IX. Multilineare Algebra

Bevor wir uns im zweiten Abschnitt mit dem Tensorprodukt auseinandersetzen, wollen wir zum Aufwärmen zwei Konstruktionen mit Vektorräumen besprechen, die durch universelle Eigenschaften charakterisiert werden können: das Produkt und die direkte Summe von Vektorräumen.

Wir orientieren uns an der Darstellung in [**11**, Chapter 4].

IX.1. Produkte und direkte Summen. Alle Vektorräume in diesem Kapitel seien über einem fixen aber beliebigen Körper $\mathbb{K}$ definiert. Unter dem *Produkt* zweier Vektorräume V und W verstehen wir die Menge aller Paare $V \times W$ mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation:

$$(v, w) + (v', w') := (v + v', w + w'), \qquad \lambda(v, w) := (\lambda v, \lambda w),$$

wobei $v, v' \in V$, $w, w' \in W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Es lässt sich leicht verifizieren, dass dadurch $V \times W$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{K}$ wird. Sind V und W beide endlich dimensional, dann gilt

$$\dim(V \times W) = \dim V + \dim W.$$

Die linearen Abbildungen,

$$\pi_1 \colon V \times W \to V \qquad \text{und} \qquad \pi_2 \colon V \times W \to W,$$

$\pi_1(v, w) := v$, $\pi_2(v, w) := w$ werden als *kanonische Projektionen* bezeichnet, und besitzten folgende universelle Eigenschaft: *Ist U ein weiterer Vektorraum und sind $\varphi_1 \colon U \to V$ und $\varphi_2 \colon U \to W$ zwei lineare Abbildungen, dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi \colon U \to V \times W$, sodass $\pi_1 \circ \varphi = \varphi_1$ und $\pi_2 \circ \varphi = \varphi_2$.* Offensichtlich leistet nämlich $\varphi(u) := (\varphi_1(u), \varphi_2(u))$ das Gewünschte. Diese *universelle Eigenschaft des Produkts* lässt sich übersichtlich durch folgendes kommutative Diagramm veranschaulichen:

$$\begin{tikzcd}
 & & V \\
U \arrow[urr, bend left, "\varphi_1"] \arrow[drr, bend right, "\varphi_2"'] \arrow[r, dashed, "\exists! \varphi"] & V \times W \arrow[ur, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
 & & W
\end{tikzcd}$$

Die beiden Projektionen liefern lineare Abbildungen

$$L(U, V \times W) \xrightarrow{(\pi_1)_*} L(U, V) \qquad \text{und} \qquad L(U, V \times W) \xrightarrow{(\pi_2)_*} L(U, W),$$

$(\pi_1)_*(\varphi) := \pi_1 \circ \varphi$ und $(\pi_2)_*(\varphi) := \pi_2 \circ \varphi$. Diese induzieren eine lineare Abbildung $L(U, V \times W) \to L(U, V) \times L(U, W)$. Aus der universellen Eigenschaft des Produkts folgt sofort, dass dies ein linearer Isomorphismus ist. Wir erhalten somit einen kanonischen Isomorphismus

$$L(U, V \times W) = L(U, V) \times L(U, W),$$

wobei die Projektionen des Produkts auf der rechten Seite den Abbildungen $(\pi_1)_*$ und $(\pi_2)_*$ entsprechen.

Analog lassen sich auch Produkte endlich vieler Vektorräume $V_1, \dots, V_n$ konstruieren. Die Menge $V_1 \times \cdots \times V_n$ bildet bezüglich komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation einen Vektorraum, und die kanonischen (linearen) Projektionen

$$\pi_i \colon V_1 \times \cdots \times V_n \to V_i, \qquad \pi_i(v_1, \dots, v_n) := v_i,$$

haben folgende universelle Eigenschaft: Ist U ein Vektorraum und sind $\varphi_i \colon U \to V_i$ lineare Abbildungen, $i = 1, \dots, n$, dann existiert genau eine lineare Abbildung $\varphi \colon U \to V_1 \times \cdots \times V_n$, sodass $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$, für jedes $i = 1, \dots, n$. Offensichtlich leistet nämlich $\varphi(u) := (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u))$ das Gewünschte. Wieder induzieren die linearen Abbildungen $(\pi_i)_* \colon L\big(U, \prod_{j=1}^n V_j\big) \to L(U, V_i)$ einen kanonischen linearen Isomorphismus

$$L\Big(U, \prod_{i=1}^n V_i\Big) = \prod_{i=1}^n L(U, V_i),$$

sodass die Projektionen der rechten Seite den Abbildungen $(\pi_i)_*$ entsprechen.

Allgemeiner sei I eine beliebige Indexmenge und V_i ein Vektorraum, für jedes $i \in I$. Das Produkt

$$\prod_{i \in I} V_i = \big\{ v = (v_i)_{i \in I} \bigm| \forall i \in I : v_i \in V_i \big\},$$

ist selbst ein Vektorraum bezüglich komponentenweise Addition und Skalarmultiplikation, $(v + w)_i := v_i + w_i$, $(\lambda v)_i := \lambda v_i$. Für $i \in I$ wird die lineare Abbildung $\pi_i \colon \prod_{j \in I} V_j \to V_i$, $\pi_i(v) := v_i$, als *kanonische Projektion* auf den i-ten Faktor bezeichnet. Diese haben folgende Eigenschaft: *Ist U ein Vektorraum und sind $\varphi_i \colon U \to V_i$ linear für jedes $i \in I$, dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi \colon U \to \prod_{i \in I} V_i$, sodass $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$, für jedes $i \in I$.* Die Abbildung $\varphi(u) := (\varphi_i(u))_{i \in I}$ hat nämlich die gewünschte Eigenschaft. Das Produkt $\prod_{i \in I} V_i$ zusammen mit den kanonischen Projektionen π_i ist durch diese *universelle Eigenschaft des Produkts* im wesentlichen eindeutig bestimmt. Genauer haben wir:

IX.1.1. Lemma. *Seien $p_i \colon P \to V_i$ lineare Abbildungen, $i \in I$, mit der universelle Eigenschaft des Produkts, d.h. sind $\varphi_i \colon U \to V_i$ linear für jedes $i \in I$, dann existiere eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi \colon U \to P$, sodass $p_i \circ \varphi = \varphi_i$, für jedes $i \in I$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten linearen Isomorphismus $\phi \colon P \xrightarrow{\cong} \prod_{i \in I} V_i$, sodass $\pi_i \circ \phi = p_i$, für jedes $i \in I$.*

Beweis. Aus der universellen Eigenschaft des Produkts erhalten wir eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\phi \colon P \to \prod_{i \in I} V_i$, sodass $\pi_i \circ \phi = p_i$, für jedes $i \in I$. Analog erhalten wir aus der universellen Eigenschaft der Abbildungen p_i eine lineare Abbildung $\psi \colon \prod_{i \in I} V_i \to P$, sodass $p_i \circ \psi = \pi_i$, für jedes $i \in I$. Es folgt $p_i \circ \psi \circ \phi = p_i = p_i \circ \mathrm{id}_P$, für alle $i \in I$, und daher $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_P$ wegen der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft von P. Analog gilt $\pi_i \circ \phi \circ$

$\psi = \pi_i = \pi_i \circ \mathrm{id}_{\prod_{i\in I} V_i}$, also $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\prod_{i\in I} V_i}$ aufgrund der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft des Produkts. Dies zeigt, dass ϕ und ψ zueinander inverse Isomorphismen sind. □

Die Projektionen $\pi_i\colon \prod_{j\in I} V_j \to V_i$ liefern lineare Abbildungen

$$(\pi_i)_*\colon L\Big(U, \prod_{j\in I} V_j\Big) \to L(U, V_i),$$

$(\pi_i)_*(\varphi) = \pi_i \circ \varphi$, und diese induzieren einen kanonischen linearen Isomorphismus

$$L\Big(U, \prod_{i\in I} V_i\Big) = \prod_{i\in I} L(U, V_i),$$

sodass die Projektionen der rechten Seiten den Abbildungen $(\pi_i)_*$ entsprechen.

Sind $\varphi_i\colon V_i \to W_i$ linear für jedes $i \in I$, dann erhalten wir aus der universellen Eigenschaft des Produkts eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi\colon \prod_{i\in I} V_i \to \prod_{i\in I} W_i$, sodass $\pi_i^W \circ \varphi = \varphi_i \circ \pi_i^V$, für jedes $i \in I$. Dabei bezeichnen $\pi_i^V\colon \prod_{j\in I} V_j \to V_i$ und $\pi_i^W\colon \prod_{j\in I} W_j \to W_i$ die kanonischen Projektionen der beiden Produkte. Diese Abbildung φ wird üblicherweise mit $\prod_{i\in I} \varphi_i$ bezeichnet,

$$\prod_{i\in I} \varphi_i\colon \prod_{i\in I} V_i \to \prod_{i\in I} W_i.$$

Aus der Eindeutigkeit erhalten wir sofort

$$\prod_{i\in I} \psi_i \circ \prod_{i\in I} \varphi_i = \prod_{i\in I} (\psi_i \circ \varphi_i) \qquad \text{und} \qquad \prod_{i\in I} \mathrm{id}_{V_i} = \mathrm{id}_{\prod_{i\in I} V_i},$$

wobei $\psi_i\colon W_i \to U_i$ weitere lineare Abbildungen bezeichnen. Im Fall endlicher Produkte, schreiben wir dafür:

$$V_1 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n} W_1 \times \cdots \times W_n.$$

Offensichtlich gilt $(\varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n)(v_1, \dots, v_n) = (\varphi_1(v_1), \dots, \varphi_n(v_n))$, für $v_i \in V_i$.

