8}$$

ist eine Bijektion, siehe Übungsaufgabe 6.

Beachte, dass L_y im Allgemeinen keinen Teilraum bildet, denn jeder Teilraum muss den Nullvektor enthalten, aber i.A. wird $0 \notin L_y$ gelten. Auch die Parametrisierung ϕ_y ist i.A. nicht linear.[1] Allerdings ist sie *affin,* d.h. es gilt

$$\phi_y\big(\lambda s + (1-\lambda)\tilde{s}\big) = \lambda \phi_y(s) + (1-\lambda)\phi_y(\tilde{s}),$$

für alle $s, \tilde{s} \in \mathbb{R}^l$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Parametrisierung ϕ_y respektiert daher *Konvexkombinationen.*

Sind $y, \tilde{y} \in W$ und $\xi_y \in L_y$ sowie $\xi_{\tilde{y}} \in L_{\tilde{y}}$ spezielle Lösungen, d.h. $\psi(\xi_y) = y$ und $\psi(\xi_{\tilde{y}}) = \tilde{y}$, dann gilt auch $\psi(\xi_y + \xi_{\tilde{y}}) = y + \tilde{y}$ und $\psi(\lambda \xi_y) = \lambda y$, siehe (I.3), d.h. $\xi_y + \xi_{\tilde{y}}$ ist eine spezielle Lösung des Gleichungssystems $\psi(x) = y + \tilde{y}$ und $\lambda \xi_y$ ist eine spezielle Lösung von $\psi(x) = \lambda y$. Tatsächlich existiert stets eine lineare Abbilung $\xi \colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$, sodass $\psi(\xi(y)) = y$, für alle $y \in W$. In anderen Worten, es ist stets möglich, die speziellen Lösungen so zu wählen, dass

$$\xi_{y+\tilde{y}} = \xi_y + \xi_{\tilde{y}} \quad \text{und} \quad \xi_{\lambda y} = \lambda \xi_y$$

gilt, für alle $y, \tilde{y} \in W$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir werden unten soeine Abbildung ξ für das Gleichungssystem (I.1) angeben, siehe (I.9).

Schließlich wollen wir das Gleichungssystem (I.1) auch explizit lösen und schreiben es dazu nochmals an:

$$\begin{array}{rrrrrrrcccccc}
x_1 & -x_2 & -9x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +3x_7 & = & y_1 & & & & \\
2x_1 & -x_2 & -9x_3 & +9x_4 & +3x_5 & +7x_6 & +11x_7 & = & & y_2 & & & \\
-x_1 & +3x_2 & +27x_3 & +13x_4 & +2x_5 & +9x_6 & +9x_7 & = & & & y_3 & & \\
x_1 & -2x_2 & -18x_3 & -6x_4 & +2x_5 & -4x_6 & +2x_7 & = & & & & y_4 & \\
2x_1 & +x_2 & +9x_3 & +23x_4 & +8x_5 & +17x_6 & +27x_7 & = & & & & & y_5
\end{array}$$

[1] In der Analysis werden Funktionen der Form $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, als linear bezeichnet. Diese Abbildungen sind nur dann linear im Sinn der linearen Algebra, wenn $b = 0$ gilt, andernfalls ist ja $f(x + \tilde{x}) = a(x + \tilde{x}) + b \neq ax + b + a\tilde{x} + b = f(x) + f(\tilde{x})$. In der linearen Algebra werden solche Funktionen affin geannt.

Addieren wir die erste Gleichung (-2)-mal zur zweiten, 1-mal zur dritten, (-1)-mal zur vierten und (-2)-mal zur fünften Gleichung, so erhalten wir das äquivalente Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & -x_2 & -9x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +3x_7 & = & y_1 & & & & \\
& x_2 & +9x_3 & +7x_4 & +x_5 & +5x_6 & +5x_7 & = & -2y_1 & +y_2 & & & \\
& 2x_2 & +18x_3 & +14x_4 & +3x_5 & +10x_6 & +12x_7 & = & y_1 & & +y_3 & & \\
& -x_2 & -9x_3 & -7x_4 & +x_5 & -5x_6 & -x_7 & = & -y_1 & & & +y_4 & \\
& 3x_2 & +27x_3 & +21x_4 & +6x_5 & +15x_6 & +21x_7 & = & -2y_1 & & & & +y_5
\end{array}$$

Beachte, dass diese sogenannten *Zeilenumformungen* rückgängig gemacht werden können, die beiden Systeme sind daher wirklich äquivalent.

Addieren wir nun die zweite Gleichung (-2)-mal zur dritten, 1-mal zur vierten und (-3)-mal zur fünften Gleichung, so erhalten wir das äquivalente Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & -x_2 & -9x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +3x_7 & = & y_1 & & & & \\
& x_2 & +9x_3 & +7x_4 & +x_5 & +5x_6 & +5x_7 & = & -2y_1 & +y_2 & & & \\
& & & & x_5 & & +2x_7 & = & 5y_1 & -2y_2 & +y_3 & & \\
& & & & 2x_5 & & +4x_7 & = & -3y_1 & +y_2 & & +y_4 & \\
& & & & 3x_5 & & +6x_7 & = & 4y_1 & -3y_2 & & & +y_5
\end{array}$$

Addieren wir die dritte Gleichung (-2)-mal zur vierten und (-3)-mal zur fünften Gleichung, so erhalten wir das äquivalente Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
x_1 & -x_2 & -9x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +3x_7 & = & y_1 & & & & \\
& x_2 & +9x_3 & +7x_4 & +x_5 & +5x_6 & +5x_7 & = & -2y_1 & +y_2 & & & \\
& & & & x_5 & & +2x_7 & = & 5y_1 & -2y_2 & +y_3 & & \\
& & & & & & 0 & = & -13y_1 & +5y_2 & -2y_3 & +y_4 & \\
& & & & & & 0 & = & -11y_1 & +3y_2 & -3y_3 & & +y_5
\end{array}$$

Subtrahieren wir die dritte Gleichung 1-mal von der ersten und 1-mal von der zweiten erhalten wir das äquivalente Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
x_1 & -x_2 & -9x_3 & +x_4 & & +x_6 & +x_7 & = & -4y_1 & +2y_2 & -y_3 & & \\
& x_2 & +9x_3 & +7x_4 & & +5x_6 & +3x_7 & = & -7y_1 & +3y_2 & -y_3 & & \\
& & & & x_5 & & +2x_7 & = & 5y_1 & -2y_2 & +y_3 & & \\
& & & & & & 0 & = & -13y_1 & +5y_2 & -2y_3 & +y_4 & \\
& & & & & & 0 & = & -11y_1 & +3y_2 & -3y_3 & & +y_5
\end{array}$$

Addieren wir schließlich die zweite Gleichung zur ersten so erhalten wir das äquivalente Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
x_1 & & & +8x_4 & & +6x_6 & +4x_7 & = & -11y_1 & +5y_2 & -2y_3 & & \\
& x_2 & +9x_3 & +7x_4 & & +5x_6 & +3x_7 & = & -7y_1 & +3y_2 & -y_3 & & \\
& & & & x_5 & & +2x_7 & = & 5y_1 & -2y_2 & +y_3 & & \\
& & & & & & 0 & = & -13y_1 & +5y_2 & -2y_3 & +y_4 & \\
& & & & & & 0 & = & -11y_1 & +3y_2 & -3y_3 & & +y_5
\end{array}$$

Ist nun y ein Vektor in $\mathbb{R}^5$, dessen Komponenten den letzten beiden Gleichungen genügen, dann besitzt das gesamte Gleichungssystem eine Lösung, wir können uns nämlich x_3, x_4, x_6 und x_7 beliebig vorgeben, die anderen Komponenten x_1, x_2 und x_5 sind dann durch die ersten drei Gleichungen eindeutig bestimmt. Wählen wir etwa $x_3 = x_4 = x_6 = x_7 = 0$, erhalten wir die spezielle Lösung

$$\xi_y = \begin{pmatrix} -11y_1 + 5y_2 - 2y_3 \\ -7y_1 + 3y_2 - y_3 \\ 0 \\ 0 \\ 5y_1 - 2y_2 + y_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} -11 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{I.9}$$

Der Teilraum jener $y \in \mathbb{R}^5$, für die das Gleichungssystem eine Lösung besitzt ist daher durch die letzten beiden Gleichungen beschrieben, d.h.

$$W = \left\{ y \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{rrrrrcl} -13y_1 & +5y_2 & -2y_3 & +y_4 & & = & 0 \\ -11y_1 & +3y_2 & -3y_3 & & +y_5 & = & 0 \end{array} \right\}. \tag{I.10}$$

Wollen wir Vektoren y in W finden, so können wir uns die Komponenten y_1, y_2 und y_3 beliebig vorgeben, die beiden Gleichungen in (I.10) bestimmen dann die restlichen Komponenten y_4 und y_5 eindeutig. Etwa sind

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{I.11}$$

aus W, und jedes Element von $y \in W$ lässt sich in der Form

$$y = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ 13t_1 - 5t_2 + 2t_3 \\ 11t_1 - 3t_2 + 3t_3 \end{pmatrix} \tag{I.12}$$

schreiben, wobei die Skalare $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt sind. Dies bedeutet gerade, dass die Vektoren w_1, w_2 und w_3 eine Basis von W bilden, es gilt daher

$$\dim(W) = k = 3.$$

Die lineare Parametrisierung $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} W$ ist durch (I.12) gegeben, vgl. (I.6).

Für den Lösungsraum des assozierten homogenen Gleichungssystems gilt

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^7 \;\middle|\; \begin{array}{rrrrrrrcl} x_1 & & & +8x_4 & & +6x_6 & +4x_7 & = & 0 \\ & x_2 & +9x_3 & +7x_4 & & +5x_6 & +3x_7 & = & 0 \\ & & & & x_5 & & +2x_7 & = & 0 \end{array} \right\}. \tag{I.13}$$

Wollen wir Vektoren in L finden, können wir uns die Komponenten x_7, x_6, x_4 und x_3 beliebig vorgeben, die restlichen Komponenten sind dann durch die drei Gleichungen bestimmt. So erhalten wir die folgenden Elemente von L

$$b_1=\begin{pmatrix}-4\\-3\\0\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix},\quad b_2=\begin{pmatrix}-6\\-5\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad b_3=\begin{pmatrix}-8\\-7\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\quad b_4=\begin{pmatrix}0\\-9\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}. \tag{I.14}$$

Jedes $x \in L$ lässt sich damit in der Form

$$x=s_1\begin{pmatrix}-4\\-3\\0\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+s_2\begin{pmatrix}-6\\-5\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+s_3\begin{pmatrix}-8\\-7\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+s_4\begin{pmatrix}0\\-9\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4s_1-6s_2-8s_s\\-3s_1-5s_2-7s_3-9s_4\\s_4\\s_3\\-2s_1\\s_2\\s_1\end{pmatrix}$$

schreiben, für eindeutig bestimmte Skalare $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{R}$. Dies ist also die gesuchte Parametrisierung $\phi\colon \mathbb{R}^4 \to L$, siehe (I.5). Die Vektoren b_1, b_2, b_3, b_4 bilden daher eine Basis von L, es ist somit

$$\dim(L) = l = 4.$$

Beachte, dass tatsächlich $k + l = 7$ gilt, vgl. (I.7).

Damit ist das Gleichungssystem (I.1) vollständig gelöst. Die Beschreibung (I.10) von W sagt uns für welche $y \in \mathbb{R}^5$ Lösungen existieren. Ist $y \in W$, d.h. existiert wenigstens eine Lösung, dann lassen sich alle Lösungen x von (I.1) in der Form

$$x=\begin{pmatrix}-11y_1+5y_2-2y_3\\-7y_1+3y_2-y_3\\0\\0\\5y_1-2y_2+y_3\\0\\0\end{pmatrix}+s_1\begin{pmatrix}-4\\-3\\0\\0\\-2\\0\\1\end{pmatrix}+s_2\begin{pmatrix}-6\\-5\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+s_3\begin{pmatrix}-8\\-7\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+s_4\begin{pmatrix}0\\-9\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

schreiben, wobei die Skalare $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt sind. Dies ist also die gesuchte Parametrisierung $\phi_y\colon \mathbb{R}^4 \to L_y$, vgl. (I.8).

I.2. Geometrische Interpretation. Nach Wahl eines *kartesischen Koordinatensystems* lassen sich Punkte der *Euklidischen Ebene* mit Elementen von $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Der Koordinatenursprung entspricht dabei dem Vektor $0 \in \mathbb{R}^2$. Diese Identifizierung erlaubt es geometrische Konstruktionen und Probleme in algebraische zu übersetzen. Etwa lässt sich jede Gerade g der Ebene durch eine lineare Gleichung beschreiben, d.h. es existieren $0 \neq (a,b) \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c \right\}.$$

Der Schnitt von zwei Geraden entspricht daher der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen in den Unbekannten x und y. Das geometrische Problem den Schnitt zweier Geraden zu bestimmen führt daher auf ein algebraisches Problem, nämlich ein lineares Gleichungssystem, das sich mit den Methoden der linearen Algebra (sehr leicht) lösen lässt.

Darüber hinaus lassen sich einige interessante *geometrische Transformationen* mit linearer Algebra studieren. Ist etwa $\lambda > 0$, dann enspricht die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

einer beim Koordinatenursprung zentrierten *Streckung* um den Faktor λ. Für fixes $\left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ entspricht die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix},$$

einer *Translation.* Die Abbildung

$$\rho_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \rho_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{pmatrix},$$

beschreibt eine beim Koordinatenursprung zentrierte *Drehung* um den Winkel α. Beachte, dass diese Abbildungen ρ linear ist, d.h. es gilt

$$\rho_\alpha\left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{smallmatrix}\right)\right) = \rho_\alpha\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) + \rho_\alpha\left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{smallmatrix}\right) \quad \text{und} \quad \rho_\alpha\left(\lambda\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = \lambda\,\rho_\alpha\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right),$$

für beliebige $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Abbildung

$$\sigma \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \sigma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix},$$

entspricht offensichtlich einer *Spiegelung* an der x-Achse. Also beschreibt

$$\sigma_\alpha = \rho_\alpha \circ \sigma \circ \rho_\alpha^{-1} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos(2\alpha) + y\sin(2\alpha) \\ x\sin(2\alpha) - y\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

eine Spiegelung an der Geraden durch den Koordinatenursprung, die mit der x-Achse den Winkel α einschließt. Auch σ_α ist eine lineare Abbildung. Schließlich sei noch erwähnt, dass *Orthogonalprojektionen* auf Geraden durch den Koordinatenursprung ebenfalls durch lineare Abbildungen beschrieben werden können.

Analog lassen sich Punkte des 3-dimensionalen *Euklidischen Raums* nach Wahl eines kartesischen Koordinatensystems mit Elementen von $\mathbb{R}^3$ identifizieren. Jede Ebene ε im Raum entspricht dabei der Lösungsmenge einer linearen

Gleichung, d.h. es existieren $0 \neq (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ und $d \in \mathbb{R}$, sodass

$$\varepsilon = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) : ax + by + cz = d \right\}.$$

Der Durchschnitt zweier Ebenen entspricht somit der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen in den Unbekannten x, y, z und lässt sich daher mit den Methoden der linearen Algebra (sehr leicht) bestimmen. Auch können interessante geometrische Transformationen des Euklidischen Raums wie Spiegelungen, Rotationen, Orthogonalprojektionen, u.s.w. durch lineare Abbildungen beschrieben werden.

Wie wir oben gesehen haben, besitzt die lineare Algebra zweifellos Anwendungen in der Euklidischen Geometrie. Wahrscheinlich wichtiger ist jedoch folgender Aspekt. Gleichungssysteme in zwei oder drei Variablen haben geometrische Interpretationen, für die wir eine sehr ausgeprägte Intuition besitzen. Diese Intuition hilft uns, die bei größeren Gleichungssystemen auftretenden Phänomene besser zu begreifen. Wir wollen das noch an einem Beispiel erläutern, und betrachten ein homogenes Gleichungssystem in drei Variablen x, y und z,

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \end{aligned}$$

mit Koeffizienten $0 \neq (a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ und $0 \neq (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$. Die geometrische Interpretation der Lösungsmenge als Durchschnitt zweier Ebenen zusammen mit unserer geometrischen Intuition lässt uns vermuten, dass dann wohl eine ganze Gerade in der Lösungsmenge des Systems enthalten sein muss. Dies ist tatsächlich der Fall, formal lässt sich dies aus der weiter oben erwähnten Dimensionsformel herleiten. Allgemeiner folgt aus dieser Dimensionsformel: Jedes homogene Gleichungssystem mit m Gleichungen in n Variablen, wobei $n \geq m$, hat einen mindestens $(n-m)$-dimensionalen Lösungsraum. Wir können dieses algebraische Resultat zu einem gewissen Grad geometrisch begreifen.