Auch die (äußere) *direkte Summe* $V \oplus W$ zweier Vektorräume V und W hat als zugrundeliegenden Vektorraum die Menge der Paare (v, w) mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation. Wir betrachten nun aber die beiden *kanonischen Inklusionen*

$$\iota_1\colon V \to V \oplus W \qquad \text{und} \qquad \iota_2\colon W \to V \oplus W,$$

$\iota_1(v) := (v, 0)$ und $\iota_2(w) := (0, w)$. Diese haben folgende Eigenschaft: *Ist U ein weiterer Vektorraum und sind $\varphi_1\colon V \to U$ und $\varphi_2\colon W \to U$ zwei lineare Abbildungen, dann existiert genau eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \oplus W \to U$, sodass $\varphi \circ \iota_1 = \varphi_1$ und $\varphi \circ \iota_2 = \varphi_2$.* Offensichtlich leistet nämlich $\varphi(v, w) = \varphi_1(v) +$

$\varphi_2(w)$ das Gewünschte. Diagrammatisch lässt sich diese *universelle Eigenschaft der direkten Summe* wie folgt veranschaulichen:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, "\iota_1"] \arrow[drr, bend left, "\varphi_1"] & & \\
& V \oplus W \arrow[r, dashed, "\exists!\varphi"] & U \\
W \arrow[ur, "\iota_2"'] \arrow[urr, bend right, "\varphi_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

Die beiden Inklusionen liefern lineare Abbildungen

$$L(V \oplus W, U) \xrightarrow{\iota_1^*} L(V, U) \qquad \text{und} \qquad L(V \oplus W, U) \xrightarrow{\iota_2^*} L(W, U),$$

$\iota_1^*(\varphi) = \varphi \circ \iota_1$, $\iota_2^*(\varphi) = \varphi \circ \iota_2$. Diese induzieren einen kanonischen linearen Isomorphismus

$$L(V \oplus W, U) = L(V, U) \times L(W, U),$$

sodass die Projektionen der rechten Seite den Abbildungen ι_1^* und ι_2^* entsprechen.

IX.1.2. Bemerkung. Sind V und W komplementäre Teilräume von U, dann induzieren die Inklusionen einen Isomorphismus zwischen der äußeren direkten Summe $V \oplus W$ und U, vgl. Proposition II.5.5(c).

Analog definieren wir die äußere direkte Summe $V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$ endlich vieler Vektorräume $V_1, \ldots, V_n$ als die Menge aller Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation, und betrachten die kanonischen Inklusionen

$$\iota_i \colon V_i \to V_1 \oplus \cdots \oplus V_n, \qquad \iota_i(v_i) = (0, \ldots, v_i, 0, \ldots, 0),$$

wobei der nicht-triviale Eintrag an der i-ten Stelle stehen soll. Diese haben folgende Eigenschaft: *Sind $\varphi_i \colon V_i \to U$ lineare Abbildungen, $i = 1, \ldots, n$, dann existiert eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi \colon V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \to U$, sodass $\varphi \circ \iota_i = \varphi_i$, für jedes $i = 1, \ldots, n$.*

Allgemeiner, seien V_i Vektorräume, $i \in I$, wobei I eine beliebige Indexmenge bezeichnet. Dann ist die Menge aller endlichen Tupel,

$$\bigoplus_{i \in I} V_i := \Big\{ v \in \prod_{i \in I} V_i : \text{nur endlich viele } v_i \neq 0 \Big\},$$

ein Teilraum des Produkts und daher selbst ein Vektorraum bezüglich komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation. Für $i \in I$ wird die lineare Abbildung

$$\iota_i \colon V_i \to \bigoplus_{j \in I} V_j, \qquad (\iota_i(v))_j := \begin{cases} v & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

als kononische Inklusion des i-ten Summanden bezeichnet. Diese haben folgende universelle Eigenschaft: *Sind $\varphi_i \colon V_i \to U$ lineare Abbildungen, $i \in I$, dann existiert genau eine lineare Abbildung $\varphi \colon \bigoplus_{i \in I} V_i \to U$, sodass $\varphi \circ \iota_i = \varphi_i$, für alle*

$i \in I$. Die lineare Abbildung $\varphi(v) = \sum_{i\in I} \varphi_i(v_i)$ leistet nämlich das Gewünschte. Beachte, dass dies eine endliche Summe ist, da nur endlich viele v_i verschieden von 0 sind. Die direkte Summe $\bigoplus_{i\in I}$ zusammen mit den kanonischen Inklusionen ι_i ist durch die *universelle Eigenschaft der direkten Summe* im wesentlichen eindeutig bestimmt. Genauer gilt:

IX.1.3. Lemma. *Seien $j_i\colon V_i \to S$ lineare Abbildungen mit der universellen Eigenschaft der direkten Summe, d.h. sind $\varphi_i\colon V_i \to U$ lineare Abbildungen, so existiere genau eine lineare Abbildung $\varphi\colon S \to U$, sodass $\varphi \circ j_i = \varphi_i$, für alle $i \in I$. Dann gibt es genau einen linearen Isomorphismus $\phi\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \xrightarrow{\cong} S$, sodass $\phi \circ \iota_i = j_i$, für jedes $i \in I$.*

Der Beweis ist völlig analog zu dem von Lemma IX.1.1, vgl. Aufgabe 52.

Die Inklusionen liefern lineare Abbildungen $\iota_i^*\colon L\bigl(\bigoplus_{j\in I} V_j, U\bigr) \to L(V_i, U)$, $\iota_i^*(\varphi) = \varphi \circ \iota_i$, und diese induzieren einen kanonischen linearen Isomorphismus

$$L\Bigl(\bigoplus_{i\in I} V_i, U\Bigr) = \prod_{i\in I} L(V_i, U), \tag{IX.1}$$

sodass die Projektionen der rechten Seite den Abbildungen ι_i^* entsprechen. Für $U = \mathbb{K}$ liefert dies einen kanonischen Isomorphismus

$$\Bigl(\bigoplus_{i\in I} V_i\Bigr)^* = \prod_{i\in I} V_i^*.$$

Sind $\varphi_i\colon V_i \to W_i$ linear für jedes $i \in I$, dann erhalten wir aus der universellen Eigenschaft der direkten Summe eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to \bigoplus_{i\in I} W_i$, sodass $\varphi \circ \iota_i^V = \iota_i^W \circ \varphi_i$, für jedes $i \in I$. Dabei bezeichnen $\iota_i^V\colon V_i \to \bigoplus_{j\in I} V_j$ und $\iota_i^W\colon W_i \to \bigoplus_{j\in I} W_j$ die kanonischen Inklusionen der beiden Summen. Diese Abbildung φ wird üblicherweise mit $\bigoplus_{i\in I} \varphi_i$ bezeichnet,

$$\bigoplus_{i\in I} \varphi_i\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to \bigoplus_{i\in I} W_i.$$

Aus der Eindeutigkeit erhalten wir sofort

$$\bigoplus_{i\in I} \psi_i \circ \bigoplus_{i\in I} \varphi_i = \bigoplus_{i\in I} (\psi_i \circ \varphi_i) \qquad \text{und} \qquad \bigoplus_{i\in I} \mathrm{id}_{V_i} = \mathrm{id}_{\bigoplus_{i\in I} V_i},$$

wobei $\psi_i\colon W_i \to U_i$ weitere lineare Abbildungen bezeichnen. Im Fall endlicher Produkte, schreiben wir dafür:

$$V_1 \oplus \cdots \oplus V_n \xrightarrow{\varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_n} W_1 \oplus \cdots \oplus W_n.$$

Offensichtlich gilt $(\varphi_1 \oplus \cdots \oplus \varphi_n)(v_1, \ldots, v_n) = (\varphi_1(v_1), \ldots, \varphi_n(v_n))$, für $v_i \in V_i$.

IX.2. Tensorprodukt. Eine Abbildung $\mu\colon V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ heißt multilinear oder k-linear, falls $\mu(v_1, \dots, v_k)$ linear in jeder Eintragung ist. Die Menge dieser Abbildungen bildet einen Vektorraum, den wir mit $L_k(V_1, \dots, V_k; W)$ bezeichnen. Beachte,

$$L_{k+r}(V_1, \dots, V_{k+r}; W) = L_k\big(V_1, \dots, V_k; L_r(V_{k+1}, \dots, V_{k+r}; W)\big), \tag{IX.2}$$

via $\mu(v_1, \dots, v_k)(v_{k+1}, \dots, v_{k+r}) = \mu(v_1, \dots, v_{k+r})$.

IX.2.1. Beispiel. $L_2(V, V; \mathbb{K})$ ist der Vektorraum der Bilinearformen auf V. Die Determinante kann als $\det \in L_n(\mathbb{K}^n, \dots, \mathbb{K}^n; \mathbb{K})$ aufgefasst werden.