II. Vektorräume und lineare Abbildungen

Gleichungssysteme mit komplexen oder rationalen Koeffizienten lassen sich genau wie reelle Gleichungssysteme lösen. Wichtig dabei ist nur, dass die Koeffizienten in einem Körper liegen. Alle diese Fälle können bequem gleichzeitig behandelt werden. Wir beginnen dieses Kapitel daher mit der Definition von Vektorräumen über beliebigen Körpern $\mathbb{K}$. Die für uns hier wichtigsten Beispiele werden $\mathbb{K}^n$ und Teilräume davon sein. Anschließend werden wir lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen einführen und einige einfache Eigenschaften herleiten. Lineare Abbildungen von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ lassen sich effizient durch Matrizen beschreiben, wir werden diesen Zusammenhang in Abschnitt II.4 eingehend diskutieren. In Abschnitt II.5 werden wir besprechen, wie Vektorräume als Summe von Teilräumen zerlegt werden können, und was dies mit (speziellen) Lösungen linearer Gleichungssysteme zu tun hat. Im letzten Abschnitt II.6 werden wir mit den Quotientenräumen die ersten Vektorräumen kennen lernen, die nicht in offensichtlicher Weise als Teilräume von Funktionenräumen auftreten.

II.1. Vektorräume. Wir erinnern uns an den Begriff eines Körpers. Eine Menge $\mathbb{K}$ zusammen mit zwei Verknüpfungen $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{+} \mathbb{K}$ und $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{K}$ wird Körper genannt, falls die folgenden sogenannten *Körperaxiome* gelten:

(K1) $\forall \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K} : (\lambda + \mu) + \nu = \lambda + (\mu + \nu)$
(K2) $\exists 0 \in \mathbb{K}\, \forall \mu \in \mathbb{K} : \mu + 0 = 0$
(K3) $\forall \mu \in \mathbb{K}\, \exists (-\mu) \in \mathbb{K} : \mu + (-\mu) = 0$
(K4) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \lambda + \mu = \mu + \lambda$
(K5) $\forall \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K} : (\lambda\mu)\nu = \lambda(\mu\nu)$
(K6) $\exists 1 \in \mathbb{K} : 1 \neq 0 \wedge \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda 1 = \lambda$
(K7) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\, \exists \lambda^{-1} \in \mathbb{K} : \lambda\lambda^{-1} = 1$
(K8) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \lambda\mu = \mu\lambda$
(K9) $\forall \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K} : \lambda(\mu + \nu) = \lambda\mu + \lambda\nu$

Ist $\mathbb{K}$ ein Körper, dann bildet $\mathbb{K}$ bezüglich der *Addition* eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0. Darüber hinaus ist auch $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ bezüglich der *Multiplikation* eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 1. Das Distributivgesetz (K9) garantiert eine gewisse Verträglichkeit zwischen Addition und Multiplikation. Einfache Konsequenzen aus den Körperaxiomen, wie z.B. $\forall \lambda \in \mathbb{K} : 0\lambda = 0$, die Eindeutigkeit der beiden neutralen Elemente 0 und 1, oder die Nullteilerfreiheit, werden wir im Folgenden als bekannt voraussetzen, siehe etwa [**4**, Kapitel 5]. Auch werden wir üblichen Konventionen folgen und schreiben etwa $\lambda\mu\nu$ statt $(\lambda\mu)\nu = \lambda(\mu\nu)$ und manchmal $\frac{\lambda}{\mu}$ für $\lambda\mu^{-1}$.

Als wichtige Beispiele von Körpern sind jedenfalls $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}_p$ zu nennen, wobei p eine Primzahl bezeichnet. Beachte, dass $\mathbb{Z}_p$ nur aus endlich vielen Elementen besteht. Der kleinste Körper, $\mathbb{Z}_2$, besteht überhaupt nur aus 0 und 1.

Ist $\mathbb{K}$ ein Körper, dann existiert ein eindeutiger Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{K}$, der $1 \in \mathbb{Z}$ auf $1 \in \mathbb{K}$ abbildet. Jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ können wir daher auch als Element von $\mathbb{K}$ auffassen, etwa gilt $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 1 + 1$, u.s.w. Beachte jedoch, dass in manchen Körpern und für manche $n \in \mathbb{N}$ sehr wohl $n = 0 \in \mathbb{K}$ gelten kann, etwa haben wir im Körper $\mathbb{Z}_2$ die Relation $2 = 1 + 1 = 0$.

II.1.1. Definition (Vektorraum). Unter einem *Vektorraum* über einem Körper $\mathbb{K}$ verstehen wir eine Menge V zusammen mit zwei Verknüpfungen,

$$V \times V \xrightarrow{+} V \quad \text{und} \quad \mathbb{K} \times V \xrightarrow{\cdot} V,$$

die folgenden acht Axiomen, den sogenannten *Vektorraumaxiomen,* genügen:

(V1) $\forall u, v, w \in V : (u + v) + w = u + (v + w)$
(V2) $\exists 0 \in V\, \forall v \in V : v + 0 = v$
(V3) $\forall v \in V\, \exists (-v) \in V : v + (-v) = 0$
(V4) $\forall v, w \in V : v + w = w + v$
(V5) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\, \forall v \in V : \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$
(V6) $\forall \lambda \in \mathbb{K}\, \forall v, w \in V : \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
(V7) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\, \forall v \in V : (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
(V8) $\forall v \in V : 1v = v$

Die beiden Verknüpfungen werden als *(Vektor-)Addition* bzw. *Skalarmultiplikation* bezeichnet. Elemente eines Vektorraums werden *Vektoren* genannt. Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ wird oft auch als $\mathbb{K}$-Vektorraum bezeichnet. Ist der Grundkörper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so sprechen wir von einem *reellen Vektorraum,* im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ von einem *komplexen Vektorraum.*

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Aufgrund von Axiom (V1) können wir bei mehrfachen Summen auf die Klammersetzung verzichten und schreiben meist $u + v + w$, $v_1 + \cdots + v_n$ oder $\sum_{i=1}^n v_i$.

Nach Axiom (V2) existiert $0 \in V$, sodass $v + 0 = v$ für jedes $v \in V$. Der Vektor 0 ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt, ist nämlich $o \in V$ ein weiteres Element mit $v + o = v$ für alle $v \in V$, so erhalten wir mit Hilfe von Axiom (V4) sofort $0 = 0 + o = o + 0 = o$. Dieses additiv neutrale Element 0 wird *Nullvektor* genannt. Nach Axiom (V4) gilt jedes $v \in V$ auch $v + 0 = v = 0 + v$.

Nach Axiom (V3) existiert zu jedem $v \in V$ ein Element $-v \in V$, sodass $v + (-v) = 0$. Dieser Vektor $-v$ ist eindeutig bestimmt, ist nämlich $v' \in V$ ein weiteres Element mit $v + v' = 0$, dann folgt mit Hilfe von Axiom (V4) sofort $v' = v' + 0 = v' + (v + (-v)) = (v' + v) + (-v) = (v + v') + (-v) = 0 + (-v) = -v$. Nach Axiom (V4) gilt für beliebiges $v \in V$ auch $v + (-v) = 0 = (-v) + v$. Weiters ist $-0 = 0$, denn $0 + 0 = 0$. Für $v, w \in V$ haben wir $-(v + w) = (-v) + (-w)$, denn $(v + w) + ((-v) + (-w)) = (v + (-v)) + (w + (-w)) = 0 + 0 = 0$. Beachte auch $-(-v) = v$.

In jedem Vektorraum gilt die Kürzungsregel

$$\forall u, v, w \in V : u + v = w + v \Rightarrow u = w,$$

denn aus $u + v = w + v$ folgt $u = u + 0 = u + (v + (-v)) = (u + v) + (-v) = (w + v) + (-v) = w + (v + (-v)) = w + 0 = w$.

Bis jetzt haben wir nur die Axiome (V1) bis (V4) verwendet, die in den vorangehenden Absätzen besprochenen Eigenschaften gelten daher in allgemeinen abelschen Gruppen, siehe [**4**, Abschnitt 5.2]. Wir widmen uns nun dem Zusammenspiel von Addition und Skalarmultiplikation.

Für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\lambda 0 = 0,$$

denn aus Axiom (V6) folgt $0 + \lambda 0 = \lambda 0 = \lambda(0 + 0) = \lambda 0 + \lambda 0$ und wegen oben erwähnter Kürzungsregel daher $0 = \lambda 0$.

Für jedes $v \in V$ gilt

$$0v = 0,$$

denn aus Axiom (V7) erhalten wir $0 + 0v = 0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$ und wegen der Kürzungsregel oben daher $0 = 0v$.

Es gilt auch folgende Umkehrung der vorangehenden beiden Aussagen:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}\, \forall v \in V : \lambda v = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ oder } v = 0.$$

Ist nämlich $\lambda v = 0$ und $\lambda \neq 0$, dann erhalten wir mit Hilfe der Axiome (V5) und (V8) sofort $v = 1v = (\lambda^{-1}\lambda)v = \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1}0 = 0$.

Für beliebiges $v \in V$ gilt

$$-v = (-1)v,$$

denn nach (V7) und (V8) ist $v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = 0$.

Schließlich haben wir auch

$$\lambda(-v) = -(\lambda v) = (-\lambda v),$$

für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in$V, denn mit Hilfe von Axiom (V5) folgt $\lambda(-v) = \lambda((-1)v) = (\lambda(-1))v = (-\lambda)v = ((-1)\lambda)v = (-1)(\lambda v) = -\lambda v$.

Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir von nun an $v - w$ für $v + (-w)$. Auch verzichten wir bei Skalarmultiplikationen oft auf Klammersetzung und schreiben meist $\lambda\mu v$ statt $\lambda(\mu v) = (\lambda\nu)v$, falls $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $v \in V$, vgl. Axiom (V5). Nach obigen Bemerkungen ist dies mit den vertrauten Rechenregeln verträglich.

II.1.2. Beispiel. Wir können jeden Körper $\mathbb{K}$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum auffassen.

II.1.3. Beispiel. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Auf der Menge aller n-Tupel von Elementen aus $\mathbb{K}$,

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\},$$

definieren wir Addition, $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \xrightarrow{+} \mathbb{K}^n$, und Skalarmultiplikation, $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cdot} \mathbb{K}^n$, komponentenweise, d.h. durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{K}$. Mit diesen Operationen wird $\mathbb{K}^n$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{K}$, die Vektorraumaxiome folgen sofort aus den entsprechenden Körperaxiomen, siehe Übungsaufgabe 11 oder [**4**, Kapitel 7]. Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ ein reeller Vektorraum und $\mathbb{C}^n$ ein komplexer Vektorraum. Etwa gilt in $\mathbb{C}^3$,

$$\begin{pmatrix} 1 + 2\mathbf{i} \\ 3 - 4\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6\mathbf{i} \\ 2 - \mathbf{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 2\mathbf{i} \\ 3 + 2\mathbf{i} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (2 + \mathbf{i}) \begin{pmatrix} 4 + 3\mathbf{i} \\ -2\mathbf{i} \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 + 10\mathbf{i} \\ 2 - 4\mathbf{i} \\ 14 + 7\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

II.1.4. Bemerkung. Die Wahl eines *kartesischen Koordinatensystems* ermöglicht es Elemente von $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ mit Punkten der *Gerade,* der *Ebene* bzw. des *Raums* zu identifizieren, siehe [**4**, Kapitel 7]. In diesem Bild besitzen die Vektorraumoperationen geometrische Interpretationen. Skalarmultiplikation mit $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, d.h. die Abbildung $x \mapsto \lambda x$, entspricht einer *Streckung* um den Faktor λ, zentriert beim Ursprung des Koordinatensystems. Für fixes y entspricht die Abbildung $x \mapsto x + y$ einer *Translation* um y.

II.1.5. Beispiel. Über jedem Körper $\mathbb{K}$ gibt es einen Vektorraum der nur aus einem Element, dem Nullvektor, besteht. Wir bezeichnen diesen *triviale Vektorraum* mit $\{0\}$, $\mathbb{K}^0$ oder 0.

II.1.6. Beispiel (Funktionenräume). Es sei X eine Menge und V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Es bezeichne $F(X, V) = V^X$ die Menge aller Abbildungen $X \to V$. Die Summe zweier Abbildungen $f, g \in F(X, V)$ wird punktweise definiert, d.h.

$$f + g \colon X \to V, \quad (f + g)(x) := f(x) + g(x).$$

Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $f \in F(X, V)$ definieren wir analog

$$\lambda f \colon X \to V, \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

Mit diesen Operationen wird $F(X, V)$ zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum. Etwa haben wir für $f, g, h \in F(X, V)$ und $x \in X$

$$\begin{aligned} \big((f + g) + h\big)(x) &= (f + g)(x) + h(x) = \big(f(x) + g(x)\big) + h(x) \\ &= f(x) + \big(g(x) + h(x)\big) = f(x) + (g + h)(x) = \big(f + (g + h)\big)(x). \end{aligned}$$

Da dies für alle $x \in X$ gilt, erhalten wir $(f + g) + h = f + (g + h)$, also genügt $F(X, V)$ dem Vektorraumaxiom (V1). Auch Axiom (V2) ist erfüllt, die konstante Nullfunktion, $0 \colon X \to V$, $0(x) := 0$, ist neutrales Element der Addition, denn für jedes $f \in F(X, V)$ und $x \in X$ gilt $(f + 0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) + 0 = f(x)$, also $f + 0 = f$. Das additive Inverse von $f \in F(X, V)$ ist durch $-f\colon X \to V$, $(-f)(x) := -f(x)$, gegeben, denn für jedes $x \in X$ gilt $(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0$, also $f + (-f) = 0$. Damit ist auch Axiom (V3) für $F(X, V)$ verifiziert. Für $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g \in F(X, V)$ und $x \in X$ haben wir

$$\begin{aligned}\big(\lambda(f+g)\big)(x) &= \lambda(f+g)(x) = \lambda\big(f(x) + g(x)\big)\\ &= \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) = (\lambda f + \lambda g)(x).\end{aligned}$$

Da dies für alle $x \in X$ gilt, erhalten wir $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$, d.h. $F(X, V)$ genügt Axiom (V6). Völlig ananlog lassen sich die verbleibenden Vektorraumaxiome überprüfen, siehe Übungsaufgabe 13.

Wählen wir speziell $V = \mathbb{K}$, so sehen wir, dass $F(X; \mathbb{K})$, d.h. die Menge aller $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen auf X, bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bilden. Etwa bilden die reellwertigen Funktionen auf einem Intervall, $F([a, b], \mathbb{R})$, einen reellen Vektorraum. Für $X = \mathbb{N}$ ist $F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ die Menge aller Folgen in $\mathbb{R}$, diese bilden daher bezüglich gliedweiser Addition und Skalarmultiplikation ebenfalls einen Vektorraum.

II.1.7. Bemerkung (Funktionen als Algebra). $\mathbb{K}$-wertige Funktionen können auch in naheliegender Weise multipliziert werden, für $f, g \in F(X, \mathbb{K})$ wird ihr Produkt $fg \in F(X, \mathbb{K})$ punktweise, d.h. durch

$$fg\colon X \to \mathbb{K}, \qquad (fg)(x) := f(x)g(x),$$

definiert, $x \in X$. Diese Verknüpfung ist assoziativ und kommutativ, d.h. es gilt $f(gh) = (fg)h$ sowie $fg = gf$ für beliebige $f, g, h \in F(X, \mathbb{K})$. Die konstante Einsfunktion, $1 \in F(X, \mathbb{K})$, ist neutrales Element bezüglich der Multiplikation, d.h. für alle $f \in F(X, \mathbb{K})$ gilt $1f = f = f1$. Die Multiplikation ist mit der Vektorraumstruktur verträglich, es gilt $f(g_1 + g_2) = fg_1 + fg_2$, $(f_1 + f_2)g = f_1g + f_2g$ und $f(\lambda g) = \lambda(fg) = (\lambda f)g$, für beliebige $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \in F(X; \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dies bedeutet gerade, dass $F(X, \mathbb{K})$ eine kommutative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins[2] bildet, vgl. Übungsaufgabe 14.