IX.2.2. Satz. *Sind V und W zwei Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$, dann existiert ein $\mathbb{K}$-Vektorraum T und eine bilineare Abbildung $t\colon V \times W \to T$ mit folgender Eigenschaft: Für jeden Vektorraum U und jede bilineare Abbildung $b\colon V \times W \to U$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi\colon T \to U$, sodass $b = \varphi \circ t$. Der Vektorraum T zusammen mit der bilinearen Abbildung t sind durch diese Eigenschaft bis auf kanonischen Isomorphismus eindeutig bestimmt, d.h. ist $\tilde{t}\colon V \times W \to \tilde{T}$ eine weitere bilineare Abbildung mit obiger Eigenschaft, dann existiert ein eindeutiger linearer Isomorphismus $\phi\colon T \xrightarrow{\cong} \tilde{T}$, sodass $\tilde{t} = \phi \circ t$.*

Beweis. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit. Seien also $t\colon V \times W \to T$ und $\tilde{t}\colon V \times W \to \tilde{T}$ zwei bilineare Abbildungen, die beide die im Satz formulierte Eigenschaft besitzen. Es existiert daher eine eindeutige lineare Abbildung $\phi\colon T \to \tilde{T}$, sodass $\phi \circ t = \tilde{t}$. Analog existiert eine lineare Abbildung $\psi\colon \tilde{T} \to T$, sodass $\psi \circ \tilde{t} = t$. Es folgt $\psi \circ \phi \circ t = t = \mathrm{id}_T \circ t$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft von T erhaltem wir daraus $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_T$. Völlig analog lässt sich $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\tilde{T}}$ zeigen, denn $\psi \circ \phi \circ \tilde{t} = \tilde{t} = \mathrm{id}_{\tilde{T}} \circ \tilde{t}$. Somit sind ϕ und ψ zueinander inverse Isomorphismen.

Nun zur Existenz einer bilineare Abbildung $t\colon V \times W \to T$ mit der gewünschte Eigenschaft. Wir betrachten den Vektorraum, $F(V \times W, \mathbb{K}) = \mathbb{K}^{V \times W}$ aller Funktionen $V \times W \to \mathbb{K}$ mit der üblichen puntkweisen Addition und Skalarmultiplikation. Für $v \in V$ und $w \in W$ bezeichne $\delta_{v,w} \in F(V \times W, \mathbb{K})$ die Funktion mit $\delta_{v,w}(v, w) = 1$ und $\delta_{v,w}(\tilde{v}, \tilde{w}) = 0$ falls $\tilde{v} \neq v$ oder $\tilde{w} \neq w$. Es bezeichne $M \subseteq F(V \times W, \mathbb{K})$ den von den Elementen

$$\delta_{v,w}, \qquad v \in V, w \in W$$

aufgespannten Teilraum. Weiters bezeichne $R \subseteq M$ den von den Elementen

$$\begin{aligned} &\delta_{v_1+v_2,w} - \delta_{v_1,w} - \delta_{v_2,w}, \qquad && \delta_{\lambda v,w} - \lambda\delta_{v,w} \\ &\delta_{v,w_1+w_2} - \delta_{v,w_1} - \delta_{v,w_2}, && \delta_{v,\lambda w} - \lambda\delta_{v,w} \end{aligned}$$

aufgespannten Teilraum, wobei $v, v_1, v_2 \in V$, $w, w_1, w_2 \in W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Schließlich sei $T := M/R$ und $t\colon V \times W \to T$, $t(v, w) := [\delta_{v,w}]$. Da im Quotientenraum

M/R die Relationen

$$[\delta_{v_1+v_2,w}] = [\delta_{v_1,w}] + [\delta_{v_2,w}], \qquad [\delta_{\lambda v,w}] = \lambda[\delta_{v,w}]$$
$$[\delta_{v,w_1+w_2}] = [\delta_{v,w_1}] + [\delta_{v,w_2}], \qquad [\delta_{v,\lambda w}] = \lambda[\delta_{v,w}]$$

gelten, ist t bilinear. Es bleibt zu zeigen, dass t die universelle Eigenschaft besitzt. Sei also $b\colon V \times W \to U$ bilinear. Da die Funktionen $\delta_{v,w}$ eine Basis von M bilden, existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\tilde\varphi\colon M \to U$, sodass $\tilde\varphi(\delta_{v,w}) = b(v,w)$, für alle $v \in V$ und $w \in W$. Aus der Bilinearität von b folgt $\tilde\varphi|_R = 0$, etwa ist

$$\begin{aligned}\tilde\varphi(\delta_{v_1+v_2,w} - \delta_{v_1,w} - \delta_{v_2,w}) &= \tilde\varphi(\delta_{v_1+v_2,w}) - \tilde\varphi(\delta_{v_1,w}) - \tilde\varphi(\delta_{v_2,w}) \\ &= b(v_1+v_2,w) - b(v_1,w) - b(v_2,w) = 0,\end{aligned}$$

und analog lässt sich zeigen, dass $\tilde\varphi$ auf den anderen Erzeugern von R verschwindet. Somit existiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon T \to U$, sodass $\varphi([f]) = \tilde\varphi(f)$, für jedes $f \in M$. Insbesondere erhalten wir $\varphi(t(v,w)) = \varphi([\delta_{v,w}]) = \tilde\varphi(\delta_{v,w}) = b(v,w)$, und somit $\varphi \circ t = b$. Nach Konstruktion bildet $\{t(v,w) : v \in V, w \in W\}$ ein Erzeugendensystem von T. Daraus folgt sofort, dass die lineare Abbildung $\varphi\colon T \to U$ durch die Gleichung $\varphi \circ t = b$ eindeutig bestimmt ist. □

IX.2.3. Definition (Tensorprodukt). Seien V und W zwei Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Unter einem (dem) *Tensorprodukt* von V und W verstehen wir einen $\mathbb{K}$-Vektorraum $V \otimes W$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung

$$V \times W \xrightarrow{\otimes} V \otimes W, \qquad (v,w) \mapsto v \otimes w,$$

die folgende Eigenschaft hat: *Für jeden $\mathbb{K}$-Vektorraum U und jede bilineare Abbildung $b\colon V \times W \to U$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi\colon V \otimes W \to U$, sodass $\varphi(v \otimes w) = b(v,w)$, für alle $v \in V$ und $w \in W$:*

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[rr, "\otimes"] \arrow[dr, "b"'] & & V \otimes W \arrow[dl, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Dies wird als *universelle Eigenschaft des Tensorprodukts* bezeichnet. Nach dem vorangehenden Satz existiert das Tensorprodukt beliebiger Vektorräume und ist im wesentlichen eindeutig.[18]

Aufgrund der Bilinearität der Abbildung $V \times W \xrightarrow{\otimes} V \otimes W$ gilt:

(a) $(v_1 + v_2) \otimes w = v_1 \otimes w + v_2 \otimes w$
(b) $v \otimes (w_1 + w_2) = v \otimes w_1 + v \otimes w_2$
(c) $\lambda(v \otimes w) = (\lambda v) \otimes w = v \otimes (\lambda w)$

[18] Wir könnten expliziter auch $V \otimes W := T = M/R$ definieren, vgl. Satz IX.2.2.

für alle $v, v_i \in V$, $w, w_i \in W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts liefert eine Bijektion

$$L_2(V, W; U) = L(V \otimes W, U).$$

Aus der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft folgt sofort, dass dies ein linearer Isomorphismus ist. Da auch $L_2(V, W; U) = L(V, L(W, U))$, siehe (IX.2), erhalten wir einen kanonischen linearen Isomorphismus

$$L(V \otimes W, U) = L(V, L(W, U)). \tag{IX.3}$$

IX.2.4. Beispiel. Ist V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, dann existiert ein kanonischer Isomorphismus

$$V \otimes \mathbb{K} = V, \qquad v \otimes \lambda \leftrightarrow \lambda v.$$

Um dies einzusehen, fassen wir die Skalarmultiplikation als bilineare Abbildung $V \times \mathbb{K} \to V$ auf, und erhalten eine lineare Abbildung $\phi\colon V \otimes \mathbb{K} \to V$, sodass $\phi(v \otimes \lambda) = \lambda v$, für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Andereseits ist auch die Abbildung $\psi\colon V \to V \otimes \mathbb{K}$, $\psi(v) := v \otimes 1$, linear. Es folgt $\phi(\psi(v)) = \phi(v \otimes 1) = v$, also $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_V$ aber auch $\psi(\phi(v \otimes \lambda)) = \psi(\lambda v) = (\lambda v) \otimes 1 = v \otimes \lambda$, für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, also $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{V \otimes \mathbb{K}}$ wegen der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft des Tensoprodukts. Somit sind ϕ und ψ zueinander inverse Isomorphismen.

IX.2.5. Proposition. *Seien V und W zwei Vektorräume über $\mathbb{K}$, B eine Basis von V und C eine Basis von W. Dann bildet $\{b \otimes c : b \in B, c \in C\}$ eine Basis von $V \otimes W$. Sind V und W beide endlich dimensional, dann ist auch $V \otimes W$ endlich dimensional, und es gilt*

$$\dim(V \otimes W) = \dim(V) \cdot \dim(W).$$

Beweis. Es bezeichne $L \subseteq V \otimes W$ den von $\{b \otimes c : b \in B, c \in C\}$ aufgespannten Teilraum, und $\pi\colon V \otimes W \to (V \otimes W)/L$ die kanonische Projektion. Es gilt daher $\pi(b \otimes c) = 0$ für alle $b \in B$ und $c \in C$. Da B und C Erzeugendensysteme von V bzw. W sind, folgt $\pi(v \otimes w) = 0$, für alle $v \in V$ und $w \in W$. Sind nämlich $v = \sum_{b \in B} \lambda_b b$ und $w = \sum_{c \in C} \mu_c c$ Darstellungen, wobei fast alle λ_b und μ_c verschwinden, dann folgt $\pi(v \otimes w) = \sum_{b \in B, c \in C} \lambda_b \mu_c \pi(b \otimes c) = 0$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts erhalten wir $\pi = 0$, also $L = V \otimes W$. Dies zeigt, dass $\{b \otimes c : b \in B, c \in C\}$ ein Erzeugendensystem von $V \otimes W$ bildet.

Um auch die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, sei

$$\sum_{b \in B, c \in C} \lambda_{b,c}\, b \otimes c = 0, \tag{IX.4}$$

wobei nur endlich viele der Skalare $\lambda_{b,c} \in \mathbb{K}$ verschieden von Null sind. Seien $b_0 \in B$ und $c_0 \in C$ fix. Da B eine Basis ist, existiert ein lineares Funktional $\beta\colon V \to \mathbb{K}$, sodass $\beta(b_0) = 1$ und $\beta(b) = 0$, für alle $b \in B \setminus \{b_0\}$. Genauso existiert ein lineares Funktional $\gamma\colon W \to \mathbb{K}$, sodass $\gamma(c_0) = 1$ und $\gamma(c) = 0$, für alle $c \in C \setminus \{c_0\}$.

Da $V \times W \to \mathbb{K}$, $(v, w) \mapsto \beta(v)\gamma(w)$, bilinear ist, existiert nach der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts ein lineares Funktional $\varphi\colon V \otimes W \to \mathbb{K}$, sodass $\varphi(v \otimes w) = \beta(v)\gamma(w)$, für alle $v \in V$ und $w \in W$. Insbesondere gilt für $b \in B$ und $c \in C$:

$$\varphi(b \otimes c) = \begin{cases} 1 & \text{falls } b = b_0 \text{ und } c = c_0, \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Wenden wir dieses Funktional φ auf (IX.4) an, erhalten wir $\lambda_{b_0,c_0} = 0$. Dies zeigt, dass $\{b \otimes c : b \in B, c \in C\}$ auch linear unabhängig in $V \otimes W$ ist. □

IX.2.6. Bemerkung. Elemente der Form $v \otimes w$ in $V \otimes W$ werden als *elementare Tensoren* bezeichnet. Nach dem vorangehenden Resultat, lässt sich jedes Element in $V \otimes W$ als endliche Summe elementarer Tensoren schreiben. I.A. ist aber nicht jedes Element des Tensorprodukts von der Form $v \otimes w$, vgl. Aufgabe 56.

Sind $\varphi\colon V \to V'$ und $\psi\colon W \to W'$ zwei lineare Abbildungen, dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi \otimes \psi\colon V \otimes W \to V' \otimes W'$, sodass

$$(\varphi \otimes \psi)(v \otimes w) = \varphi(v) \otimes \psi(w), \tag{IX.5}$$

für alle $v \in V$ und $w \in W$. Dies folgt aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts, denn der Ausdruck $\varphi(v) \otimes \psi(w)$ ist bilinear in v und w.

IX.2.7. Proposition. *Für $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in L(V, V')$, $\psi, \psi_1, \psi_2 \in L(W, W')$, $\varphi' \in L(V', V'')$, $\psi' \in L(W', W'')$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:*
(a) $\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_W = \mathrm{id}_{V \otimes W}$
(b) $(\varphi' \circ \varphi) \otimes (\psi' \circ \psi) = (\varphi' \otimes \psi') \circ (\varphi \otimes \psi)$
(c) $(\varphi_1 + \varphi_2) \otimes \psi = \varphi_1 \otimes \psi + \varphi_2 \otimes \psi$
(d) $\varphi \otimes (\psi_1 + \psi_2) = \varphi \otimes \psi_1 + \varphi \otimes \psi_2$
(e) $(\lambda\varphi) \otimes \psi = \lambda(\varphi \otimes \psi) = \varphi \otimes (\lambda\psi)$

Beweis. Dies folgt leicht daraus, dass die Abbildung $\varphi \otimes \psi$ durch (IX.5) eindeutig bestimmt ist, vgl. Aufgabe 55. Etwa gilt für alle $v \in V$ und $w \in W$,

$$\begin{aligned} \bigl(\varphi_1 \otimes \psi + \varphi_2 \otimes \psi\bigr)(v \otimes w) &= (\varphi_1 \otimes \psi)(v \otimes w) + (\varphi_2 \otimes \psi)(v \otimes w) \\ &= \varphi_1(v) \otimes \psi(w) + \varphi_2(v) \otimes \psi(w) \\ &= \bigl(\varphi_1(v) + \varphi_2(v)\bigr) \otimes \psi(w) \\ &= (\varphi_1 + \varphi_2)(v) \otimes \psi(w) \\ &= \bigl((\varphi_1 + \varphi_2) \otimes \psi\bigr)(v \otimes w), \end{aligned}$$

und wegen der eben angesprochenen Eindeutigkeit daher (c). □

Das Tensorprodukt ist in folgendem Sinn distributiv:

IX.2.8. Proposition. *Sei I eine beliebige Indexmenge, V_i Vektorräume, $i \in I$, und bezeichnen $\iota_i\colon V_i \to \bigoplus_{j \in I} V_j$ die kanonischen Inklusionen. Dann induzieren die linearen Abbildungen $V_i \otimes W \xrightarrow{\iota_i \otimes \mathrm{id}_W} \Bigl(\bigoplus_{j \in I} V_j\Bigr) \otimes W$ einen kanonischen* *linearen Isomorphismus*

$$\bigoplus_{i\in I}(V_i\otimes W)=\Big(\bigoplus_{i\in I}V_i\Big)\otimes W.$$

Insbesondere gilt: $(V_1\oplus V_2)\otimes W=(V_1\otimes W)\oplus(V_2\otimes W)$. *Analog*

$$V\otimes\Big(\bigoplus_{i\in I}W_i\Big)=\bigoplus_{i\in I}(V\otimes W_i),$$

und speziell: $V\otimes(W_1\oplus W_2)=(V\otimes W_1)\oplus(V\otimes W_2)$.

Beweis. Aus (IX.1) und (IX.3) erhalten wir:

$$L\Big(\Big(\bigoplus_{i\in I}V_i\Big)\otimes W,U\Big)=L\Big(\bigoplus_{i\in I}V_i,L(W,U)\Big)$$
$$=\prod_{i\in I}L(V_i,L(W,U))=\prod_{i\in I}L(V_i\otimes W,U).$$

Sind $\varphi_i\colon V_i\otimes W\to U$ linear, $i\in I$, dann existiert also genau eine lineare Abbildung $\varphi\colon\big(\bigoplus_{i\in I}V_i\big)\otimes W\to U$, sodass $\varphi\circ(\iota_i\otimes\mathrm{id}_W)=\varphi_i$, für alle $i\in I$. Die Abbildungen $\iota_i\otimes\mathrm{id}_W\colon V_i\otimes W\to\big(\bigoplus_{j\in I}V_j\big)\otimes W$ haben also die universelle Eigenschaft der direkten Summe $V_i\otimes W\to\bigoplus_{j\in I}(V_j\otimes W)$, und induzieren daher einen Isomorphismus:

$$\bigoplus_{i\in I}(V_i\otimes W)=\Big(\bigoplus_{i\in I}V_i\Big)\otimes W.$$

Die zweite Aussagen lässt sich völlig analog behandeln. □

IX.2.9. Proposition. *Sei* $0\to V_1\xrightarrow{\iota}V_2\xrightarrow{\pi}V_3\to 0$ *eine kurze exakte Sequenz von Vektorräumen, und* W *ein weiterer Vektorraum. Dann ist auch*

$$0\to V_1\otimes W\xrightarrow{\iota\otimes\mathrm{id}_W}V_2\otimes W\xrightarrow{\pi\otimes\mathrm{id}_W}V_3\otimes W\to 0$$

eine kurze exakte Sequenz.[19] *Für jeden Teilraum* U *von* V *kann daher* $U\otimes W$ *in kanonischer Weise als Teilraum von* $V\otimes W$ *aufgefasst werden, und wir haben einen kanonischen Isomorphismus:*

$$(V\otimes W)/(U\otimes W)=(V/U)\otimes W.$$

Beweis. Da π surjektiv ist, existiert eine lineare Abbildung $\sigma\colon V_3\to V_2$, sodass $\pi\circ\sigma=\mathrm{id}_{V_3}$. Da, $\pi\circ(\mathrm{id}_{V_2}-\sigma\circ\pi)=\pi-\pi\circ\sigma\circ\pi=\pi-\pi=0$, hat die Abbildung $\mathrm{id}_{V_2}-\sigma\circ\pi$ Werte in $\ker(\pi)=\mathrm{img}(\iota)$, es existiert daher eine lineare Abbildung $\rho\colon V_2\to V_1$, sodass $\iota\circ\rho=\mathrm{id}_{V_2}-\sigma\circ\pi$. Es folgt $\iota\circ\rho\circ\iota=\iota-\sigma\circ\pi\circ\iota=\iota-0=\iota\circ\mathrm{id}_{V_1}$, also $\rho\circ\iota=\mathrm{id}_{V_1}$ denn ι ist injektiv. Zusammenfassend gilt:

$$\rho\circ\iota=\mathrm{id}_{V_1},\qquad\iota\circ\rho+\sigma\circ\pi=\mathrm{id}_{V_2}\qquad\text{und}\qquad\pi\circ\sigma=\mathrm{id}_{V_3}.$$

[19] Eine Sequenz linearer Abbildungen $0\to V_1\xrightarrow{\iota}V_2\xrightarrow{\pi}V_3\to 0$ heißt exakt, falls ι injektiv ist, π surjektiv ist und $\mathrm{img}(\iota)=\ker(\pi)$ gilt.