II.1.8. Beispiel (Polynome). Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Unter einem *Polynom mit Koeffizienten in* $\mathbb{K}$ verstehen wir einen formalen Ausdruck der Form

$$p_0 + p_1z + p_2z^2 + p_3z^3 + \cdots$$

wobei die Koeffizienten $p_i \in \mathbb{K}$ fast alle verschwinden, d.h. alle bis auf endlich viele p_i gleich 0 sind. Zwei Polynome werden als gleich betrachtet, wenn alle ihre

[2]Unter einer $\mathbb{K}$-Algebra verstehen wir einen $\mathbb{K}$-Vektorraum A zusammen mit einer Verknüpfung $A \times A \to A$, der sogenannten Multiplikation, sodass $a(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2$, $a(\lambda b) = \lambda(ab)$, $(a_1 + a_2)b = a_1b + a_2b$ und $(\lambda a)b = \lambda(ab)$, für alle $a, a_1, a_2, b, b_2, b_2 \in A$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Die Algebra wird assoziativ genannt, wenn $a(bc) = (ab)c$ für alle $a, b, c \in A$ gilt. Ein Element $e \in A$ mit $ae = a = ea$ für alle $a \in A$, wird Einselement von A genannt. Dieses neutrale Element der Multiplikation ist dann eindeutig bestimmt und wir sprechen von einer assoziativen Algebra mit Eins. Gilt darüber hinaus $ab = ba$ für alle $a, b \in A$, dann wird A kommutativ gennant.

Koeffizienten überein stimmen. Die Menge aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{K}[z]$. Sind $p, q \in \mathbb{K}[z]$ zwei Polynome, $p = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$ und $q = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots$, so wird ihre Summe koeffizientenweise definiert,

$$p + q := (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)z + (p_2 + q_2)z^2 + (p_3 + q_3)z^3 + \cdots$$

Offensichtlich ist dann $p + q$ wieder ein Polynom, d.h. $p + q \in \mathbb{K}[z]$. Analog definieren wir Skalarmultiplikation mit $\lambda \in \mathbb{K}$ durch

$$\lambda p := (\lambda p_0) + (\lambda p_1)z + (\lambda p_2)z^2 + (\lambda p_3)z^3 + \cdots$$

und erhalten ein Polynom $\lambda p \in \mathbb{K}[z]$. Mit diesen Verknüpfungen wird $\mathbb{K}[z]$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dabei ist das Nullpolynom, $0 := 0 + 0z + 0z^2 + \cdots$, das additiv neutrale Element, d.h. $0 + p = p = p + 0$ für alle $p \in \mathbb{K}[z]$. Meist werden bei Polynomen nur jene Potenzen von z angeschrieben, deren Koeffizienten verschieden von 0 sind. Etwa sind $p = 2 - z + 4z^2 - 7z^5$ und $q = z - z^3$ zwei reelle Polynome für die $p + q = 2 + 4z^2 - z^3 - 7z^5$ und $7q = 7z - 7z^3$ gilt.

II.1.9. Bemerkung (Polynome als Algebra). Auch Polynome können multipliziert werden. Sind $p = \sum_i p_i z^i = p_0 + p_1 z + p_3 z^2 + \cdots$ und $q = \sum_j q_j z^j = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots$ zwei Polynome in $\mathbb{K}[z]$, so wird ihr Produkt $pq \in \mathbb{K}[z]$ durch

$$pq = p_0 p_0 + \big(p_0 q_1 + p_1 q_0\big)z + \big(p_0 q_2 + p_1 q_1 + p_2 q_0\big)z^2 + \cdots + \Bigg(\sum_{i+j=k} p_i q_j\Bigg)z^k$$

d.h. durch *formales Ausmultiplizieren* definiert. Etwa ist das Produkt der Polynome $p = 2 + 3z + 4z^2$ und $q = 1 + z - z^2$ gleich $pq = 2 + 5z + 5z^2 + z^3 - 4z^4$. Die Multiplikation von Polynomen ist assoziativ, d.h. für $p, q, r \in \mathbb{K}[z]$ gilt $p(qr) = (pq)r$, denn

$$\begin{aligned}
p(qr) &= \Big(\sum_i p_i z^i\Big)\Big(\Big(\sum_j q_j z^j\Big)\Big(\sum_k r_k z^k\Big)\Big) \\
&= \Big(\sum_i p_i z^i\Big)\Big(\sum_l \Big(\sum_{j+k=l} q_j r_k\Big)z^l\Big) \\
&= \sum_m \Big(\sum_{i+l=m} p_i \sum_{j+k=l} q_j r_k\Big)z^m = \sum_m \Big(\sum_{i+j+k=m} p_i q_j r_k\Big)z^m
\end{aligned}$$

und dies stimmt mit dem Polynom

$$\begin{aligned}
(pq)r &= \Big(\Big(\sum_i p_i z^i\Big)\Big(\sum_j q_j z^j\Big)\Big)\Big(\sum_k r_k z^k\Big) \\
&= \Big(\Big(\sum_{i+j=l} p_i q_j\Big)z^l\Big)\Big(\sum_k r_k z^k\Big) \\
&= \sum_m \Big(\sum_{l+k=m} \Big(\sum_{i+j=l} p_i q_j\Big)r_k\Big)z^m = \sum_m \Big(\sum_{i+j+k=m} p_i q_j r_k\Big)z^m
\end{aligned}$$

überein. Für $p, q \in \mathbb{K}[z]$ gilt auch $pq = qp$, d.h. die Multiplikation von Polynomen ist kommutativ. Das Einspolynom, $1 = 1 + 0z + 0z^2 + \cdots$ ist neutrales Element der Multiplikation, d.h. $1p = p = p1$ für alle $p \in \mathbb{K}[z]$. Schließlich ist die Multiplikation von Polynomen auch mit der Vektorraumstruktur auf $\mathbb{K}[z]$ verträglich, es gilt $r(p + q) = rp + rq$, $(p + q)r = pr + qr$ sowie $p(\lambda q) = \lambda(pq) = (\lambda p)q$, für beliebige Polynome $p, q, r \in \mathbb{K}[z]$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dies bedeutet gerade, dass $\mathbb{K}[z]$ eine kommutative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins bildet, vgl. Übungsaufagbe 15.

II.2. Teilräume. Suchen wir nach Teilmengen eines Vektorraums, die selbst einen Vektorraum bilden, werden auf den Begriff des Teilraums geführt.

II.2.1. Definition (Teilraum). Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine nicht leere Teilmenge $W \subseteq V$ wird *Teilraum* von V genannt, wenn sie abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation ist. In anderen Worten, eine nicht leere Teilmenge $W \subseteq V$ ist genau dann Teilraum von V, wenn sie folgenden beiden Bedingungen genügt:

(a) $\forall w_1, w_2 \in W : w_1 + w_2 \in W$
(b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}\, \forall w \in W : \lambda w \in W$

II.2.2. Bemerkung. Ist W ein Teilraum von V, dann gilt $0 \in W$. Nach Definition ist W nämlich nicht leer, also existiert $w \in W$. Aus (b) folgt daher $0w \in W$. Da $0w = 0$, erhalten wir somit auch $0 \in W$.

II.2.3. Bemerkung. Ist W ein Teilraum von V und $w \in W$, dann gilt auch $-w \in W$. Nach (b) gilt nämlich $(-1)w \in W$, und da $(-1)w = -w$ folgt $-w \in W$.

Ist W ein Teilraum von V, dann schränken sich Addition und Skalarmultiplikation in V zu Abbildungen $W \times W \xrightarrow{+} W$ und $\mathbb{K} \times W \xrightarrow{\cdot} W$ ein. Dadurch wird W selbst zu einem Vektorraum. Die Gültigkeit der Axiome (V1) und (V4) – (V8) für V impliziert sofort, dass diese Axiome auch für W gelten. Nach Bemerkung II.2.2 ist auch (V2) für W erfüllt. Nach Bemerkung II.2.3 genügt W schließlich auch Axiome (V3). Wir halten dies in folgender Proposition fest.

II.2.4. Proposition (Teilräume als Vektorräume). *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und W ein Teilraum von V. Dann bildet W bezüglich der eingeschränkten Verknüpfungen selbst einen $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

II.2.5. Bemerkung. $\{0\}$ und V sind stets Teilräume von V.

II.2.6. Proposition (Durchschnitt von Teilräumen). *Ist W_i, $i \in I$, eine Familie von Teilräumen eines Vektorraums V, so bildet auch deren Durchschnitt, $\bigcap_{i\in I} W_i$, einen Teilraum von V.*

Beweis. Zunächst ist der Durchschnitt jedenfalls nicht leer, denn nach Bemerkung II.2.2 gilt $0 \in \bigcap_{i\in I} W_i$. Um die Abgeschlossenheit unter der Addition zu überprüfen seien nun $w, w' \in \bigcap_{i\in I} W_i$. Für jedes $i \in I$ gilt daher $w, w' \in W_i$. Da W_i einen Teilraum bildet folgt $w + w' \in W_i$. Somit ist $w + w' \in \bigcap_{i\in I} W_i$, und der Durchschnitt daher abgeschlossen unter Addition. Um die Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation zu zeigen seien nun $\lambda \in \mathbb{K}$ und $w \in \bigcap_{i\in I} W_i$. Für jedes $i \in I$ gilt daher $w \in W_i$. Da W_i einen Teilraum bildet folgt $\lambda w \in W_i$. Somit ist $\lambda w \in \bigcap_{i\in I} W_i$ und der Durchschnitt daher auch abgeschlossen unter Skalarmultiplikation. $\square$

II.2.7. Beispiel. Sind $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in \mathbb{K}$, dann bildet die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right\}$$

einen Teilraum von $\mathbb{K}^n$. Die Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems ist daher stets ein Teilraum. Wir werden später sehen, dass sich jeder Teilraum von $\mathbb{K}^n$ in dieser Form darstellen lässt, für geeignete $m \in \mathbb{N}_0$ und $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Auch

$$\left\{ x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\},$$

d.h. die Teilmenge aller Vektoren $y \in \mathbb{K}^m$, für die das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & y_1 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & y_m \end{array}$$

wenigstens eine Lösung besitzt, bildet einen Teilraum von $\mathbb{K}^m$. Wir werden später sehen, dass sich jeder Teilraum von $\mathbb{K}^m$ in dieser Form beschreiben lässt, für geeignete $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

II.2.8. Beispiel (Teilräume von $\mathbb{K}$). Der Vektorraum $\mathbb{K} = \mathbb{K}^1$ besitzt außer den beiden trivialen Teilräumen $\{0\}$ und $\mathbb{K}$ keine weiteren Teilräume. Ist nämlich $W \subseteq \mathbb{K}$ ein Teilraum und $W \neq \{0\}$, dann existiert $w \in W$ mit $0 \neq w$, also $\lambda = (\lambda w^{-1})w \in W$ für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$, und daher $W = \mathbb{K}$.

II.2.9. Beispiel (Teilräume von $\mathbb{K}^2$). Neben den trivialen Teilräumen $\{0\}$ und $\mathbb{K}^2$ bildet auch jede Teilmenge der Form

$$\langle a \rangle = \left\{ \lambda \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix} \right) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix} \right) \;\middle|\; a_2 x_1 - a_1 x_2 = 0 \right\},$$

wobei $0 \neq a = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{K}^2$, einen Teilraum von $\mathbb{K}^2$. Wir wollen uns nun überlegen, dass dies schon alle Teilräume von $\mathbb{K}^2$ sind. Sei dazu $W \subseteq \mathbb{K}^2$ ein beliebiger Teilraum und $\{0\} \neq W$. Dann existiert $0 \neq a \in W$ und wegen der Abgeschlossenheit von W unter Skalarmultiplikation erhalten wir $\langle a \rangle \subseteq W$. Ist $\langle a \rangle \neq W$, dann existiert also $b \in W \setminus \langle a \rangle$. Wir bezeichnen die Koordinaten von a und b mit $a = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix} \right)$ und $b = \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \end{smallmatrix} \right)$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{K}$. Aus $a \neq 0$ und $b \notin W$ folgt $d := a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

Da W abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation ist, erhalten wir für jeden Vektor $\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^2$,

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \frac{x_1b_2 - x_2b_1}{d}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} + \frac{x_2a_1 - x_1a_2}{d}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix} \in W,$$

und somit $W = \mathbb{K}^2$. Insbesondere hat $\mathbb{R}^2$ neben den beiden trivialen Teilräumen $\{0\}$ und $\mathbb{R}^2$ nur Teilräume der Form $\{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ wobei $0 \neq a \in \mathbb{R}^2$. Nach Wahl eines kartesischen Koordinatensystems entsprechen letztere genau den Geraden durch den Ursprung des Koordinatensystems.

II.2.10. Beispiel (Teilräume von $\mathbb{K}^3$). Neben den trivalen Teilräumen $\{0\}$ und $\mathbb{K}^3$ besitzt der Vektorraum $\mathbb{K}^3$ auch Teilräume der Form $\langle v\rangle = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$, $v \in \mathbb{K}^3$, sowie

$$\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3 \,\middle|\, ax + by + cz = 0\right\},$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{K}$. Wir werden später sehen, dass sich jeder Teilraum von $\mathbb{K}^3$ so beschreiben lässt. Insbesondere hat $\mathbb{R}^3$ nur Teilräume dieser Gestalt. Nach Wahl eines kartesischen Koordinatensystems entsprechen die nicht-trivialen Fälle genau den Geraden bzw. Ebenen durch den Ursprung des Koordinatensystems.

II.2.11. Beispiel. Die Teilmenge $\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^2 : x_1x_2 = 0\}$ von $\mathbb{K}^2$ ist zwar abgeschlossen unter Skalarmultiplikation bildet jedoch keinen Teilraum. Auch die Teilmenge $\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}$ bildet keinen Teilraum von $\mathbb{R}^2$, obwohl sie abgeschlossen unter Addition ist. Dasselbe gilt für $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Fassen wir $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf, dann ist auch $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n$. Obwohl diese Teilmenge abgeschlossen unter Addition ist, bildet sie keinen Teilraum des komplexen Vektorraums $\mathbb{C}^n$, für $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ gilt nämlich $\mathbf{i}x \notin \mathbb{R}^n$.

II.2.12. Beispiel (Vektorräume von Funktionen aus der Analysis). Die Menge der reellwertigen stetigen Funktionen auf einem Intervall, $C([a, b], \mathbb{R})$, bildet einen Teilraum von $F([a, b], \mathbb{R})$, denn Summen und skalare Vielfache stetiger Funktionen sind wieder stetig. Ebenso ist die Menge der beschränkten Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$ ein Teilraum von $F([a, b], \mathbb{R})$. Auch die (Riemann-)integrierbaren Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$ bilden einen Teilraum von $F([a, b], \mathbb{R})$. Genauso bilden die differenzierbaren Abbildungen $(a, b) \to \mathbb{R}$ einen Teilraum von $F((a, b), \mathbb{R})$. Analog ist die Menge aller k mal stetig differenzierbaren Funktionen, $C^k((a, b), \mathbb{R})$, ein Teilraum von $F((a, b), \mathbb{R})$. Auch die Menge aller glatten Funktionen $C^\infty((a, b), \mathbb{R}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k((a, b), \mathbb{R})$ ist ein Teilraum von $F((a, b), \mathbb{R})$, vgl. Proposition II.2.6. Nach Proposition II.2.4 sind dies daher alles Vektorräume bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation von Funktionen.

II.2.13. Beispiel (Vektorräume von Folgen aus der Analysis). Die Menge der konvergenten Folgen bildet einen Teilraum von $F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, denn Summen und skalare Vielfache konvergenter Folgen sind wieder konvergent. Auch die Menge der beschränkten Folgen ist ein Teilraum von $F(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Ebenso bilden die summierbaren Folgen (Reihen) einen Teilraum von $F(\mathbb{N},\mathbb{R})$. Gleiches gilt für die Menge der absolut summierbaren Folgen oder die Menge der quadratsummierbaren Folgen.

II.2.14. Beispiel. Es bezeichne $X \subseteq \mathbb{R}$ ein um Null symmetrisches Intervall, etwa $X = (-a, a)$ mit $0 < a \leq \infty$. Dann bildet die Menge der *geraden Funktionen,*

$$G := \{f\colon X \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)\},$$

einen Teilraum von $F(X,\mathbb{R})$. Für $f, g \in G$ und $x \in X$ gilt nämlich $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$, also $f + g \in G$, und analog $\lambda f \in G$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$. Auch die Menge der *ungeraden Funktionen,*

$$U := \{f\colon X \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)\},$$

bildet einen Teilraum von $F(X,\mathbb{R})$. Für den Durchschnitt gilt $G \cap U = \{0\}$, d.h. die einzige zugleich gerade und ungerade Funktion ist die konstante Nullfunktion. Ist nämlich $f \in G \cap U$ und $x \in X$, dann folgt $f(x) = f(-x) = -f(x)$, also $2f(x) = 0$ und somit $f(x) = 0$, d.h. $f = 0$.

II.2.15. Beispiel. Für jede Menge X, ist $\{f\colon X \to \mathbb{R} \mid \forall x \in X : f(x) \geq 0\}$ zwar abgeschlossen unter Addition, bildet jedoch keinen Teilraum von $F(X,\mathbb{R})$. Dasselbe gilt für die Teilmenge $F(X,\mathbb{Z}) \subseteq F(X,\mathbb{R})$, d.h. die Menge der Funktionen mit ganzzahligen Werten. Auch ist $F(X;\mathbb{R})$ kein Teilraum von $F(X;\mathbb{C})$, denn für $0 \neq f \in F(X;\mathbb{R})$ gilt $\mathbf{i}f \notin F(X;\mathbb{R})$.

II.3. Lineare Abbildungen. Lineare Abbildungen sind Abbildungen zwischen Vektorräumen, die mit der Vektorraumstruktur, d.h. Addition und Skalarmultiplikation, verträglich sind.

II.3.1. Definition (Lineare Abbildungen). Eine Abbildung zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, $\varphi\colon V \to W$, wird *linear* genannt, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

(a) $\forall v_1, v_2 \in V : \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$
(b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}\, \forall v \in V : \varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$

Die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W wird mit $L(V,W)$ bezeichnet. Eine lineare Abbildung $V \to V$ wird auch *Endomorphismus* genannt. Die Menge aller Endomorphismen von V werden wir mit $\operatorname{end}(V)$ bezeichnen.

II.3.2. Bemerkung. Für jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ gilt $\varphi(0) = 0$. Aus der Linearität erhalten wir nämlich $\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0)$ und Addition von $-\varphi(0)$ auf beiden Seiten liefert die gewünschte Gleichung, $0 = \varphi(0)$.

II.3.3. Proposition (Komposition linearer Abbildungen). *Sind V, W und U drei $\mathbb{K}$-Vektorräume dann gilt:*

(a) Die identische Abbildung $\mathrm{id}_V\colon V \to V$, $\mathrm{id}_V(v) := v$, ist linear.
(b) Für je zwei lineare Abbildungen $\varphi\colon V \to W$ und $\psi : W \to U$ ist auch die Komposition $\psi \circ \varphi : V \to U$ linear.

(c) *Ist $\varphi : V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung, dann ist auch die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : W \to V$ linear.*

Beweis. Behauptung (a) ist trivial. Ad (b): Sind $v_1, v_2 \in V$ so gilt:

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(v_1 + v_2) &= \psi(\varphi(v_1 + v_2)) = \psi\big(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)\big)\\ &= \psi(\varphi(v_1)) + \psi(\varphi(v_2)) = (\psi \circ \varphi)(v_1) + (\psi \circ \varphi)(v_2)\end{aligned}$$

Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ erhalten wir analog $(\psi \circ \varphi)(\lambda v) = \psi(\varphi(\lambda v)) = \psi(\lambda\varphi(v)) = \lambda\psi(\varphi(v)) = \lambda(\psi \circ \varphi)(v)$. Dies zeigt, dass die Komposition $\psi \circ \varphi$ linear ist. Um (c) zu verifizieren sei nun $\varphi : V \to W$ eine lineare Bijektion mit Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : W \to V$. Sind $w_1, w_2 \in W$ so gilt:

$$\begin{aligned}&\varphi^{-1}(w_1 + w_2)\\ &\quad= \varphi^{-1}\big(\varphi(\varphi^{-1}(w_1)) + \varphi(\varphi^{-1}(w_2))\big) && \text{denn } \forall w \in W : w = \varphi(\varphi^{-1}(w))\\ &\quad= \varphi^{-1}\big(\varphi\big(\varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2)\big)\big) && \text{Linearität von } \varphi\\ &\quad= \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2) && \text{denn } \forall v \in V : \varphi^{-1}(\varphi(v)) = v\end{aligned}$$

Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $w \in W$ erhalten wir analog $\varphi^{-1}(\lambda w) = \varphi^{-1}\big(\lambda\varphi(\varphi^{-1}(w))\big) = \varphi^{-1}\big(\varphi(\lambda\varphi^{-1}(w))\big) = \lambda\varphi^{-1}(w)$. Dies zeigt, dass die Umkehrabbildung φ^{-1} linear ist. □

II.3.4. Beispiel. Sind $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in \mathbb{K}$, dann ist die durch

$$\psi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

definierte Abbildung $\psi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linear, vgl. Übungsaufgabe 1. Wir werden später sehen, dass jede lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ von dieser Form ist, vgl. Satz II.4.4 unten.

II.3.5. Beispiel (Inklusionen). Für jeden Teilraum W eines Vektorraums V ist die *kanonische Inklusionsabbildung,* $W \to V$, $w \mapsto w$, offensichtlich linear. Die Verknüpfungen auf W wurden genau so definiert, dass diese Inklusionsabbildung linear wird.

II.3.6. Beispiel (Koordinatenprojektionen). Für jedes $i = 1, \dots, n$ ist die Abbildung $p_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $p_i(x) := x_i$, die einem Vektor seine i-te Koordinate zuordnet, linear. Sie wird als i-te *Koordinatenprojektion* bezeichnet.

II.3.7. Beispiel (Polynome als Funktionen). Ist $p = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$ ein Polynom in $\mathbb{K}[z]$ und $x \in \mathbb{K}$, so können wir x in p einsetzen und erhalten eine Zahl $p(x) \in \mathbb{K}$,

$$p(x) := p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots$$

wobei die rechte Seite eine endliche Summe in $\mathbb{K}$ darstellt. Jedes Polynom $p \in \mathbb{K}[z]$ liefert daher eine Funktion $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto p(x)$. Wir erhalten somit eine Abbildung

$\phi\colon \mathbb{K}[z] \to F(\mathbb{K},\mathbb{K})$, die einem Polynom $p \in \mathbb{K}[z]$ die Funktion $x \mapsto p(x)$ zuordnet. Diese Abbildung ist linear d.h. es gilt $\phi(p+q) = \phi(p)+\phi(q)$ sowie $\phi(\lambda p) = \lambda\phi(p)$, für beliebige $p, q \in \mathbb{K}[z]$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. In anderen Worten, für jedes $x \in \mathbb{K}$ ist

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) \quad \text{und} \quad (\lambda p)(x) = \lambda p(x).$$

Darüber hinaus gilt auch $\phi(pq) = \phi(p)\phi(q)$, d.h. für jedes $x \in \mathbb{K}$ haben wir

$$(pq)(x) = p(x)q(x).$$

Die Abbildung $\phi\colon \mathbb{K}[z] \to F(\mathbb{K},\mathbb{K})$ ist daher sogar ein Homomorphismus von Algebren, d.h. eine lineare Abbildung die auch mit der Multiplikation verträglich ist, vgl. Beispiel II.1.7 und Beispiel II.1.9. Übungsaufgabe 42 behandelt eine Verallgemeinerung dieses Beispiels.

II.3.8. Beispiel. Sei V ein Vektorraum und X eine Menge. Für jedes $x \in X$ ist die Abbildung $\mathrm{ev}_x\colon F(X,V) \to V$, $\mathrm{ev}_x(f) := f(x)$, linear. Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ ist auch die Abbildung $F(X,V) \to F(A,V)$, $f \mapsto f|_A$, linear. Allgemeiner ist für jede Abbildung $g : Y \to X$ die Zuordnung $F(X,V) \to F(Y,V)$, $f \mapsto f \circ g$, eine lineare Abbildung, vgl. Übungsaufgabe 24.

II.3.9. Beispiel (Lineare Abbildungen aus der Analysis). Es seien $a < b$ zwei reelle Zahlen. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ liefert die Ableitung eine lineare Abbildung,

$$C^k((a,b),\mathbb{R}) \to C^{k-1}((a,b),\mathbb{R}), \quad f \mapsto f',$$

denn $(f+g)' = f' + g'$ und $(\lambda f)' = \lambda f'$ für alle $f, g \in C^k((a,b),\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Auch das Integral liefert eine lineare Abbildung,

$$C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_a^b f(x)\,dx,$$

denn es gilt $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ und $\int_a^b (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$ für alle $f, g \in C([a,b],\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Bezeichnet $F_{\mathrm{conv}}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \subseteq F(\mathbb{N},\mathbb{R})$ den Teilraum der konvergenten Folgen, dann ist die Abbildung

$$F_{\mathrm{conv}}(\mathbb{N},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n,$$

linear, denn es gilt $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$ und $\lim_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n$ für je zwei konvergente Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

II.3.10. Definition (Isomorphismen). Eine Bijektion zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, $\varphi\colon V \to W$, wird *(linearer) Isomorphismus* genannt, wenn $\varphi\colon V \to W$ und ihre Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\colon W \to V$ beide linear sind. Existiert ein Isomorphismus zwischen V und W, dann werden V und W *isomorph* genannt und wir schreiben $V \cong W$.

II.3.11. Bemerkung. Nach Proposition II.3.3(c) ist jede lineare Bijektion schon ein Isomorphismus, die Umkehrabbildung ist dann automatisch linear.

Sind zwei Vektorräume isomorph, $V \cong W$, dann können sie vom Standpunkt der linearen Algebra als im Wesentlichen gleich betrachtet werden. Bis auf Umbenennung der Elemente mit Hilfe eines Isomorphismus $V \cong W$, entsprechen die Vektorraumoperationen in V ja genau den Vektorraumoperationen in W.

Für jeden Vektorraum V ist die identische Abbildung, $\mathrm{id}_V\colon V \to V$, ein Isomorphismus, $\mathrm{id}_V^{-1} = \mathrm{id}_V$, es gilt daher $V \cong V$. Ist $\varphi\colon V \to W$ ein Isomorphismus, dann ist auch die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\colon W \to V$ ein Isomorphismus, $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$, aus $V \cong W$ folgt daher stets $W \cong V$. Sind $\varphi\colon V \to W$ und $\psi\colon W \to U$ zwei Isomorphismen, dann ist auch deren Komposition $\psi \circ \varphi\colon V \to U$ ein Isomorphismus. Die letzte Behauptung folgt aus Proposition II.3.3(b) und der Formel für die Umkehrabbildung einer Komposition, $(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$. Mit $V \cong W$ und $W \cong U$ gilt daher auch $V \cong U$.

Die Menge aller invertierbaren linearen Abbildungen $V \to V$ wird mit $\mathrm{GL}(V)$ bezeichnet. Aus dem vorangehenden Absatz folgt sofort, dass $\mathrm{GL}(V)$ bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe bildet. Sie wird die *allgemeine lineare Gruppe* genannt. Diese Gruppe ist i.A. nicht abelsch, d.h. für $\varphi, \psi \in \mathrm{GL}(V)$ gilt i.A. $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$, vgl. Übungsaufgabe 25.

II.3.12. Beispiel. Betrachte den Teilraum

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 : x + 2y + 3z = 0 \right\}$$

von $\mathbb{K}^3$. Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{K}^2 \xrightarrow{\cong} W, \qquad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \mapsto \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda-3\mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$$

eine lineare Bijektion, also ein Isomorphismus. Es gilt daher $W \cong \mathbb{K}^2$. Wir werden später sehen, dass jeder Teilraum von $\mathbb{K}^n$ isomorph zu $\mathbb{K}^m$ ist, für ein eindeutig bestimmtes $m \in \mathbb{N}_0$, für das auch $0 \leq m \leq n$ gelten muss.

II.3.13. Beispiel. Sind $m < n$ zwei natürliche Zahlen, dann bildet

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x_{m+1} & = & 0 \\ & \vdots & \\ x_n & = & 0 \end{array} \right\}$$

einen Teilraum von $\mathbb{K}^n$, der im Wesentlichen mit $\mathbb{K}^m$ übereinstimmt. Genauer ist $\varphi\colon \mathbb{K}^m \to W$, $\varphi(x) := \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, eine lineare Bijektion, also ein Isomorphismus.

II.3.14. Beispiel. Für $0 \neq x \in \mathbb{K}^n$ bildet $W := \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{K}\}$ einen Teilraum von $\mathbb{K}^n$, der zu $\mathbb{K}$ isomorph ist. Die Abbildung $\varphi\colon \mathbb{K} \to W$, $\lambda \mapsto \lambda x$, ist eine lineare Bijektion, also ein Isomorphismus, vgl. Bemerkung II.3.11.

II.3.15. Beispiel. Vektoren aus $\mathbb{K}^n$ können mit Funktionen $\{1, \dots, n\} \to \mathbb{K}$ identifiziert werden, indem die i-te Komponente eines Vektors als Funktionswert bei i interpretiert wird. Dabei entspricht die Komponentenweise Addition von Vektoren in $\mathbb{K}^n$ genau der punktweisen Addition von Funktionen, und analog für die Skalarmultiplikation. Dies lässt sich wie folgt präzisieren. Die offensichtlich bijektive Abbildung,

$$\phi : F(\{1,\dots,n\},\mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n, \qquad \phi(f) := \begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix},$$

ist ein linearer Isomorphismus, denn für $f, g \in F(\{1,\dots,n\},\mathbb{K})$ gilt

$$\phi(f+g) = \begin{pmatrix} (f+g)(1) \\ \vdots \\ (f+g)(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1)+g(1) \\ \vdots \\ f(n)+g(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(1) \\ \vdots \\ g(n) \end{pmatrix} = \phi(f)+\phi(g)$$

und analog auch $\phi(\lambda f) = \lambda\phi(f)$, für alle $\lambda \in \mathbb{K}$. Nach Bemerkung II.3.11 ist die Umkehrabbildung automatisch linear.

II.3.16. Beispiel. Es bezeichne $F_0(\mathbb{N}_0;\mathbb{K}) \subseteq F(\mathbb{N}_0,\mathbb{K})$ den Teilraum aller Folgen, deren Folgenglieder fast alle gleich 0 sind. Ordnen wir einem Polynom die Folge seiner Koeffizienten zu, so erhalten wir einen linearen Isomorphismus

$$\mathbb{K}[z] \cong F_0(\mathbb{N}_0;\mathbb{K}), \quad p = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots \quad \leftrightarrow \quad (p_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$$

Analog erhalten wir einen Isomorphismus $\mathbb{K}[z]_{\leq n} \cong \mathbb{K}^{n+1}$, wobei $\mathbb{K}[z]_{\leq n}$ den Teilraum aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich n bezeichnet.

II.3.17. Beispiel. Die Vektorräume $\mathbb{K} = \mathbb{K}^1$ und $\mathbb{K}^2$ sind nicht isomorph, denn eine lineare Abbildung $\mathbb{K} \to \mathbb{K}^2$ kann niemals surjektiv sein. Um dies einzusehen, sei $\varphi\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}^2$ linear. Wir bezeichnen die beiden Komponenten von $\varphi(1)$ mit x_1 und x_2, d.h. $\varphi(1) = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt dann wegen der Linearität $\varphi(\lambda) = \lambda\varphi(1) = \lambda\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{smallmatrix}\right)$. Liegt der Vektor $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ im Bild von φ, dann existiert $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\varphi(\lambda) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und aus der Formel oben folgt $\left(\begin{smallmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, somit $x_1 \neq 0$ und $x_2 = 0$. Liegt $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ im Bild von φ, dann folgt analog $x_1 = 0$ und $x_2 \neq 0$. Liegen beide Vektoren, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, im Bild von φ erhalten wir einen Widerspruch. Die Abbildung φ kann daher nicht surjektiv sein. Damit ist $\mathbb{K} \ncong \mathbb{K}^2$ gezeigt. Wir werden später sehen, dass $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ genau dann isomorph sind, wenn $n = m$ gilt.

II.3.18. Proposition. *Sind V und W zwei Vektorräume über $\mathbb{K}$, dann ist die Menge aller linearen Abbildungen, $L(V,W)$, ein Teilraum von $F(V,W)$. Insbesondere bildet $L(V,W)$ bezüglich punktweiser Addition und Sakalarmultiplikation,*

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(v) := \varphi_1(v) + \varphi_2(v) \quad \text{und} \quad (\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$$

einen $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in L(V,W)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in V$. Die Vektorraumstruktur ist in folgendem Sinn mit der Komposition linearer Abbildungen verträglich: Für beliebige $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in L(V,W)$, $\psi, \psi_1, \psi_2 \in L(W,U)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

(a) $(\psi_1 + \psi_2) \circ \varphi = \psi_1 \circ \varphi + \psi_2 \circ \varphi$ und $(\lambda\psi) \circ \varphi = \lambda(\psi \circ \varphi)$, sowie

(b) $\psi \circ (\varphi_1 + \varphi_2) = \psi \circ \varphi_1 + \psi \circ \varphi_2$ und $\psi \circ (\lambda\varphi) = \lambda(\psi \circ \varphi)$.