Mit den Rechenregeln in Proposition IX.2.7 folgt:

$$(\rho\otimes\mathrm{id}_W)\circ(\iota\otimes\mathrm{id}_W)=\mathrm{id}_{V_1\otimes W},\qquad(\pi\otimes\mathrm{id}_W)\circ(\sigma\otimes\mathrm{id}_W)=\mathrm{id}_{V_3\otimes W}$$
$$(\iota\otimes\mathrm{id}_W)\circ(\rho\otimes\mathrm{id}_W)+(\sigma\otimes\mathrm{id}_W)\circ(\pi\otimes\mathrm{id}_W)=\mathrm{id}_{V_2\otimes W}$$

Aus der ersten Gleichung folgt, dass $\iota\otimes\mathrm{id}_W\colon V_1\otimes W\to V_2\otimes W$ injektiv ist. Aus der zweiten sehen wir, dass $\pi\otimes\mathrm{id}_W\colon V_2\otimes W\to V_3\otimes W$ surjektiv ist. Aus der dritten folgt, $\ker(\pi\otimes\mathrm{id}_W)\subseteq\mathrm{img}(\iota\otimes\mathrm{id}_W)$. Schließlich gilt auch die umgekehrte Inklusion, $\mathrm{img}(\iota\otimes\mathrm{id}_W)\subseteq\ker(\pi\otimes\mathrm{id}_W)$, denn $(\pi\otimes\mathrm{id}_W)\circ(\iota\otimes\mathrm{id}_W)=(\pi\circ\iota)\otimes\mathrm{id}_W=0\otimes\mathrm{id}_W=0$, da ja $\pi\circ\iota=0$. Die verbleibenden Aussagen erhalten wir, indem wir das eben Bewiesene auf die kurze exakte Sequenz $0\to U\to V\to V/U\to 0$ anwenden. □

IX.2.10. Proposition. *Seien V und W zwei endlich dimensionale Vektorräume. Dann induziert die bilineare Abbildung $V^*\times W\to L(V,W)$, $(\alpha,w)\mapsto\alpha w$, einen kanonischen linearen Isomorphismus:*

$$V^*\otimes W=L(V,W).$$

Darüber hinaus existiert ein kanonischer linearer Isomorphismus

$$(V\otimes W)^*=V^*\otimes W^*,\tag{IX.6}$$

sodass $(\alpha\otimes\beta)(v\otimes w)=\alpha(v)\beta(w)$, für alle $\alpha\in V^*$, $\beta\in W^*$, $v\in V$ und $w\in W$.

Beweis. Sei $b_1,\dots,b_n$ eine Basis von V und $b_1^*,\dots,b_n^*$ die dazu duale Basis von V^*, d.h. $b_i^*(b_j)=\delta_{i,j}$. Weiters sei $c_1,\dots,c_m$ eine Basis von W. Nach Proposition IX.2.5 ist daher $b_i^*\otimes c_j$, $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq m$, eine Basis von $V^*\otimes W$. Andererseits lässt sich jede lineare Abbildung $\varphi\colon V\to W$ in der Form $\varphi=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m A_{j,i}b_i^*c_j$ schreiben, wobei die eindeutig bestimmten Koeffizienten $A_{j,i}\in\mathbb{K}$ gerade die Eintragungen der Matrix von φ bezüglich der Basen b_i und c_j sind. Folglich ist $b_i^*c_j$, $1\leq i\leq n$, $1\leq j\leq m$, eine Basis von $L(V,W)$. Die Abbildung $V^*\times W\to L(V,W)$ bildet also eine Basis von $V^*\otimes W$ auf eine Basis von $L(V,W)$ ab, und ist daher ein Isomorphismus. Mit (IX.3) erhalten wir daraus

$$(V\otimes W)^*=L(V\otimes W,\mathbb{K})=L(V,L(W,\mathbb{K}))=L(V,W^*)=V^*\otimes W^*,$$

und somit auch die zweite Behauptung. □

IX.2.11. Beispiel. Für jeden endlich dimensionalen Vektorraum V erhalten wir aus dem vorangehenden Resultat einen kanonischen linearen Isomorphismus:

$$\mathrm{end}(V)=V^*\otimes V.$$

Die identische Abbildung $\mathrm{id}_V\in\mathrm{end}(V)$ entspricht dabei dem Element

$$\sum_{i=1}^n b_i^*\otimes b_i\in V^*\otimes V,$$

wobei $b_1,\dots,b_n$ eine beliebige Basis von V, und $b_1^*,\dots,b_n^*$ die dazu duale Basis von V^* bezeichnen, d.h. $b_i^*(b_j)=\delta_{i,j}$. Die Spur, $\mathrm{tr}\colon\mathrm{end}(V)\to\mathbb{K}$, liefert ein lineares Funktional $\mathrm{tr}\colon V^*\otimes V\to\mathbb{K}$, das wiederum der kanonischen bilinearen Abbildung $V^*\times V\to\mathbb{K}$, $(\alpha,v)\mapsto\alpha(v)$ entspricht.

IX.2.12. Beispiel. Sei X eine Menge und bezeichne $F_c(X)$ die Menge aller Funktionen $f\colon X \to \mathbb{K}$ mit endlichem Träger, d.h. $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ ist endlich. Sei Y eine weitere Menge und bezeichnen

$$p_1\colon X \times Y \to X, \qquad p_2\colon X \times Y \to Y$$

die beiden Projektionen, $p_1(x,y) = x$, $p_2(x,y) = y$. Dann ist

$$F_c(X) \times F_c(Y) \to F_c(X \times Y), \qquad (f,g) \mapsto (f \circ p_1) \cdot (g \circ p_2),$$

offensichtlich bilinear und induziert daher eine lineare Abbildung

$$F_c(X) \otimes F_c(Y) \to F_c(X \times Y), \qquad (f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y), \tag{IX.7}$$

wobei $f \in F_c(X)$, $g \in F_c(Y)$, $x \in X$ und $y \in Y$. Beachte, dass $\{\delta_x : x \in X\}$ eine Basis von $F_c(X)$ und $\{\delta_y : y \in Y\}$ eine Basis von $F_c(Y)$ ist. Nach Proposition IX.2.5 bildet $\{\delta_x \otimes \delta_y : x \in X, y \in Y\}$ also eine Basis von $F_c(X) \otimes F_c(Y)$. Weiters ist $\{\delta_{(x,y)} : (x,y) \in X \times Y\}$ eine Basis von $F_c(X \times Y)$. Da $\delta_{(x,y)} = \delta_x \otimes \delta_y$ bildet (IX.7) also eine Basis auf eine Basis ab, und liefert daher einen kanonischen linearen Isomorphismus:

$$F_c(X) \otimes F_c(Y) = F_c(X \times Y).$$

Analog lässt sich ein Tensorprodukt endlich vieler Vektorräume $V_1, \dots, V_k$ konstruieren, d.h. es existiert eine k-lineare Abbildung

$$V_1 \times \cdots \times V_k \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_k, \qquad (v_1, \dots, v_k) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_k,$$

mit folgender Eigenschaft: *Zu jeder k-linearen Abbildung $\mu\colon V_1 \times \cdots \times V_k \to W$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi\colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \to W$, sodass $\varphi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = \mu(v_1, \dots, v_k)$, für alle $v_i \in V_i$.* Durch diese *universelle Eigenschaft* ist das Tensorprodukt bis auf kanonischen Isomorphismus eindeutig bestimmt. Wir erhalten einen kanonischen linearen Isomorphismus

$$L_k(V_1, \dots, V_k; W) = L(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k, W).$$

Ist B_i eine Basis von V_i, dann bildet $\{b_1 \otimes \cdots \otimes b_k : b_i \in B_i\}$ eine Basis von $V_1 \otimes \cdots \otimes V_k$. Sind alle V_i endlich dimensional, dann ist auch ihr Tensorprodukt endlich dimensional, und es gilt

$$\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_k) = \dim(V_1) \cdots \dim(V_k).$$

Sind $\varphi_i\colon V_i \to W_i$ linear, dann existiert genau eine lineare Abbildung

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \xrightarrow{\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_k} W_1 \otimes \cdots \otimes W_k$$

sodass $(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_k)(v_1, \dots, v_k) = \varphi_1(v_1) \cdots \varphi_k(v_k)$, für alle $v_i \in V_i$. Es gelten Rechenregeln analog zu denen in Proposition IX.2.7. Ist $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ eine Permutation, so existiert eine eindeutige lineare Abbildung

$$\phi_\sigma\colon V_1 \otimes \cdots \otimes V_k \to V_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes V_{\sigma(k)} \tag{IX.8}$$

sodass $\phi_\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}$. Aus der Eindeutigkeit erhalten wir

$$\phi_{\sigma_1\sigma_2} = \phi_{\sigma_1} \circ \phi_{\sigma_2} \qquad \text{und} \qquad \phi_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}_{V_1 \otimes \cdots \otimes V_k}, \tag{IX.9}$$

für beliebige Permutationen $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_k$. Daraus folgt auch, dass jedes ϕ_σ ein Isomorphismus mit Inverser $\phi_\sigma^{-1} = \phi_{\sigma^{-1}}$ ist. Insbesondere erhalten wir einen kanonischen linearen Isomorphismus

$$V \otimes W = W \otimes V, \qquad v \otimes w \leftrightarrow w \otimes v.$$

Das Tensorprodukt ist in folgendem Sinn assoziativ:

IX.2.13. Proposition. *Es existieren kanonische lineare Isomorphismen:*

$$V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 = (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3,$$

$$v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3) \leftrightarrow v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \leftrightarrow (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3.$$