Beweis. Zunächst ist $L(V,W)$ nicht leer, denn die konstante Nullabbildung $0\colon V \to W$, $0(v) := 0$, ist offensichtlich linear. Um die Abgeschlossenheit unter Addition zu zeigen, seien nun $\varphi_1\colon V \to W$ und $\varphi_2\colon V \to W$ zwei lineare Abbildungen. Für beliebige $v_1, v_2 \in V$ gilt dann:

$$\begin{aligned}(\varphi_1+\varphi_2)(v_1+v_2) &= \varphi_1(v_1+v_2)+\varphi_2(v_1+v_2)\\ &= \big(\varphi_1(v_1)+\varphi_1(v_2)\big)+\big(\varphi_2(v_1)+\varphi_2(v_2)\big)\\ &= \big(\varphi_1(v_1)+\varphi_2(v_1)\big)+\big(\varphi_1(v_2)+\varphi_2(v_2)\big)\\ &= (\varphi_1+\varphi_2)(v_1)+(\varphi_1+\varphi_2)(v_2),\end{aligned}$$

Analog erhalten wir für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ und jedes $v \in V$ auch $(\varphi_1+\varphi_2)(\lambda v) = \varphi_1(\lambda v)+\varphi_2(\lambda v) = \lambda\varphi_1(v)+\lambda\varphi_2(v) = \lambda(\varphi_1(v)+\varphi_2(v)) = \lambda(\varphi_1+\varphi_2)(v)$. Dies zeigt, dass auch die Summe $\varphi_1+\varphi_2$ eine lineare Abbildung ist, $L(V,W)$ ist daher abgeschlossen unter Addition. Für die Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation sei nun $\varphi\colon V \to W$ linear und $\lambda \in \mathbb{K}$. Für beliebige $v_1, v_2 \in V$ gilt dann:

$$\begin{aligned}(\lambda\varphi)(v_1+v_2) = \lambda\varphi(v_1+v_2) &= \lambda\big(\varphi(v_1)+\varphi(v_2)\big)\\ &= \lambda\varphi(v_1)+\lambda\varphi(v_2) = (\lambda\varphi)(v_1)+(\lambda\varphi)(v_2).\end{aligned}$$

Für $\mu \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ erhalten wir analog $(\lambda\varphi)(\mu v) = \lambda\varphi(\mu v) = \lambda(\mu\varphi(v)) = (\lambda\mu)\varphi(v) = (\mu\lambda)\varphi(v) = \mu(\lambda\varphi(v)) = \mu(\lambda\varphi)(v)$. Somit ist $\lambda\varphi$ linear, und $L(V,W)$ daher abgeschlossen unter Skalarmultiplikation. Dies zeigt, dass $L(V,W)$ einen Teilraum von $F(V,W)$ bildet.

Ad (a): Für $\varphi \in L(V,W)$, $\psi_1, \psi_2 \in L(W,U)$ und $v \in V$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\big((\psi_1+\psi_2)\circ\varphi\big)(v) = (\psi_1+\psi_2)(\varphi(v)) &= \psi_1(\varphi(v))+\psi_2(\varphi(v))\\ &= (\psi_1\circ\varphi)(v)+(\psi_2\circ\varphi)(v) = \big(\psi_1\circ\varphi+\psi_2\circ\varphi\big)(v).\end{aligned}$$

Da dies für beliebige $v \in V$ gilt, folgt $(\psi_1+\psi_2)\circ\varphi = \psi_1\circ\varphi+\psi_2\circ\varphi$. Analog ist $((\lambda\psi)\circ\varphi)(v) = (\lambda\psi)(\varphi(v)) = \lambda\psi(\varphi(v)) = \lambda(\psi\circ\varphi)(v) = (\lambda(\psi\circ\varphi))(v)$, also $(\lambda\psi)\circ\varphi = \lambda(\psi\circ\varphi)$, für alle $\varphi \in L(V,W)$, $\psi \in L(V,W)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Ad (b): Für $\varphi_1, \varphi_2 \in L(V,W)$, $\psi \in L(W,U)$ und $v \in V$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\big(\psi\circ(\varphi_1+\varphi_2)\big)(v) &= \psi\big((\varphi_1+\varphi_2)(v)\big)\\ &= \psi\big(\varphi_1(v)+\varphi_2(v)\big)\\ &= \psi(\varphi_1(v))+\psi(\varphi_2(v))\\ &= (\psi\circ\varphi_1)(v)+(\psi\circ\varphi_2)(v)\\ &= \big(\psi\circ\varphi_1+\psi\circ\varphi_2\big)(v),\end{aligned}$$

also $\psi\circ(\varphi_1+\varphi_2) = \psi\circ\varphi_1+\psi\circ\varphi_2$. Analog gilt $(\psi\circ(\lambda\varphi))(v) = \psi((\lambda\varphi)(v)) = \psi(\lambda\varphi(v)) = \lambda\psi(\varphi(v)) = \lambda(\psi\circ\varphi)(v) = (\lambda(\psi\circ\varphi))(v)$, also $\psi\circ(\lambda\varphi) = \lambda(\psi\circ\varphi)$, für alle $\varphi \in L(V,W)$, $\psi \in L(W,U)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. $\square$

II.3.19. Bemerkung. Nach Proposition II.3.18 oben bildet $\operatorname{end}(V)$ eine assoziative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins. Diese Algebra ist i.A. nicht kommutativ. Betrachten wir etwa die beiden linearen Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $\varphi\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) := \left(\begin{smallmatrix}x_2\\0\end{smallmatrix}\right)$, und $\psi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $\psi\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) := \left(\begin{smallmatrix}0\\x_1\end{smallmatrix}\right)$, dann gilt $(\varphi\circ\psi)\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}x_1\\0\end{smallmatrix}\right)$, sowie $(\psi\circ\varphi)\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\x_2\end{smallmatrix}\right)$, also $(\varphi\circ\psi)\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) = (\psi\circ\varphi)\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, und daher $\varphi\circ\psi \neq \psi\circ\varphi$.

II.3.20. Proposition. *Ist $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, dann gilt:*

(a) Für jeden Teilraum W' von W ist auch $\varphi^{-1}(W')$ Teilraum von V.
(b) Für jeden Teilraum V' von V ist auch $\varphi(V')$ Teilraum von W.

Beweis. Ad (a): Zunächst ist $\varphi^{-1}(W')$ nicht leer, denn aus $\varphi(0) = 0 \in W'$ folgt $0 \in \varphi^{-1}(W')$. Für $v_1, v_2 \in \varphi^{-1}(W')$ folgt $\varphi(v_1), \varphi(v_2) \in W'$, also $\varphi(v_1+v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \in W'$ und somit $v_1 + v_2 \in \varphi^{-1}(W')$. Dies zeigt, dass $\varphi^{-1}(W')$ abgeschlossen unter Addition ist. Sind nun $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in \varphi^{-1}(W')$, dann folgt $\varphi(v) \in W'$, also $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) \in W'$ und daher $\lambda v \in \varphi^{-1}(W')$. Dies zeigt, dass $\varphi^{-1}(W')$ auch abgeschlossen unter Skalarmultiplikation ist.

Ad (b): Zunächst ist $\varphi(V')$ nicht leer, denn $0 = \varphi(0) \in \varphi(V')$. Seien nun $w_1, w_2 \in \varphi(V')$. Es existieren daher $v_1, v_2 \in V'$ mit $\varphi(v_1) = w_1$ und $\varphi(v_2) = w_2$. Wir erhalten $w_1+w_2 = \varphi(v_1)+\varphi(v_2) = \varphi(v_1+v_2) \in \varphi(V')$, denn $v_1+v_2 \in V'$. Dies zeigt, dass $\varphi(V')$ abgeschlossen unter Addition ist. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ und $w \in \varphi(V')$, dann existiert $v \in V'$ mit $\varphi(v) = w$ und wir erhalten $\lambda w = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \in \varphi(V')$, denn $\lambda v \in V'$. Somit ist $\varphi(V')$ auch abgeschlossen unter Skalarmultiplikation. $\square$

II.3.21. Definition (Kern und Bild). Unter dem *Kern* einer linearen Abbildung $\varphi\colon V \to W$ verstehen wir den Teilraum

$$\ker(\varphi) := \varphi^{-1}(0) = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V.$$

Unter dem *Bild* von φ verstehen wir den Teilraum

$$\operatorname{img}(\varphi) := \varphi(V) = \{\varphi(v) \mid v \in V\} \subseteq W.$$

Nach Proposition II.3.20 sind beides tatsächlich Teilräume.

Wir beenden diesen Abschnitt mit folgendem einfachen Resultat, das oft verwendet wird um die Injektivität linearer Abbildungen zu überprüfen.

II.3.22. Proposition. *Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ ist genau dann injektiv wenn sie trivialen Kern hat, d.h. genau dann wenn $\ker(\varphi) = \{0\}$ gilt.*

Beweis. Ist φ injektiv, dann besteht $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(0)$ aus höchstens einem Element, und da $\varphi(0) = 0$, folgt $\ker(\varphi) = \{0\}$. Dies zeigt die eine Implikation. Sei nun umgekehrt $\ker(\varphi) = \{0\}$. Um zu zeigen, dass φ injektiv ist betrachten wir $v_1, v_2 \in V$ mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Aus der Linearität von φ erhalten wir $\varphi(v_2 - v_1) = \varphi(v_2) - \varphi(v_1) = 0$, also $v_2 - v_1 \in \ker(\varphi)$, somit $v_2 - v_1 = 0$ und daher $v_1 = v_2$. Damit ist auch die umgekehrte Implikation gezeigt. $\square$

II.4. Matrizen. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Wir wollen in diesem Abschnitt lineare Abbildungen $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit Hilfe von Matrizen beschreiben. Unter einer $(m \times n)$-*Matrix* über einem Körper $\mathbb{K}$ verstehen wir ein rechteckiges Schema der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit Eintragungen $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen über $\mathbb{K}$ bezeichnen wir mit $M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Die Summe zweier $(m \times n)$-Matrizen wird elementweise, d.h. durch

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

definiert. Beachte, dass die Summe zweier Matrizen nur dann definiert ist, wenn sie gleiche Zeilen- und Spaltenzahl haben. Auch die Skalarmultiplikation mit $\lambda \in \mathbb{K}$ ist elementweise definiert, d.h.

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Mit diesen Operationen wird $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{K}$. Fassen die Eintragungen einer $(m \times n)$-Matrix in einem Spaltenvektor mit mn vielen Komponenten zusammen, so erhalten wir einen Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen,

$$M_{m\times n}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{mn}.$$

II.4.1. Beispiel. Etwa ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 3/5 \\ 4/5 & 1 & 6/5 \\ 7/5 & 8/5 & 9/5 \end{pmatrix}.$$

Unter dem *Produkt* einer $(m \times n)$-Matrix mit einer $(n \times l)$-Matrix verstehen wir die $(m \times l)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{kl} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{mk} b_{kl} \end{pmatrix}$$

Beachte, dass das Matrizenprodukt nur definiert ist, wenn die Spaltenzahl der linken Matrix mit der Zeilenzahl der rechten Matrix übereinstimmt. Die Bedeutung dieses Produkts wird in Satz II.4.4 unten klar werden. Unter der $(n \times n)$-Einheitsmatrix, $I_n \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, verstehen wir die Matrix

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Diagonaleinträge gleich 1 und alle anderen Eintragungen gleich 0 sind. Die Einheitsmatrizen sind neutrale Element der Matrizenmultiplikation.

II.4.2. Beispiel. Etwa ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \\ 9 & 7 \\ 11 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Um eine kompaktere Schreibweise zur Verfügung zu haben, bezeichnen wir den Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte einer Matrix A mit A_{ij}. Für $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n\times l}(\mathbb{K})$ gilt daher nach Definition des Matrizenprodukts

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}, \qquad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq l.$$

Addition und Skalarmultiplikation lassen sich damit wie folgt schreiben,

$$(A + A')_{ij} = A_{ij} + A'_{ij} \qquad (\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,$$

wobei $A, A' \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Für die Einheitsmatrix erhalten wir

$$(I_n)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases} \tag{II.1}$$

Das Symbol δ_{ij} wird *Kronecker-Symbol* genannt.

II.4.3. Proposition (Rechenreglen für Matrizen). *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für Matrizen $A, A' \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B, B' \in M_{n\times l}(\mathbb{K})$, $C \in M_{l\times k}(\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:*

(a) $(AB)C = A(BC)$
(b) $I_m A = A = A I_n$
(c) $(A + A')B = AB + A'B$ *und* $(\lambda A)B = \lambda(AB)$
(d) $A(B + B') = AB + AB'$ *und* $A(\lambda B) = \lambda(AB)$

Beweis. Ad (a): Für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq k$ gilt

$$\begin{aligned}\big((AB)C\big)_{ij} &= \sum_{s=1}^{l}(AB)_{is}C_{sj} = \sum_{s=1}^{l}\Big(\sum_{t=1}^{n}A_{it}B_{ts}\Big)C_{sj} = \sum_{s=1}^{l}\sum_{t=1}^{n}A_{it}B_{ts}C_{sj} \\ &= \sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{l}A_{it}B_{ts}C_{sj} = \sum_{t=1}^{n}A_{it}\sum_{s=1}^{l}B_{ts}C_{sj} = \sum_{t=1}^{n}A_{it}(BC)_{tj} = \big(A(BC)\big)_{ij}\end{aligned}$$

also $(AB)C = A(BC)$. Ad (b): Für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ gilt wegen (II.1)

$$(I_mA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(I_m)_{ik}A_{kj} = A_{ij},$$

also $I_mA = A$. Analog lässt sich $AI_n = A$ zeigen. Ad (c): Für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq l$ gilt

$$\begin{aligned}\big((A+A')B\big)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}(A+A')_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(A_{ik}+A'_{ik})B_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{n}A'_{ik}B_{kj} = (AB)_{ij} + (A'B)_{ij} = (AB+A'B)_{ij}\end{aligned}$$

also $(A+A')B = AB + A'B$. Analog haben wir $((\lambda A)B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(\lambda A)_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\lambda A_{ik}B_{kj} = \lambda\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj} = \lambda(AB)_{ij} = (\lambda(AB))_{ij}$, also $(\lambda A)B = \lambda(AB)$. Die letzte Behauptung (d) lässt sich analog beweisen. □

II.4.4. Satz. *Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n, m \in \mathbb{N}$. Jede Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ definiert eine lineare Abbildung $\psi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi_A(x) := Ax$, und jede lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist von dieser Form für eine eindeutig bestimmte Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Dabei stimmt der i-te Spaltenvektor von A mit dem Bild des i-ten Einheitsvektors, $\psi_A(e_i) \in \mathbb{K}^m$, überein. Diese Zuordnung,*

$$M_{m\times n}(\mathbb{K}) \cong L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), \quad A \leftrightarrow \psi_A,$$

ist ein linearer Isomorphismus, es gilt daher

$$\psi_{A+A'} = \psi_A + \psi_{A'} \qquad \text{und} \qquad \psi_{\lambda A} = \lambda\psi_A,$$

für beliebige $A, A' \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Weiters haben wir

$$\psi_{AB} = \psi_A \circ \psi_B \qquad \text{sowie} \qquad \psi_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n},$$

für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n\times k}(\mathbb{K})$.

Beweis. Die Abbildung ψ_A ist linear, denn nach Proposition II.4.3(d) gilt $\psi_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = \psi_A(x) + \psi_A(y)$ und $\psi_A(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda\psi_A(x)$, wobei $x, y \in \mathbb{K}^n$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Offensichtlich ist $\psi_A(e_i) = Ae_i$ gerade der i-te Spaltenvektor von A. Die Matrix A ist also durch die lineare Abbildung ψ_A eindeutig bestimmt, die Zuordnung $M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $A \mapsto \psi_A$ ist daher injektiv.