Beweis. Aus (IX.2) und (IX.3) erhalten wir:

$$\begin{aligned} L_3(V_1, V_2, V_3; W) &= L\big(V_1, L_2(V_2, V_3; W)\big) \\ &= L\big(V_1, L(V_2 \otimes V_3, W)\big) = L\big(V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3); W\big) \end{aligned}$$

Zu jeder trilinearen Abbildung $\mu\colon V_1 \times V_2 \times V_3 \to W$ existiert daher genau eine lineare Abbildung $\varphi\colon V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \to W$, sodass $\varphi(v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3)) = \mu(v_1, v_2, v_3)$. Somit hat die trilineare Abbildung

$$V_1 \times V_2 \times V_3 \to V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3), \qquad (v_1, v_2, v_3) \mapsto v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3),$$

die universelle Eigenschaft des Tensorprodukts $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$, und wir erhalten den Isomorphismus $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$. Analog lässt sich der zweite Isomorphismus konstruieren. □

IX.3. Erweiterung der Skalare. Jede lineare Abbildung zwischen reellen Vektorräumen kann in natürlicher Weise zu einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung zwischen komplexen Vektorräumen gemacht werden. Letztere sind oft leichter zu studieren, denn $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen. Oft ist es möglich daraus Informationen über die ursprüngliche $\mathbb{R}$-lineare Abbildung zu erlangen. Bei der Behandlung der reellen Jordan'schen Normalform sind wir genau so vorgegangen. Im folgenden kurzen Abschnitt wollen wir diese Konstruktion mit Hilfe des Tensorprodukts systematischer untersuchen und verallgemeinern.

IX.3.1. Definition (Teilkörper). Sei $\mathbb{L}$ ein Körper. Unter einem *Teilkörper* auch *Unterkörper* von $\mathbb{L}$ verstehen wir jede Teilmenge $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$, die bezüglich der Operationen von $\mathbb{L}$ selbst einen Körper bildet. In diesem Fall kann $\mathbb{L}$ als Vektorraum über $\mathbb{K}$ aufgefasst werden. Die Dimension $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$ wird als Grad der Körpererweiterung $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ bezeichnet.

IX.3.2. Beispiel. $\mathbb{R}$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{C}$. $\mathbb{Q}$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{R}$ und auch Teilkörper von $\mathbb{C}$. Die Menge $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ bildet einen Teilkörper von $\mathbb{R}$. Die Menge $\{a + b\mathbf{i} : a, b \in \mathbb{Q}\}$ bildet einen Teilkörper von $\mathbb{C}$.

Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ ein Teilkörper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Es lässt sich dann $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{L}$ machen, indem wir die Skalarmultiplikation mit $\lambda \in \mathbb{L}$ durch

$$V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes \lambda} V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}, \qquad \text{d.h.} \qquad \lambda(v \otimes \mu) = v \otimes (\lambda\mu)$$

definieren, $v \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{L}$. Dies ist wohldefiniert, denn die Skalarmultiplikation $\mathbb{L} \xrightarrow{\lambda} \mathbb{L}$ ist $\mathbb{K}$-linear. Es sind nun die Vektorraumaxiome zu überprüfen: Für $\lambda_1, \lambda_2, \mu \in \mathbb{L}$ und $v \in V$ gilt

$$\lambda_1(\lambda_2(v \otimes \mu)) = v \otimes (\lambda_1(\lambda_2\mu)) = v \otimes ((\lambda_1\lambda_2)\mu) = (\lambda_1\lambda_2)(v \otimes \mu)$$

und daher $\lambda_1(\lambda_2\xi) = (\lambda_1\lambda_2)\xi$, für alle $\xi \in V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$, wegen der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts.[20] Ebenso

$$\begin{aligned}(\lambda_1 + \lambda_2)(v \otimes \mu) &= v \otimes ((\lambda_1 + \lambda_2)\mu) = v \otimes (\lambda_1\mu + \lambda_2\mu) \\ &= v \otimes (\lambda_1\mu) + v \otimes (\lambda_2\mu) = \lambda_1(v \otimes \mu) + \lambda_2(v \otimes \mu),\end{aligned}$$

and daher $(\lambda_1 + \lambda_2)\xi = \lambda_1\xi + \lambda_2\xi$, für alle $\xi \in V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$, wieder aufgrund der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts. Alle anderen Vektorraumaxiome lassen sich noch einfacher verifizieren. Somit ist also $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ ein Vektorraum über $\mathbb{L}$.

Für eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, ist

$$V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \xrightarrow{\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}}} W \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$$

eine $\mathbb{L}$-lineare Abbildung. Sind $v \in V$ und $\mu, \lambda \in \mathbb{L}$, dann gilt nämlich

$$\begin{aligned}\big(\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}}\big)(\lambda(v \otimes \mu)) &= \big(\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}}\big)(v \otimes (\lambda\mu)) = \varphi(v) \otimes (\lambda\mu) \\ &= \lambda(\varphi(v) \otimes \mu) = \lambda\big(\big(\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}}\big)(v \otimes \mu)\big),\end{aligned}$$

und daher $(\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}})(\lambda\xi) = \lambda\big(\big(\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}}\big)(\xi)\big)$, für alle $\xi \in V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$. Beachte, dass diese Konstruktion mit der Komposition von Abbildungen verträglich ist, d.h.

$$(\psi \circ \varphi) \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}} = (\psi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}}) \circ (\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}}) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}} = \mathrm{id}_{V \otimes \mathbb{L}},$$

für jede weitere lineare Abbildung zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, $\psi\colon W \to U$.

Ist b_i, $i \in I$ eine Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraums V, dann bildet $b_i \otimes 1$, $i \in I$ eine Basis des $\mathbb{L}$-Vektorraums $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$. Nach Proposition IX.2.5 ist dieses System nämlich linear unabhängig, und jedes Element in $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ lässt sich in der Form $\sum_{i=1}^n b_i \otimes \lambda_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i(b_i \otimes 1)$ schreiben, wobei $\lambda_i \in \mathbb{L}$. Insbesondere folgt

$$\dim_{\mathbb{L}}(V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}) = \dim_{\mathbb{K}}(V).$$

Für jede lineare Abbildungen $\varphi\colon V \to W$ zwischen endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen gilt

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{L}}\big(\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}}\big) = \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(\varphi) \qquad \text{und} \qquad \det_{\mathbb{L}}\big(\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}}\big) = \det_{\mathbb{K}}(\varphi)$$

siehe Aufgabe 59.

[20] Beide Ausdrücke, $\lambda_1(\lambda_2\xi)$ und $(\lambda_1\lambda_2)\xi$ sind $\mathbb{K}$-linear in ξ.

Die $\mathbb{K}$-lineare und injektive Abbildung

$$\iota\colon V \to V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}, \qquad \iota(v) := v \otimes 1$$

hat folgender universelle Eigenschaft: *Ist W ein Vektorraum über $\mathbb{L}$, und ist $\varphi\colon V \to W$ eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung, dann existiert eine eindeutige $\mathbb{L}$-lineare Abbildung $\tilde{\varphi}\colon V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \to W$, sodass $\tilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \arrow[dl, dashed, "\exists!\tilde{\varphi}"] \\ & W & \end{tikzcd}$$

Aus der universellen Eigenschaft des Tensorprodukts $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ folgt nämlich, dass $\tilde{\varphi}(v \otimes \mu) := \mu\varphi(v)$ eine wohldefinierte $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \to W$ definiert, denn der Ausdruck $\mu\varphi(v)$ ist $\mathbb{K}$-linear in v und μ. Offensichtlich gilt $\tilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$. Ist $\lambda \in \mathbb{L}$, dann $\tilde{\varphi}(\lambda(v \otimes \mu)) = \tilde{\varphi}(v \otimes (\lambda\mu)) = (\lambda\mu)\varphi(v) = \lambda(\mu\varphi(v)) = \lambda\tilde{\varphi}(v \otimes \mu)$, also $\tilde{\varphi}(\lambda\xi) = \lambda\tilde{\varphi}(\xi)$, für alle $\xi \in V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$, d.h. $\tilde{\varphi}$ ist auch $\mathbb{L}$-linear. Die universelle Eigenschaft liefert einen $\mathbb{L}$-linearen Isomorphismus

$$L_{\mathbb{L}}(V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}, W) = L_{\mathbb{K}}(V, W_{\mathbb{K}}).$$

wobei $W_{\mathbb{K}}$ den W zugrundeliegenden $\mathbb{K}$-Vektorraum bezeichnet.

Ist V ein reeller Vektorraum, dann wird der komplexe Vektorraum $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ als *Komplexifizierung* von V bezeichnet. Bei der Behandlung der reellen Jordan'schen Normalform in Abschnitt VI.4 wurde diese erfolgreich verwendet, allerdings haben wir dort mit einer ad hoc Definition der Komplexifizierung gearbeitet.

IX.4. Tensoralgebra. Unter einer $\mathbb{K}$-*Algebra* verstehen wir einen $\mathbb{K}$-Vektorraum $\mathcal{A}$ zusammen mit einer $\mathbb{K}$-bilinearen Abbildung, der *Multiplikation,*

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \qquad (a, b) \mapsto ab.$$

Die Algebra wird *assoziativ* genannt, wenn $(ab)c = a(bc)$, für alle $a, b, c \in \mathcal{A}$. Ein Element $e \in \mathcal{A}$ heißt *Einselement,* falls $ea = a = ae$, für alle $a \in \mathcal{A}$. In diesem Fall ist das Einselement eindeutig bestimmt und wird meist mit $1 \in \mathcal{A}$ bezeichnet. Existieren Teilräume $\mathcal{A}^q$ sodass $\mathcal{A} = \bigoplus_{q \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}^q$, und gilt $ab \in \mathcal{A}^{p+q}$, für alle $a \in \mathcal{A}^p$ und $b \in \mathcal{A}^q$, dann sprechen wir von einer *graduierten Algebra.*

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ zwei $\mathbb{K}$-Algebren. Unter einem *Algebrahomomorphismus* verstehen wir eine $\mathbb{K}$-lineare Abbildung $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$, die auch mit der Multiplikation verträglich ist, d.h.

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$$

für alle $a, b \in \mathcal{A}$. Besitzen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ Einselemente, dann verlangen von einem Algebrahomomorphismus auch $\varphi(1) = 1$. Ein Algebrahomomorphismus $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ wird als *Algebraisomorphismus* bezeichnet, wenn ein Algebrahomomorphismus $\psi\colon \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ existiert, sodass $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathcal{A}'}$.

IX.4.1. Beispiel. Ist X eine Menge, dann bildet der Vektorraum aller Funktionen, $F(X, \mathbb{K})$, mit der üblichen (punktweisen) Multiplikation von Funktionen, eine $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins. Ist X ein topologischer Raum, dann bildet die Menge aller stetigen Funktionen, $C(X; \mathbb{R})$, eine reelle Algebra. Analog ist die Menge der komplexwertigen stetigen Funktionen, $C(X; \mathbb{C})$, eine komplexe Algebra. Auch die Menge der stetigen Funktionen mit kompakten Träger, $C_c(X; \mathbb{R})$ bzw. $C_c(X; \mathbb{C})$, bilden Algebren über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$, besitzen jedoch für nicht kompaktes X kein Einselement. Alle diese Algebren sind kommutativ, d.h. es gilt $ab = ba$ für beliebige a und b.

IX.4.2. Beispiel. Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, dann bildet $\operatorname{end}(V)$ bezüglich der Komposition linearer Abbildungen eine, i.A. nicht kommutative Algebra. Ebenso ist $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bezüglich Matrizenmultiplikation eine nicht kommutative Algebra. Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum, dann liefert jede Basis von V einen Algebraisomorphismus $M_{n\times n}(\mathbb{K}) \cong \operatorname{end}(V)$.

Für jeden Vektorraum V und $q \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$T^qV := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{q \text{ Faktoren}}.$$

Insbesondere $T^0V = \mathbb{K}$, $T^1V = V$, $T^2V = V \otimes V$ und $T^3V = V \otimes V \otimes V$. Jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ induziert eine lineare Abbildung

$$T^q\varphi\colon T^qV \to T^qW, \qquad T^q\varphi := \varphi \otimes \cdots \otimes \varphi.$$

Offensichtlich gilt

$$T^q(\psi \circ \varphi) = (T^q\psi) \circ (T^q\varphi) \qquad \text{und} \qquad T^q \operatorname{id}_V = \operatorname{id}_{T^qV}, \tag{IX.10}$$

für jede weitere lineare Abbildung $\psi\colon W \to U$. Darüber hinaus gilt, siehe (IX.8),

$$\phi_\sigma \circ T^q\varphi = (T^q\varphi) \circ \phi_\sigma, \tag{IX.11}$$

für jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_q$, denn für $v_1, \dots, v_q \in V$ haben wir

$$\begin{aligned}
\phi_\sigma\big((T^q\varphi)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_q)\big) &= \phi_\sigma\big(\varphi(v_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(v_q)\big) \\
&= \varphi(v_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes \varphi(v_{\sigma(q)}) \\
&= (T^q\varphi)(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(q)}) \\
&= (T^q\varphi)\big(\phi_\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_q)\big),
\end{aligned}$$

also auch $\phi_\sigma((T^q\varphi)\xi) = (T^q\varphi)(\phi_\sigma(\xi))$, für alle $\xi \in T^qV$.

Ist $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V, dann bilden die Vektoren

$$b_{i_1} \otimes \cdots \otimes b_{i_q}, \qquad 1 \leq i_1, \dots, i_q \leq n, \tag{IX.12}$$

eine Basis von T^qV, siehe Proposition IX.2.5. Für jeden endlich dimensionalen Vektorraum V gilt daher

$$\dim(T^qV) = \dim(V)^q.$$

Wir definieren:

$$TV := \bigoplus_{q=0}^{\infty} T^qV = \mathbb{K} \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus \cdots .$$

Beachte, dass TV unendlich dimensional ist, falls $V \neq 0$.

IX.4.3. Satz (Tensoralgebra). *Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Die bilinearen Abbildungen $T^pV \times T^qV \xrightarrow{\otimes} T^{p+q}V$ induzieren eine bilineare Abbildung*

$$TV \times TV \xrightarrow{\otimes} TV.$$

Dadurch wird TV zu einer assoziativen graduierten Algebra mit Einselement $1 \in \mathbb{K} = T^0V \subseteq TV$. Jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ induziert einen Algebrahomomorphismus $T\varphi = \bigoplus_{q=0}^{\infty} T^q\varphi\colon TV \to TW$, und es gilt

$$T(\psi \circ \varphi) = (T\psi) \circ (T\varphi) \qquad \textit{sowie} \qquad T(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{TV},$$

für jede weitere lineare Abbildung $\psi\colon W \to U$. Die kanonische lineare Inklusion $\iota\colon V \to TV$, die wir aus der Identifikation $V = T^1V \subseteq TV$ erhalten, hat folgende universelle Eigenschaft: Ist $\mathcal{A}$ eine assoziative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins und $\varphi\colon V \to \mathcal{A}$ linear, dann existiert genau ein Algebrahomomorphismus $\tilde\varphi\colon TV \to A$, sodass $\tilde\varphi \circ \iota = \varphi$, d.h. $\tilde\varphi|_V = \varphi$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & TV \arrow[dl, dashed, "\exists!\tilde\varphi"] \\ & \mathcal{A} & \end{tikzcd}$$

Durch diese Eigenschaft ist TV zusammen mit der Abbildung $\iota\colon V \to TV$ bis auf kanonischen Algebraisomorphismus eindeutig bestimmt, d.h. ist $\tilde T$ eine weitere assoziative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins und $\tilde\iota\colon V \to \tilde T$ eine lineare Abbildung, die die selben Eigenschaft wie $\iota\colon V \to TV$ hat, dann existiert ein eindeutiger Algebraisomorphismus $\phi\colon TV \xrightarrow{\cong} \tilde V$, sodass $\phi \circ \iota = \tilde\iota$.

Beweis. Aus den vorangehenden Betrachtungen ist klar, dass TV eine graduierte assoziative Algebra mit Eins bildet. Wir werden daher nur die universelle Eigenschaft der Abbildung $\iota\colon V \to TV$ verifizieren. Sei also $\varphi\colon V \to \mathcal{A}$ linear. Dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\tilde\varphi^p\colon T^pV \to \mathcal{A}$, sodass

$$\tilde\varphi^p(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = \varphi(v_1)\cdots\varphi(v_p), \tag{IX.13}$$

für alle $v_i \in V$, denn die rechte Seite ist linear in jedem v_i. Diese induzieren eine lineare Abbildung $\tilde\varphi\colon TV \to \mathcal{A}$, sodass $\tilde\varphi|_{T^pV} = \tilde\varphi^p$. Offensichtlich ist $\tilde\varphi$ ein Algebrahomomorphismus und es gilt $\tilde\varphi \circ \iota = \varphi$. Auch die Eindeutigkeit von $\tilde\varphi$ ist offensichtlich, denn für einen Algebrahomomorphismus muss (IX.13) gelten.

Aus der universellen Eigenschaft von TV erhalten wir einen eindeutigen Algebrahomomorphismus $\phi\colon TV \to \tilde T$, sodass $\phi \circ \iota = \tilde\iota$. Aus dem gleichen Grund existiert ein Algebrahomomorphismus $\psi\colon \tilde T \to TV$, sodass $\psi \circ \tilde\iota = \iota$. Wir erhalten

$\psi \circ \phi \circ \iota = \iota = \mathrm{id}_{TV} \circ \iota$, also $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_{TV}$ wegen der Eindeutigkeitsaussage in der universellen Eigenschaft von TV. Analog lässt sich $\phi \circ \psi = \mathrm{id}_{\tilde{T}}$ zeigen. Folglich sind ϕ und ψ zueinander inverse Algebraisomorphismen. $\square$

IX.5. Grassmann Algebra. Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$ mit Charakteristik 0. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Wir erinnern uns, dass jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_q$ einen linearen Isomorphismus

$$\phi_\sigma \colon T^qV \to T^qV, \qquad \phi_\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_q) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(q)},$$

induziert, sodass $\phi_{\sigma\tau} = \phi_\sigma \circ \phi_\tau$ und $\phi_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}_{T^qV}$, für aller $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_q$. Es bezeichne

$$\Lambda^qV := \bigl\{\xi \in T^qV \bigm| \forall \sigma \in \mathfrak{S}_q : \phi_\sigma(\xi) = \mathrm{sign}(\sigma)\xi\bigr\},$$

den Teilraum der *alternierenden* Tensoren. Beachte, $\Lambda^0V = \mathbb{K}$ und $\Lambda^1V = V$. Ist $\varphi \colon V \to W$ eine lineare Abbildung, dann folgt aus (IX.11), dass die lineare Abbildung $T^q\varphi \colon T^qV \to T^qW$ den Teilraum Λ^qV in den Teilraum Λ^qW abbildet. Wir bezeichnen diese Einschränkung mit

$$\Lambda^q\varphi \colon \Lambda^qV \to \Lambda^qW.$$

Aus (IX.10) erhalten wir sofort

$$\Lambda^q(\psi \circ \varphi) = (\Lambda^q\psi) \circ (\Lambda^q\varphi) \qquad \text{und} \qquad \Lambda^q(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{\Lambda^qV},$$

für jede weitere lineare Abbildung $\psi \colon W \to U$.