Wir werden nun zeigen, dass diese Zuordnung auch surjektiv ist. Sei dazu $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ eine beliebige lineare Abbildung. Es bezeichne $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ jene Matrix deren i-ter Spaltenvektoren mit $\varphi(e_i) \in \mathbb{K}^m$ überein stimmt. Es gilt daher $\psi_A(e_i) = \varphi(e_i)$, für jedes $i = 1, \dots, n$. Ist nun $x \in \mathbb{K}^n$ mit Komponenten $x_i \in \mathbb{K}$, dann gilt offensichtlich $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Aus der Linearität von φ und ψ_A folgt daher

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) &= x_1\varphi(e_1) + \cdots + x_n\varphi(e_n)\\ &= x_1\psi_A(e_1) + \cdots + x_n\psi_A(e_n) = \psi_A(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = \psi_A(x).\end{aligned}$$

Da dies für jeden Vektor $x \in \mathbb{K}^n$ gilt, erhalten wir $\varphi = \psi_A$. Dies zeigt, dass die Zuordnung $M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $A \mapsto \psi_A$, auch surjektiv ist.

Aus Proposition II.4.3(c) erhalten wir $\psi_{A+A'}(x) = (A + A')x = Ax + A'x = \psi_A(x) + \psi_{A'}(x) = (\psi_A + \psi_{A'})(x)$, für jedes $x \in \mathbb{K}^n$, also $\psi_{A+A'} = \psi_A + \psi_{A'}$. Analog lässt sich $\psi_{\lambda A} = \lambda\psi_A$ nachrechnen. Somit ist $M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $A \mapsto \psi_A$, eine lineare Bijektion, also ein Isomorphismus, siehe Bemerkung II.3.11.

Aus Proposition II.4.3(a) erhalten wir auch $\psi_{AB}(x) = (AB)x = A(Bx) = \psi_A(Bx) = \psi_A(\psi_B(x)) = (\psi_A \circ \psi_B)(x)$, für jedes $x \in \mathbb{K}^k$, also $\psi_{AB} = \psi_A \circ \psi_B$. Analog folgt aus Proposition II.4.3(b) sofort $\psi_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$. □

II.4.5. Bemerkung. Nach Proposition II.4.3 bilden die quadratischen Matrizen, $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, eine assoziative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins. Nach Satz II.4.4 ist der lineare Isomorphismus $M_{n\times n}(\mathbb{K}) \cong \mathrm{end}(\mathbb{K}^n)$, $A \leftrightarrow \psi_A$, sogar ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren. Die Algebra $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist i.A. nicht kommutativ, etwa gilt $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, vgl. Bemerkung II.3.19. Im Fall $n = 1$ erhalten wir den Grundkörper, $M_{1\times 1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$.

Eine quadratische Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ wird *invertierbar* genannt, wenn eine Matrix $A' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ existiert, sodass $AA' = I_n = A'A$. In diesem Fall ist die Matrix A' eindeutig bestimmt, denn aus $AA'' = I_n = A''A$ folgt mit Proposition II.4.3 $A'' = I_nA'' = (A'A)A'' = A'(AA'') = A'I_n = A'$. Diese eindeutig bestimmte Matrix wird *Inverse* von A genannt und von nun an mit A^{-1} bezeichnet, für eine invertierbare Matrix A gilt daher

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

Mit A ist offensichtlich auch A^{-1} invertierbar,

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Sind $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ zwei invertierbare Matrizen, dann ist auch AB invertierbar mit Inverser

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

denn $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ und analog erhalten wir $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$.

Die Menge aller invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen über $\mathbb{K}$ wird mit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ bezeichnet. Nach dem vorangehenden Absatz bildet $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ mit dem Matrizenprodukt eine Gruppe. Diese Gruppe ist i.A. nicht abelsch. Zum Beispiel sind die beiden Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ invertierbar, $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, aber $AB = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) = BA$.

II.4.6. Korollar. *Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn die lineare Abbildung, $\psi_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $\psi_A(x) = Ax$, invertierbar ist und in diesem Fall gilt $\psi_A^{-1} = \psi_{A^{-1}}$. Der Isomorphismus aus Satz II.4.4 schränkt sich daher zu einem Gruppenisomorhismus $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \cong \mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$, $A \leftrightarrow \psi_A$, ein.*

Beweis. Ist $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertierbar, dann folgt $\psi_A \circ \psi_{A^{-1}} = \psi_{AA^{-1}} = \psi_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$ und analog $\psi_{A^{-1}} \circ \psi_A = \psi_{A^{-1}A} = \psi_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$. Somit ist $\psi_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ eine invertierbare lineare Abbildung mit Umkehrabbildung $\psi_A^{-1} = \psi_{A^{-1}}$. Sei nun umgekehert $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, sodass $\psi_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ invertierbar ist. Nach Satz II.4.4 existiert daher $B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ mit $\psi_A \circ \psi_B = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} = \psi_B \circ \psi_A$. Wir erhalten $\psi_{AB} = \psi_A \circ \psi_B = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} = \psi_{I_n}$ und analog $\psi_{BA} = \psi_B \circ \psi_A = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} = \psi_{I_n}$. Aus Satz II.4.4 folgt somit $AB = I_n = BA$, also ist die Matrix A invertierbar. □

II.4.7. Beispiel. Eine (1×1)-Matrix $A = (a) \in M_{1\times 1}(\mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn $a \neq 0$. In diesem Fall gilt $A^{-1} = (a^{-1})$.

II.4.8. Beispiel. Eine (2×2)-Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn $ad - bc \neq 0$. In diesem Fall gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{II.2}$$

Ist nämlich $ad - bc \neq 0$ dann gilt

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} da-bc & db-bd \\ -ca+ac & -cb+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$

also ist A invertierbar mit Inverser (II.2). Sei nun umgekehrt $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ invertierbar mit Inverser $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$. Da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix},$$

erhalten wir $aa' + bc' = 1$, $ab' + bd' = 0$, $ca' + dc' = 0$ und $cb' + dd' = 1$. Daraus folgt $(ad-bc)(a'd'-b'c') = (aa'+bc')(cb'+dd') = 1 \cdot 1 = 1$, also muss $ad-bc \neq 0$ gelten.

II.4.9. Beispiel. Wir wollen die Umkehrabbildung der linearen Abbildung $\varphi \colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $\varphi\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x_1+2x_2 \\ 3x_1+5x_2 \end{smallmatrix}\right)$, bestimmen, sofern diese existiert. Offensichtlich gilt $\varphi\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) = A\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)$ mit $A = \left(\begin{smallmatrix}1&2\\3&5\end{smallmatrix}\right)$. Nach Beispiel II.4.8 ist A invertierbar mit Inverser $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}-5&2\\3&-1\end{smallmatrix}\right)$. Nach Korollar II.4.6 ist daher auch φ invertierbar mit Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\end{smallmatrix}\right) = A^{-1}\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-5&2\\3&-1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-5y_1+2y_2\\3y_1-y_2\end{smallmatrix}\right)$.

Wir wollen an dieser Stelle noch einfache Eigenschaften einer weiteren Operationen mit Matrizen zusammenstellen, deren Bedeutung aber erst später klar werden wird. Unter der *Transponierten* einer Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ verstehen wir jene Matrix $A^t \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, die wir durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhalten,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A^t := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

In anderen Worten, $(A^t)_{ij} = A_{ji}$.

II.4.10. Beispiel. Etwa gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

II.4.11. Proposition (Eigenschaften der Transponierten). *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n, m \in \mathbb{N}$. Dann ist die Abbildung $M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to M_{n\times m}(\mathbb{K})$, $A \mapsto A^t$, linear, d.h. für alle $A, \tilde{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt*

$$(A + \tilde{A})^t = A^t + \tilde{A}^t \qquad \textit{sowie} \qquad (\lambda A)^t = \lambda A^t.$$

Darüber hinaus haben wir stets

$$(AB)^t = B^t A^t, \qquad (A^t)^t = A \qquad \textit{und} \qquad I_n^t = I_n,$$

für beliebige $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n\times l}(\mathbb{K})$. Eine quadratische Matrix $C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre Transponierte invertierbar ist und in diesem Fall gilt

$$(C^t)^{-1} = (C^{-1})^t.$$

Beweis. Es gilt $(A + \tilde{A})^t = A^t + \tilde{A}^t$, denn $((A + \tilde{A})^t)_{ij} = (A + \tilde{A})_{ji} = A_{ji} + \tilde{A}_{ji} = (A^t)_{ij} + (\tilde{A}^t)_{ij} = (A^t + \tilde{A}^t)_{ij}$. Analog lässt sich $(\lambda A)^t = \lambda A^t$ zeigen, $((\lambda A)^t)_{ij} = (\lambda A)_{ji} = \lambda A_{ji} = \lambda(A^t)_{ij} = (\lambda A^t)_{ij}$. Schließlich gilt auch $(AB)^t = B^t A^t$, denn $((AB)^t)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n A_{jk}B_{ki} = \sum_{k=1}^n B_{ki}A_{jk} = \sum_{k=1}^n (B^t)_{ik}(A^t)_{kj} = (B^t A^t)_{ij}$. Für einen invertierbare quadratische Matrix C folgt $C^t(C^{-1})^t = (C^{-1}C)^t = I_n^t = I_n$ und analog $(C^{-1})^t C^t = (CC^{-1})^t = I_n^t = I_n$, also ist auch C^t invertierbar mit Inverser $(C^t)^{-1} = (C^{-1})^t$. Die restlichen Behauptungen sind trivial. □

II.4.12. Beispiel. Die *symmetrischen Matrizen,* $\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) : A^t = A\}$, bilden einen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, denn diese Teilmenge stimmt offensichtlich mit dem Kern der linearen Abbildung $M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $A \mapsto A^t - A$, überein. Auch die *schiefsymmetrischen Matrizen,* $\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) : A^t = -A\}$, bilden einen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, denn dies ist genau der Kern der linearen Abbildung $M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $A \mapsto A^t + A$.

II.4.13. Bemerkung (Matrizen und Gleichungssysteme). Wir wollen uns nun überlegen wie sich Fragen zur Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems mit Matrizen bzw. linearen Abbildungen formulieren lassen. Unter der *Koeffizientenmatriz* eines linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m \end{aligned}$$

verstehen wir die Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ mit Eintragungen $A_{ij} := a_{ij}$. Das Gleichungssystem lässt sich damit in kompakter Form schreiben,

$$Ax = y$$

wobei $x \in \mathbb{K}^n$ und $y \in \mathbb{K}^m$. Die mit A assozierte lineare Abbildung

$$\psi_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad \psi_A(x) = Ax,$$

liefert die linke Seite des Gleichungssystems,

$$\psi_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Das Bild der linearen Abbildung ψ_A stimmt daher mit dem Teilraum aller $y \in \mathbb{K}^m$ überein, für die das Gleichungssystem $Ax = y$ lösbar ist,

$$\operatorname{img}(\psi_A) = \big\{ y \in \mathbb{K}^m \;\big|\; \exists x \in \mathbb{K}^n : Ax = y \big\}.$$

Die lineare Abbildung ψ_A ist also genau dann surjektiv, wenn das Gleichungssystem $Ax = y$ für jedes $y \in \mathbb{K}^m$ mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ hat.

Die Abbildung ψ_A ist genau dann injektiv, wenn das Gleichungssystem $Ax = y$ für jedes $y \in \mathbb{K}^m$ höchstens eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ besitzt. Nach Proposition II.3.22 ist dies genau dann der Fall, wenn ψ_A trivialen Kern hat, d.h. wenn $\ker(\psi_A) = \{0\}$ gilt. Dies wiederum bedeutet gerade, dass das Gleichungssystem $Ax = 0$ nur die triviale Lösung $x = 0$ besitzt. Die lineare Abbildung ψ_A ist genau dann bijektiv, wenn das Gleichungssystem $Ax = y$ für jedes $y \in \mathbb{K}^m$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ hat. Wir werden später sehen, dass dies nur im Fall $n = m$ möglich ist. Die linearen Isomorphismen $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ entsprechen daher genau den eindeutig lösbaren Gleichungsystemen bzw. den invertierbaren Matrizen.

Das Gleichungssystem

$$Ax = 0$$

wird als das mit $Ax = y$ assozierte *homogene Gleichungssystem* bezeichnet. Seine Lösungsmenge stimmt mit dem Kern von ψ_A, d.h. dem Teilraum

$$\ker(\psi_A) = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$$

überein. Ist $\xi \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems, d.h. $A\xi = y$, dann gilt

$$\{x \in \mathbb{K}^n : Ax = y\} = \{\xi + x : Ax = 0\} = \xi + \ker(\psi_A),$$

wir erhalten daher alle Lösungen von $Ax = y$ indem wir zu einer speziellen Lösung ξ, d.h. $A\xi = y$, alle Lösungen des homogenen Systems $Ax = 0$ addieren.

II.5. Summen und Komplemente. Sind W_1 und W_2 zwei Teilräume eines Vektorraums V, dann bildet deren Vereinigung, $W_1 \cup W_2$, i.A. keinen Teilraum von V, vgl. Übungsaufgabe 19. Wir werden nun den kleinsten Teilraum von V betrachten, der $W_1 \cup W_2$ enthält.

II.5.1. Definition (Summe von Teilräumen). Sind W_1 und W_2 zwei Teilräume eines Vektorraums V, so wird

$$W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2\}$$

die *Summe* der Teilräume W_1 und W_2 genannt.

II.5.2. Proposition. *Sind W_1 und W_2 zwei Teilräume eines Vektorraums V, dann ist $W_1 + W_2$ der kleinste Teilraum von V, der $W_1 \cup W_2$ enthält. D.h. $W_1 + W_2$ ist ein Teilraum von V, es gilt $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$ und für jeden weiteren Teilraum W von V mit $W_1 \cup W_2 \subseteq W$ gilt schon $W_1 + W_2 \subseteq W$.*

Beweis. Da $0 \in W_2$ gilt $W_1 \subseteq W_1 + W_2$, denn jedes $w_1 \in W_1$ lässt sich in der Form $w_1 = w_1 + 0$ schreiben. Analog haben wir auch $W_2 \subseteq W_1 + W_2$. Zusammen erhalten wir $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$. Insbesondere ist $W_1 + W_2$ nicht leer. Um die Abgeschlossenheit unter Addition zu zeigen betrachten wir zwei Elemente $w, w' \in W_1 + W_2$. Nach Definition der Summe existieren daher $w_1, w_1' \in W_1$ und $w_2, w_2' \in W_2$ mit $w = w_1 + w_2$ und $w' = w_1' + w_2'$. Da W_1 und W_2 Teilräume sind, folgt

$$w + w' = (w_1 + w_2) + (w_1' + w_2') = \underbrace{(w_1 + w_1')}_{\in W_1} + \underbrace{(w_2 + w_2')}_{\in W_2},$$

also liegt auch $w+w'$ in W_1+W_2. Somit ist W_1+W_2 abgeschlossen unter Addition. Seien nun $\lambda \in \mathbb{K}$ und $w \in W_1 + W_2$. Es existieren daher $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$ mit $w = w_1 + w_2$. Aufgrund von $\lambda w = \lambda(w_1 + w_2) = \lambda w_1 + \lambda w_2$ liegt also auch λw in $W_1 + W_2$. Somit ist $W_1 + W_2$ auch abgeschlossen unter Skalarmultiplikation und daher ein Teilraum von V. Die Minimalität von $W_1 + W_2$ ist offensichtlich, jeder Teilraum der W_1 und W_2 enthält muss auch alle Vektoren der Form $w_1 + w_2$ mit $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ enthalten. $\square$

II.5.3. Bemerkung. Sind W, W_1, W_2 und W_3 Teilräume eines Vektorraums V, dann gelten offensichtlich die Relationen $W_1+W_2 = W_2+W_1$, $W_1+(W_2+W_3) = (W_1 + W_2) + W_3$, und $W + \{0\} = W$. Weiters gilt $W_1 + W_2 = W_2$ genau dann, wenn $W_1 \subseteq W_2$, vgl. Übungsaufgabe 46.

Nach Definition der Summe lässt sich jedes Element $v \in W_1+W_2$ in der Form $v = w_1 + w_2$ schreiben, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$. Wie das folgende Beispiel zeigt ist diese Darstellung i.A. jedoch nicht eindeutig.

II.5.4. Beispiel. Betrachte folgende beiden Teilräume von $\mathbb{K}^3$,

$$W_1 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3 : x_1 = 0 \right\} \quad \text{und} \quad W_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3 : x_2 = 0 \right\}.$$

Offensichtlich gilt $\mathbb{K}^3 = W_1 + W_2$, denn jeder Vektor lässt sich in der Form $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ schreiben, wobei der erste Summand in W_1 und der zweite in W_2 liegt. Allerdings ist diese Darstellung nicht eindeutig, $\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3-1 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist eine andere Zerlegung mit den selben Eigenschaften.

II.5.5. Proposition. *Sind W_1 und W_2 zwei Teilräume eines Vektorraums V, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $W_1 + W_2 = V$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.
(b) Jedes $v \in V$ lässt sich auf eindeutige Weise in der Form $v = w_1 + w_2$ schreiben, für gewisse $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$.
(c) Zu je zwei linearen Abbildungen $\varphi_1 \colon W_1 \to U$ und $\varphi_2 \colon W_2 \to U$ existiert genau eine lineare Abbildung $\varphi \colon V \to U$, sodass $\varphi|_{W_1} = \varphi_1$ und $\varphi|_{W_2} = \varphi_2$.

Beweis. Ad (a)⇒(b): Da $V = W_1 + W_2$ lässt sich jedes $v \in V$ in der Form $v = w_1 + w_2$ für gewisse $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$ schreiben. Sei nun $v = w_1' + w_2'$ eine weiter solche Darstellung, d.h. $w_1' \in W_1$ und $w_2' \in W_2$. Es folgt $w_1 + w_2 = v = w_1' + w_2'$ und daher

$$w_1 - w_1' = w_2' - w_2.$$

Beachte, dass die linke Seite dieser Gleichung in W_1 und die rechte Seite in W_2 liegt. Beide Seiten liegen daher in $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Wir erhalten also $w_1 - w_1' = 0$ und $w_2' - w_2 = 0$, d.h. $w_1 = w_1'$ und $w_2 = w_2'$. Somit sind w_1 und w_2 in der Darstellung $v = w_1 + w_2$ eindeutig bestimmt.

Ad (b)⇒(c): Seien also $\varphi_1 \colon W_1 \to U$ und $\varphi_2 \colon W_2 \to U$ zwei lineare Abbildungen. Wir definieren eine Abbildung $\varphi \colon V \to U$ durch $\varphi(v) := \varphi_1(w_1) + \varphi_2(w_2)$, wobei $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$ jene eindeutig bestimmten Vektoren bezeichnen, für die $v = w_1 + w_2$ gilt. Offensichtlich gilt $\varphi|_{W_1} = \varphi_1$ und $\varphi|_{W_2} = \varphi_2$. Wir zeigen nun, dass φ linear ist. Sei dazu $v' \in V$ und $v' = w_1' + w_2'$ die eindeutige Zerlegung mit $w_1' \in W_1$ und $w_2' \in W_2$. Für die Zerlegung der Summe, $v + v'$, ergibt sich

$v+v'=(w_1+w_1')+(w_2+w_2')$, wobei $w_1+w_1'\in W_1$ und $w_2+w_2'\in W_2$. Es folgt

$$\begin{aligned}\varphi(v+v')&=\varphi_1(w_1+w_1')+\varphi_2(w_2+w_2')\\&=\big(\varphi_1(w_1)+\varphi_1(w_1')\big)+\big(\varphi_2(w_2)+\varphi_2(w_2')\big)\\&=\big(\varphi_1(w_1)+\varphi_2(w_2)\big)+\big(\varphi_1(w_1')+\varphi_2(w_2')\big)\\&=\varphi(v)+\varphi(v').\end{aligned}$$

Ist $\lambda\in\mathbb{K}$, so gilt $\lambda v=\lambda w_1+\lambda w_2$ mit $\lambda w_1\in W_1$ und $\lambda w_2\in W_2$ und daher $\varphi(\lambda v)=\varphi_1(\lambda w_1)+\varphi_2(\lambda w_2)=\lambda\varphi_1(w_1)+\lambda\varphi_2(w_2)=\lambda\big(\varphi_1(w_1)+\lambda\varphi_2(w_2)\big)=\lambda\varphi(v)$. Dies zeigt, dass φ tatsächlich eine lineare Abbildung darstellt. Die Eindeutigkeit von φ ist offensichtlich, jedes $v\in V$ lässt sich ja in der Form $v=w_1+w_2$, $w_1\in W_1$, $w_2\in W_2$, schreiben, für ein lineares $\varphi\colon V\to U$ mit $\varphi|_{W_1}=\varphi_1$ und $\varphi|_{W_2}=\varphi_2$ folgt daher $\varphi(v)=\varphi(w_1+w_2)=\varphi(w_1)+\varphi(w_2)=\varphi|_{W_1}(w_1)+\varphi|_{W_2}(w_2)=\varphi_1(w_1)+\varphi_2(w_2)$.

Ad (c)$\Rightarrow$(a): Nach Voraussetzung existiert eine lineare Abbldung $\pi_1\colon V\to W_1$ mit $\pi_1|_{W_1}=\mathrm{id}_{W_1}$ und $\pi_1|_{W_2}=0$. Daraus erhalten wir sofort $W_1\cap W_2=\{0\}$, denn für $v\in W_1\cap W_2$ folgt $v=\pi_1(v)=0$. Es existiert aber auch eine lineare Abbildung $\pi_2\colon V\to W_2$ mit $\pi_2|_{W_1}=0$ und $\pi_2|_{W_2}=\mathrm{id}_{W_2}$. Fassen wir π_1 und π_2 als lineare Abbildungen $\pi_1\colon V\to V$ und $\pi_2\colon V\to V$ auf, dann gilt für ihre Summe, $\pi_1+\pi_2\colon V\to V$ nun $(\pi_1+\pi_2)|_{W_1}=\mathrm{id}_V|_{W_1}$ und $(\pi_1+\pi_2)|_{W_2}=\mathrm{id}_V|_{W_2}$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in (c) folgt daher $\pi_1+\pi_2=\mathrm{id}_V$. Für jedes $v\in V$ erhalten wir somit $v=\mathrm{id}_V(v)=\pi_1(v)+\pi_2(v)$ mit $\pi_1(v)\in W_1$ und $\pi_2(v)\in W_2$, also $V=W_1+W_2$. $\square$

II.5.6. Definition (Innere direkte Summe und Komplement). Zwei Teilräume W_1 und W_2 eines Vektorraums V heißen *komplementär,* falls $W_1+W_2=V$ und $W_1\cap W_2=\{0\}$ gilt. In diesem Fall sagen wir V ist die *(innere) direkte Summe* von W_1 und W_2 und notieren dies durch $V=W_1\oplus W_2$. Auch wird W_2 als *ein Komplement* von W_1 in V bezeichnet. Die nach Proposition II.5.5 eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\pi_1\colon V\to W_1$ mit $\pi_1|_{W_1}=\mathrm{id}_{W_1}$ und $\pi_1|_{W_2}=0$ wird als *Projektion auf* W_1 *längs* W_2 bezeichnet. Mit vertauschten Rollen wird auch W_1 ein Komplement von W_2 in V genannt. Die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\pi_2\colon V\to W_2$ mit $\pi_2|_{W_2}=\mathrm{id}_{W_2}$ und $\pi_2|_{W_2}=0$ wird als Projektion auf W_2 längs W_1 bezeichnet. Auch wird $\pi_2=\mathrm{id}_V-\pi_1$ die zu π_1 *komplementäre Projektion* genannt.

Seien W_1 und W_2 zwei komplementäre Teilräume eines Vektorraums V, d.h. $W_1\oplus W_2=V$, und $\pi_1\colon V\to W_1$ sowie $\pi_2\colon V\to W_2$ die damit assozierten Projektionen. Ist $v\in V$ und $v=w_1+w_2$ die eindeutige Zerlegung mit $w_1\in W_1$ und $w_2\in W_2$, dann gilt $\pi_1(v)=\pi_1(w_1+w_2)=\pi_1(w_1)+\pi_1(w_2)=w_1+0=w_1$ und analog $\pi_2(v)=w_2$. Die beiden Projektionen liefern uns also für jedes $v\in V$ die eindeutige Zerlegung $v=w_1+w_2$ mit $w_1=\pi_1(v)\in W_1$ und $w_2=\pi_2(v)\in W_2$. Fassen wir diese Projektionen als lineare Abbildungen $\pi_1,\pi_2\colon V\to V$ auf, dann folgt $\pi_1\circ\pi_1=\pi_1$, $\pi_2\circ\pi_2=\pi_2$, $\pi_1+\pi_2=\mathrm{id}_V$ und $\pi_1\circ\pi_2=0=\pi_2\circ\pi_1$.

II.5.7. Definition (Projektor). Unter einem Projektor verstehen wir eine lineare Abbildung $\pi\colon V \to V$ für die $\pi \circ \pi = \pi$ gilt.

II.5.8. Proposition. *Ist $\pi\colon V \to V$ ein Projektor, dann gilt*

$$V = \operatorname{img}(\pi) \oplus \ker(\pi)$$

und π stimmt mit der Projektion auf $\operatorname{img}(\pi)$ *längs* $\ker(\pi)$ *überein. Auch $\pi' := \operatorname{id}_V - \pi$ ist ein Projektor, er stimmt mit der komplementären Projektion auf* $\ker(\pi)$ *längs* $\operatorname{img}(\pi)$ *überein. Weiters haben wir* $\operatorname{img}(\pi) = \{v \in V : \pi(v) = v\} = \ker(\pi')$, $\operatorname{img}(\pi') = \{v \in V : \pi'(v) = v\} = \ker(\pi)$ *und es gelten die Formeln*

$$\pi \circ \pi = \pi, \quad \pi' \circ \pi' = \pi', \quad \pi + \pi' = \operatorname{id}_V \quad \textit{sowie} \quad \pi \circ \pi' = 0 = \pi' \circ \pi.$$

Beweis. Zunächst ist auch $\pi' = \operatorname{id}_V - \pi\colon V \to V$ ein Projektor, denn

$$\begin{aligned}
\pi' \circ \pi' &= (\operatorname{id}_V - \pi) \circ (\operatorname{id}_V - \pi) \\
&= \operatorname{id}_V \circ \operatorname{id}_V - \pi \circ \operatorname{id}_V - \operatorname{id}_V \circ \pi + \pi \circ \pi \\
&= \operatorname{id}_V - \pi - \pi + \pi \\
&= \operatorname{id}_V - \pi = \pi'.
\end{aligned}$$

Auch erhalten wir sofort $\pi \circ \pi' = \pi \circ (\operatorname{id}_V - \pi) = \pi \circ \operatorname{id}_V - \pi \circ \pi = \pi - \pi = 0$ und analog $\pi' \circ \pi = 0$. Die Relationen $\operatorname{img}(\pi) \supseteq \{v \in V : \pi(v) = v\} = \ker(\pi')$ sind offensichtlich. Ist $v \in \operatorname{img}(\pi)$, dann existiert $w \in V$ mit $v = \pi(w)$ und wir erhalten $\pi(v) = \pi(\pi(w)) = (\pi \circ \pi)(w) = \pi(w) = v$. Dies zeigt $\operatorname{img}(\pi) \subseteq \{v \in V : \pi(v) = v\}$, es gilt daher $\operatorname{img}(\pi) = \{v \in V : \pi(v) = v\} = \ker(\pi')$. Wenden wir dies auf den Projektor π' an, erhalten wir auch $\operatorname{img}(\pi') = \{v \in V : \pi'(v) = v\} = \ker(\pi)$. Daraus folgt nun $\operatorname{img}(\pi) \cap \ker(\pi) = \{0\}$, denn für $v \in \operatorname{img}(\pi) \cap \ker(\pi)$ gilt $v = \pi(v) = 0$. Schließlich läst sich jedes $v \in V$ in der Form $v = \pi(v) + \pi'(v)$ schreiben, wobei $\pi(v) \in \operatorname{img}(\pi)$ und $\pi'(v) \in \operatorname{img}(\pi') = \ker(\pi)$. Dies zeigt $V = \operatorname{img}(\pi) + \ker(\pi)$, also $V = \operatorname{img}(\pi) \oplus \ker(\pi)$. □

II.5.9. Bemerkung (Spiegelungen). Sei $V = W_+ \oplus W_-$. Nach Proposition II.5.5 existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\sigma\colon V \to V$, sodass $\sigma(v) = v$ für alle $v \in W_+$, und $\sigma(v) = -v$ für alle $v \in W_-$. Diese Abbildung σ wird *Spiegelung an W_+ längs W_-* genannt. Beachte $\sigma \circ \sigma = \operatorname{id}_V$. Die komplementäre Spiegelung an W_- längs W_+ ist durch $-\sigma$ gegeben. Bezeichnen $\pi_+\colon V \to V$ und $\pi_-\colon V \to V$ die mit der Zerlegung $V = W_- \oplus W_+$ assozierten Projektoren, dann gilt $\sigma = \pi_+ - \pi_-$. Ist $2 \neq 0 \in \mathbb{K}$, dann lassen sich auch die Projektionen durch die Spiegelungen ausdrücken, $\pi_+ = \frac{1}{2}(\operatorname{id}_V + \sigma)$ sowie $\pi_- = \frac{1}{2}(\operatorname{id}_V - \sigma)$, siehe auch Übungsaufgabe 50.

II.5.10. Beispiel. Betrachte die beiden Teilräume von $\mathbb{R}^3$,

$$E := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) : 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \right\} \quad \text{und} \quad G := \left\{ \lambda \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{smallmatrix}\right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir wollen uns nun davon überzeugen, dass $\mathbb{R}^3$ innere direkte Summe von E und G ist, d.h. $\mathbb{R}^3 = E \oplus G$. Zunächst gilt $E \cap G = \{0\}$, denn liegt ein Element

$x = \lambda\left(\begin{smallmatrix}5\\6\\7\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}5\lambda\\6\lambda\\7\lambda\end{smallmatrix}\right)$ aus G auch in E, so folgt $0 = 2\cdot 5\lambda + 3\cdot 6\lambda + 4\cdot 7\lambda = 56\lambda$, also $\lambda = 0$ und damit $x = 0$. Andererseits haben wir auch $E + G = \mathbb{R}^3$, denn jeder Vektor aus $\mathbb{R}^3$ lässt sich in der Form

$$\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right) = \underbrace{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right) - \lambda\left(\begin{smallmatrix}5\\6\\7\end{smallmatrix}\right)}_{\in E} + \underbrace{\lambda\left(\begin{smallmatrix}5\\6\\7\end{smallmatrix}\right)}_{\in G}, \qquad \lambda = \frac{2x_1+3x_2+4x_3}{56},$$

schreiben, wobei λ so gewählt wurde, dass der erste Summand tatsächlich in E liegt. Dies zeigt $\mathbb{R}^3 = E \oplus G$. Für die Projektion auf G längs E, $\pi_G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, erhalten wir

$$\pi_G\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \frac{2x_1+3x_2+4x_3}{56}\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix}10&15&20\\12&18&24\\14&21&28\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Für die Projektion auf E längs G, $\pi_E\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, folgt

$$\pi_E\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \frac{2x_1+3x_2+4x_3}{56}\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix}46&-15&-20\\-12&38&-24\\-14&-21&28\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Die Spiegelung an E längs G, d.h. $\sigma = \pi_E - \pi_G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ist daher durch

$$\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix}36&-30&-40\\-24&20&-48\\-28&-42&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

gegeben, siehe Bemerkung II.5.9 und Übungsaufgabe 48.

II.5.11. Beispiel. Es bezeichne $X \subseteq \mathbb{R}$ ein um Null symmetrisches Intervall, etwa $X = (-a, a)$ mit $0 < a \leq \infty$. Wir wollen nun zeigen, dass $V := F(X, \mathbb{R})$, der Vektorraum aller Funktionen $X \to \mathbb{R}$, innere direkte Summe des Teilraums aller *geraden Funktionen,*

$$G := \bigl\{f \in F(X,\mathbb{R}) \bigm| \forall x \in X : f(-x) = f(x)\bigr\},$$

und des Teilraums aller *ungeraden Funktionen,*

$$U := \bigl\{f \in F(X,\mathbb{R}) \bigm| \forall x \in X : f(-x) = -f(x)\bigr\},$$

ist, d.h. $V = G \oplus U$. In Beispiel II.2.14 haben wir bereits verifiziert, dass G und U Teilräume von $F(X,\mathbb{R})$ bilden, für die $G \cap U = \{0\}$ gilt. Andererseits lässt sich jede Funktion $f\colon X \to \mathbb{R}$ in der Form $f = g + u$ schreiben, wobei $g\colon X \to \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$, $u\colon X \to \mathbb{R}$, $u(x) := \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, und für diese Summanden gilt $g \in G$ sowie $u \in U$. Dies zeigt $V = G \oplus U$. Für die Projektion auf G längs U, $\pi_G\colon V \to V$, und die Projektion auf U längs G, $\pi_U\colon V \to V$, erhalten wir

$$(\pi_G(f))(x) = \tfrac{1}{2}\bigl(f(x) + f(-x)\bigr) \quad \text{und} \quad (\pi_U(f))(x) = \tfrac{1}{2}\bigl(f(x) - f(-x)\bigr).$$

Die Projektion π_G macht Funktionen gerade und zwar so, dass bereits gerade Funktionen unverändert bleiben und ungerade Funktionen auf 0 abgebildet werden. Analog macht die Projektion π_U Funktionen ungerade, wobei bereits ungerade Funktionen unverändert bleiben und gerade Funktionen auf 0 abgebildet werden. Beachte auch, dass die Spiegelung an G längs U, d.h. $\sigma = \pi_G - \pi_U \colon F(X,\mathbb{R}) \to F(X,\mathbb{R})$, durch $\sigma(f)(x) = f(-x)$ gegeben ist, $x \in X$. Mit Hilfe der Involution $\nu\colon X \to X$, $\nu(x) := -x$, lässt sich dies auch als $\sigma(f) = f \circ \nu$ schreiben.

II.5.12. Beispiel. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper in dem $2 \neq 0$ gilt. In Beispiel II.4.12 haben wir gesehen, dass die symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen Matrizen,

$$W := \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) : A^t = A\} \quad \text{und} \quad W' := \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) : A^t = -A\}$$

jeweils Teilräume von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bilden. Wir wollen nun zeigen, dass $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ direkte Summe dieser Teilräume ist, d.h.

$$M_{n\times n}(\mathbb{K}) = W \oplus W'.$$

Zunächst gilt $W \cap W' = \{0\}$, denn für $A \in W \cap W'$ folgt $A = A^t = -A$, also $2A = 0$ und daher $A = 0$. Andererseits lässt sich jede Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ in der Form

$$A = \tfrac{1}{2}(A + A^t) + \tfrac{1}{2}(A - A^t)$$

schreiben, wobei der erste Summand offensichtlich in W liegt, denn $(\frac{1}{2}(A+A^t))^t = \frac{1}{2}(A^t + A^{tt}) = \frac{1}{2}(A^t + A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$, und der zweite Summand in W' liegt, denn $(\frac{1}{2}(A-A^t))^t = \frac{1}{2}(A^t - A^{tt}) = \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{1}{2}(A - A^t)$. Dies zeigt $M_{n\times n}(\mathbb{K}) = W + W'$, also $M_{n\times n}(\mathbb{K}) = W \oplus W'$. Für die Projektion $\pi\colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to W \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{K})$ auf W längs W' bzw. die Projektion $\pi'\colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to W' \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{K})$ auf W' längs W erhalten wir

$$\pi(A) = \tfrac{1}{2}(A + A^t) \quad \text{und} \quad \pi'(A) = \tfrac{1}{2}(A - A^t).$$

Die Spiegelung an W längs W', d.h. $\sigma = \pi - \pi'\colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to M_{n\times n}(\mathbb{K})$, ist daher durch $\sigma(A) = A^t$ gegeben.

II.5.13. Proposition. *Sei $\varphi\colon V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung und V' ein zu* $\ker(\varphi)$ *komplementärer Teilraum in V, d.h. $V = \ker(\varphi) \oplus V'$. Dann ist die Einschränkung $\varphi|_{V'}\colon V' \to W$ ein linearer Isomorphismus.*

Beweis. Zunächst ist $\varphi|_{V'}$ injektiv, da $\ker(\varphi|_{V'}) = \{v' \in V' : \varphi(v') = 0\} = \ker(\varphi) \cap V' = \{0\}$, siehe auch Proposition II.3.22. Um auch die Surjektivität von $\varphi|_{V'}$ zu zeigen, sei $w \in W$ beliebig. Wegen der Surjektivität von φ gibt es $v \in V$ mit $\varphi(v) = w$. Da $V = \ker(\varphi) + V'$, existiert $v' \in V'$, sodass $v - v' \in \ker(\varphi)$. Es folgt $w = \varphi(v) = \varphi(v - v' + v') = \varphi(v - v') + \varphi(v') = 0 + \varphi(v') = \varphi(v')$, also $w \in \varphi(V')$. Somit ist $\varphi|_{V'}$ eine lineare Bijektion, also ein Isomorphismus. $\square$

II.5.14. Bemerkung. Betrachte ein lineraess Gleichungssystem $Ax = y$, wobei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $y \in \mathbb{K}^m$. Weiters bezeichne $\psi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$,

$\psi(x) = Ax$, die damit assozierte lineare Abbildung, und $W := \operatorname{img}(\psi)$ den Teilraum aller $y \in \mathbb{K}^m$, für die das Gleichungssystem $Ax = y$ lösbar ist. Gelingt es einen zu $\ker(\psi)$ komplementären Teilraum V' zu bestimmen, d.h. $\ker(\psi) \oplus V' = V$, dann ist die Einschränkung $\psi|_{V'} \colon V' \to W$ nach Proposition II.5.13 ein Isomorphismus, und ihre Umkehrabbildung, $\xi := \psi|_{V'}^{-1} \colon W \to V' \subseteq V$, liefert dann zu jedem $y \in W$ eine spezielle Lösung $\xi(y) \in \mathbb{K}^n$, die linear von y abhängt.

II.6. Quotientenräume. Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $W \subseteq V$ ein Teilraum. Wir definieren auf V nun eine Relation $\sim$ durch

$$v \sim v' :\Leftrightarrow v' - v \in W.$$

II.6.1. Lemma. *Diese Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf V.*

Beweis. Die Relation ist reflexsiv, denn für jedes $v \in V$ gilt $v - v = 0 \in W$, also $v \sim v$. Die Relation ist symmetrisch, denn aus $v \sim v'$ folgt $v' - v \in W$, somit ist auch $v - v' = -(v' - v) \in W$ und daher $v' \sim v$. Die Relation ist transitiv, denn aus $v \sim v'$ und $v' \sim v''$ erhalten wir $v' - v \in W$ und $v'' - v' \in W$, somit auch $v'' - v = (v'' - v') + (v' - v) \in W$ und daher $v \sim v''$. $\square$

II.6.2. Lemma. *Sind $v, v_1, v_2, v', v_1', v_2', \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt:*
(a) Aus $v_1 \sim v_1'$ und $v_2 \sim v_2'$ folgt $(v_1 + v_2) \sim (v_1' + v_2')$.
(b) Aus $v \sim v'$ folgt $\lambda v \sim \lambda v'$.

Beweis. Ad (a): Gilt $v_1 \sim v_1'$ und $v_2 \sim v_2'$ so folgt $v_1' - v_1 \in W$ und $v_2' - v_2 \in W$, somit auch $(v_1' + v_2') - (v_1 + v_2) = (v_1' - v_1) + (v_2' - v_2) \in W$ und daher $(v_1 + v_2) \sim (v_1' + v_2')$. Ad (b): Aus $v \sim v'$ erhalten wir $v' - v \in W$, somit auch $\lambda v' - \lambda v = \lambda(v' - v) \in W$ und daher $\lambda v \sim \lambda v'$. $\square$

Die Äquivalenzklassen von $\sim$, sind genau die Translate von W. Wir werden die von $v \in V$ repräsentierte Äquivalenzklasse meist mit

$$[v] := \{v' \in V : v \sim v'\} = \{v + w : w \in W\} = v + W$$

bezeichnen. Für die Menge der Äquivalenzklassen schreiben wir V/W. Wir definieren nun auf V/W Addition $V/W \times V/W \xrightarrow{+} V/W$ und Skalarmultiplikation $\mathbb{K} \times V/W \xrightarrow{\cdot} V/W$ durch

$$[v_1] + [v_2] := [v_1 + v_2] \qquad \text{und} \qquad \lambda[v] := [\lambda v],$$

wobei $v, v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. *Beachte, dass diese Operationen nach Lemma II.6.2 tatsächlich wohldefiniert sind!* Wir werden uns nun davon überzeugen, dass V/W dadurch zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum wird.

II.6.3. Satz. *Ist W ein Teilraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, dann bildet V/W mit obigen Operationen einen Vektorraum über $\mathbb{K}$. Die kanonische Abbilddung $\pi \colon V \to V/W$, $\pi(v) := [v]$, ist eine lineare Surjektion mit $\ker(\pi) = W$. Zu jeder linearen Abbildung $\varphi \colon V \to U$ mit $\varphi|_W = 0$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\bar{\varphi} \colon V/W \to U$, sodass $\varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$.*

Beweis. Zunächst sind die Vektorraumaxiome (V1) – (V8) für V/W zu überprüfen. Wir beginnen mit der Assotiativität der Addition:

$$\big([v_1]+[v_2]\big)+[v_3]=[v_1+v_2]+[v_3]=[(v_1+v_2)+v_3]$$
$$=[v_1+(v_2+v_3)]=[v_1]+[v_2+v_3]=[v_1]+\big([v_2]+[v_3]\big).$$

Dies zeigt, dass die Addtion auf V/W dem Axiom (V1) genügt. Analog erhalten wir aus Axiom (V2) für V sofort $[v]+[0]=[v+0]=[v]$. Somit ist die Klasse $[0]\in V/W$ neutrales Element der Addition auf V/W, d.h. die Addition auf V/W erfüllt auch Axiom (V2). Ebenso erhalten wir $[v]+[-v]=[v+(-v)]=[0]$, d.h. die Klasse $[-v]\in V/W$ ist das additive Inverse der Klasse $[v]$. Die Addition auf V/W genügt daher auch Axiom (V3). Auch die Kommutativität der Addition auf V/W folgt sofort aus der Kommutativität der Addition in V, $[v_1]+[v_2]=[v_1+v_2]=[v_2+v_1]=[v_2]+[v_1]$, also genügt V/W Axiom (V4). Für $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ erhalten wir ähnlich $\lambda(\mu[v])=\lambda[\mu v]=[\lambda(\mu v)]=[(\lambda\mu)v]=(\lambda\mu)[v]$, die Skalarmultiplikation in V/W genügt daher dem Axiom (V5). Weiters haben wir:

$$\lambda\big([v_1]+[v_2]\big)=\lambda[v_1+v_2]=[\lambda(v_1+v_2)]$$
$$=[\lambda v_1+\lambda v_2]=[\lambda v_1]+[\lambda v_2]=\lambda[v_1]+\lambda[v_2].$$

In V/W gilt daher das Distributivgesetz (V6). Das andere Distributivgesetz (V7) lässt sich genauso verifizieren, $(\lambda+\mu)[v]=[(\lambda+\mu)v]=[\lambda v+\mu v]=[\lambda v]+[\mu v]=\lambda[v]+\mu[v]$, also genügt V/W auch Axiom (V7). Schließlich ist $1[v]=[1v]=[v]$ und damit ist auch Axiom (V8) erfüllt. Addition und Skalarmultiplikation auf V/W erfüllen somit alle Vektorraumaxiome und bilden daher einen $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Die kanonische Abbildung $\pi\colon V\to V/W$ ist offensichtlich linear, denn es gilt $\pi(v+w)=[v+w]=[v]+[w]=\pi(v)+\pi(w)$ und auch $\pi(\lambda v)=[\lambda v]=\lambda[v]=\lambda\pi(v)$.[3] Die Surjektivität von π ist trivial, jede Äquivalenzklasse besitzt ja mindestens einen Repräsentanten. Für den Kern von π folgt $\ker(\pi)=\pi^{-1}([0])=\{v\in V\mid \pi(v)=[0]\}=\{v\in V\mid [v]=[0]\}=\{v\in V\mid v\sim 0\}=W$.

Sei nun $\varphi\colon V\to U$ eine lineare Abbildung die auf W verschwindet, d.h. $\varphi|_W=0$. Für $v,v'\in V$ mit $v\sim v'$ gilt $v'-v\in W$, also $\varphi(v')-\varphi(v)=\varphi(v'-v)=0$ und somit $\varphi(v)=\varphi(v')$. Daher ist die Abbildung

$$\bar\varphi\colon V/W\to U,\quad \bar\varphi([v]):=\varphi(v),$$

wohldefiniert. Auch ist sie offensichtlich linear, denn $\bar\varphi([v_1]+[v_2])=\bar\varphi([v_1+v_2])=\varphi(v_1+v_2)=\varphi(v_1)+\varphi(v_2)=\bar\varphi([v_1])+\bar\varphi([v_2])$ und $\bar\varphi(\lambda[v])=\bar\varphi([\lambda v])=\varphi(\lambda v)=\lambda\varphi(v)=\lambda\bar\varphi([v])$. Schließlich gilt $(\bar\varphi\circ\pi)(v)=\bar\varphi(\pi(v))=\bar\varphi([v])=\varphi(v)$ und daher $\bar\varphi\circ\pi=\varphi$. Die Eindeutigkeit der Abbildung $\bar\varphi$ folgt sofort aus der Surjektivität von π. □

[3]Die Vektorraumoperationen auf V/W wurden genau so definiert, dass π linear wird.

II.6.4. Definition (Quotientenraum). Der Vektorraum V/W wird *Quotientenraum V nach W* oder *V modulo W* genannt. Die Abbildung $\pi\colon V \to V/W$, $\pi(v) = [v]$, wird als *kanonische Projektion* bezeichnet.

II.6.5. Bemerkung. Es gilt stets $V/\{0\} = V$ und $V/V = \{0\}$. Für einen Teilraum W eines Vektorraums V gilt $V/W = \{0\}$ genau dann, wenn $V = W$.

II.6.6. Korollar. *Jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ induziert einen linearen Isomorphismus*

$$\bar\varphi\colon V/\ker(\varphi) \xrightarrow{\cong} \operatorname{img}(\varphi), \quad \bar\varphi([v]) = \varphi(v).$$

Beweis. Wir fassen φ als surjektive lineare Abbildung $\varphi\colon V \to \operatorname{img}(\varphi)$ auf. Da φ auf $\ker(\varphi)$ verschwindet stellt $\bar\varphi\colon V/\ker(\varphi) \to \operatorname{img}(\varphi)$, $\bar\varphi([v]) = \varphi(v)$, eine wohldefinierte lineare Abbildung dar, siehe Satz II.6.3. Offensichtlich ist $\bar\varphi$ surjektiv. Weiters gilt $\ker(\bar\varphi) = \{[0]\}$, denn aus $\bar\varphi([v]) = 0$ erhalten wir $\varphi(v) = 0$, also $v \in \ker(\varphi)$ und daher $[v] = [0] \in V/\ker(\varphi)$. Nach Proposition II.3.22 ist $\bar\varphi$ daher auch injektiv. Somit ist $\bar\varphi$ eine lineare Bijektion, also ein Isomorphismus, siehe Bemerkung II.3.11. □

II.6.7. Korollar. *Sei W ein Teilraum eines Vektorraums V und W' ein Komplement von W in V, d.h. $V = W \oplus W'$. Dann ist die Einschränkung der kanonischen Projektion, $\pi|_{W'}\colon W' \to V/W$, ein linearer Isomorphismus. Jede Äquivalenzklasse in V/W besitzt daher einen eindeutigen Repräsentanten in W'.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz II.6.3 und Proposition II.5.13. □

II.6.8. Beispiel. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine Matrix und $L := \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$ der Lösungsraum des assozierten homogenen Gleichungssystems. Weiters sei $\xi \in \mathbb{K}^n$ und $y := A\xi \in \mathbb{K}^m$, also $A\xi = y$. Dann besteht die von ξ repräsentierte Äquivalenzklasse, $[\xi] \in \mathbb{K}^n/L$, genau aus jenen Vektoren, die das selbe Gleichungssystem wie ξ lösen, d.h. $[\xi] = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = y\}$.

II.6.9. Beispiel. Sei $[a,b]$ ein Intervall, und bezeichne $W \subseteq F([a,b],\mathbb{R})$ den Teilraum der konstanten Funktionen. Die von einer Funktion $f \in F([a,b],\mathbb{R})$ repräsentierte Äquivalenzklasse $[f] \in F([a,b],\mathbb{R})/W$ besteht daher aus allen Funktionen, die sich von f nur durch eine additive Konstante unterscheiden. Elemente von $F([a,b],\mathbb{R})/W$ können als Funktionen verstanden werden, die nur bis auf eine additive Konstante definiert sind.

II.6.10. Beispiel (Landau Symbol). Betrachte den Teilraum

$$W := o(1) = \big\{f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R}) \bigm| \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\big\}$$

von $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Die von einer Funktion $f \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ repräsentierte Äquivalenzklasse $[f] \in F(\mathbb{R},\mathbb{R})/W$ besteht daher genau aus jenen Funktionen g, für die $\lim_{x\to\infty}(g(x) - f(x)) = 0$ gilt, d.h. aus allen Funktionen die sich asymptotisch wie f verhalten. Elemente von $F(\mathbb{R},\mathbb{R})/W$ können daher als Asymptoten verstanden werden.