IX.5.1. Lemma. *Die lineare Abbildung*

$$A \colon T^qV \to T^qV, \qquad A := \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma)\phi_\sigma,$$

ist ein Projektor, $A^2 = A$, mit $\mathrm{img}(A) = \Lambda^qV$, *und es gilt*

$$A \circ \phi_\sigma = \mathrm{sign}(\sigma)A = \phi_\sigma \circ A, \tag{IX.14}$$

für jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_q$.

Beweis. Wir beginnen mit (IX.14): Da $\mathfrak{S}_q$ aus $q!$ Permutationen besteht:

$$\begin{aligned} A \circ \phi_\tau = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma)\phi_\sigma \circ \phi_\tau &= \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma)\phi_{\sigma\tau} \\ &= \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma\tau^{-1})\phi_\sigma = \mathrm{sign}(\tau)\frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma)\phi_\sigma = \mathrm{sign}(\tau)A. \end{aligned}$$

Analog lässt sich die zweite Gleichheit in (IX.14) zeigen. Daraus folgt nun:

$$A \circ A = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \mathrm{sign}(\sigma)\phi_\sigma \circ A = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} A = A.$$

Somit ist A ein Projektor, aus (IX.14) folgt sofort $\mathrm{img}(A) = \Lambda^qV$. $\square$

Für zwei Vektorräume V und W bezeichne $L_q^{\mathrm{alt}}(V;W) \subseteq L_q(V,\dots,V;W)$ den Vektorraum der q-linearen alternierenden Abbildungen $\mu\colon V\times\dots\times V\to W$. Diese können durch jede der folgenden äquivalenten Eigenschaften charakterisiert werden:

(a) $\mu(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(q)}) = \operatorname{sign}(\sigma)\mu(v_1,\dots,v_q)$, für alle $v_1,\dots,v_q\in V$ und $\sigma\in\mathfrak{S}_q$.
(b) $\mu(v_1,\dots,v_q)$ wechselt das Vorzeichen wenn zwei Eintragungen v_i und v_j vertauscht werden, $i\neq j$.
(c) $\mu(v_1,\dots,v_q)=0$, falls $v_1,\dots,v_q$ linear abhängig sind.
(d) $\mu(v_1,\dots,v_q)=0$, falls $i\neq j$ existiert, sodass $v_i=v_j$.
(e) $\mu(v_1,\dots,v_q)=0$, falls i existiert, sodass $v_i=v_{i+1}$.

IX.5.2. Proposition. *Die q-lineare alternierende Abbildung*

$$V\times\dots\times V\to\Lambda^qV,\qquad (v_1,\dots,v_q)\mapsto v_1\wedge\dots\wedge v_q := A(v_1\otimes\dots\otimes v_q),$$

besitzt folgende universelle Eigenschaft: Ist $\mu\colon V\times\dots\times V\to U$ eine q-lineare alternierende Abbildung, dann existiert genau eine lineare Abbildung $\varphi\colon\Lambda^qV\to U$, sodass $\varphi(v_1\wedge\dots\wedge v_q)=\mu(v_1,\dots,v_q)$, für alle $v_1,\dots,v_q\in V$:

$$\begin{tikzcd} V\times\dots\times V \arrow[rr] \arrow[dr, "\mu"'] & & \Lambda^qV \arrow[dl, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Dies liefert einen kanonischen linearen Isomorphismus

$$L_q^{\mathrm{alt}}(V;U)=L(\Lambda^qV,U).$$

Durch obige universelle Eigenschaft ist Λ^qV zusammen mit der q-linearen alternierenden Abbildung $V\times\dots\times V\to\Lambda^qV$ bis auf kanonischen Isomorphismus eindeutig bestimmt.

Beweis. Aus (IX.14) folgt sofort, dass $A(v_1\otimes\dots\otimes v_q)$ alternierend ist. Da $\{v_1\otimes\dots\otimes v_q : v_1,\dots,v_q\in V\}$ ein Erzeugendensystem von T^qV bildet, ist $\{A(v_1\otimes\dots\otimes v_q) : v_1,\dots,v_q\in V\}$ ein Erzeugendensystem von $\Lambda^qV=\operatorname{img}(A)$. Daraus folgt sofort, dass die lineare Abbildung $\varphi\colon\Lambda^qV\to U$ durch die Bedingung $\varphi(v_1\wedge\dots\wedge v_q)=\mu(v_1,\dots,v_q)$ eindeutig bestimmt ist, falls sie existiert. Um die Existenz zu zeigen, bezeichne $\tilde\varphi\colon T^qV\to U$ die eindeutige lineare Abbildung, sodass

$$\tilde\varphi(v_1\otimes\dots\otimes v_q)=\mu(v_1,\dots,v_q),$$

für alle $v_1,\dots,v_q\in V$. Da μ alternierned ist, gilt

$$\begin{aligned}(\tilde\varphi\circ\phi_\sigma)(v_1\otimes\ldots\otimes v_q)&=\tilde\varphi(v_{\sigma(1)}\otimes\dots\otimes v_{\sigma(q)})=\mu(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(q)})\\&=\operatorname{sign}(\sigma)\mu(v_1,\dots,v_q)=\operatorname{sign}(\sigma)\tilde\varphi(v_1\otimes\dots\otimes v_q),\end{aligned}$$

für jede Permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_q$, also

$$\tilde\varphi\circ\phi_\sigma=\operatorname{sign}(\sigma)\tilde\varphi.$$

Daraus erhalten wir $\tilde\varphi\circ A=\tilde\varphi$, denn

$$\tilde\varphi\circ A=\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_q}\operatorname{sign}(\sigma)\tilde\varphi\circ\phi_\sigma=\frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_q}\tilde\varphi=\tilde\varphi.$$

Bezeichnet nun $\varphi:=\tilde\varphi|_{\Lambda^qV}\colon\Lambda^qV\to U$ die Einschränkung, so folgt

$$\varphi(v_1\wedge\cdots\wedge v_q)=\tilde\varphi(A(v_1\otimes\cdots\otimes v_q))=\tilde\varphi(v_1\otimes\cdots\otimes v_q)=\mu(v_1,\dots,v_q).$$

Die verbleibenden Behautungen sind nun offensichtlich. $\square$

IX.5.3. Beispiel. Die Determinant kann als

$$\det\in L_n^{\mathrm{alt}}(\mathbb{K}^n;\mathbb{K})=L(\Lambda^n\mathbb{K}^n,\mathbb{K})$$

aufgefasst werden.

Wir definieren:

$$\Lambda V:=\bigoplus_{q=0}^{\infty}\Lambda^qV=\underbrace{\Lambda^0V}_{=\mathbb{K}}\ \oplus\ \underbrace{\Lambda^1V}_{=V}\ \oplus\ \Lambda^2V\ \oplus\ \Lambda^3V\ \oplus\ \cdots$$

IX.5.4. Satz (Grassmann Algebra). *Die bilineare Abbildung*

$$\Lambda^pV\times\Lambda^qV\xrightarrow{\wedge}\Lambda^{p+q}V,\qquad(\alpha,\beta)\mapsto\alpha\wedge\beta:=A(\alpha\otimes\beta)\tag{IX.15}$$

hat folgende Eigenschaften:

(a) $\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)=(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma$, *für alle* $\alpha\in\Lambda^pV$, $\beta\in\Lambda^qV$ *und* $\gamma\in\Lambda^rV$.
(b) $\alpha\wedge\beta=(-1)^{pq}\beta\wedge\alpha$, *für alle* $\alpha\in\Lambda^pV$ *und* $\beta\in\Lambda^qV$.
(c) $(\Lambda^{p+q}\varphi)(\alpha\wedge\beta)=(\Lambda^p\varphi)(\alpha)\wedge(\Lambda^q\varphi)(\beta)$ *für jede lineare Abbbildung* $\varphi\colon V\to W$.

D.h. die von (IX.15) *induzierte bilineare Abbildung* $\Lambda V\times\Lambda V\xrightarrow{\wedge}\Lambda V$ *macht* ΛV *zu einer graduiert kommutativen und assoziativen Algebra mit Einselement* $1\in\mathbb{K}=\Lambda^0V\subseteq\Lambda V$. *Diese Algebra wird als* äußere Algebra *oder* Grassmann Algebra *bezeichnet. Jede lineare Abbildung* $\varphi\colon V\to W$ *induziert einen Algebrahomomorphismus* $\Lambda\varphi\colon\Lambda V\to\Lambda W$, $\Lambda\varphi=\bigoplus_{q=0}^\infty\Lambda^q\varphi$, *und es gilt*

$$\Lambda(\psi\circ\varphi)=(\Lambda\psi)\circ(\Lambda\varphi)\qquad\textit{sowie}\qquad(\Lambda\,\mathrm{id}_V)=\mathrm{id}_{\Lambda V},$$

für jede weitere lineare Abbildung $\psi\colon W\to U$. *Die lineare und injektive Abbildung* $\iota\colon V\to\Lambda V$, *die wir aus der Identifikation* $V=\Lambda^1V\subseteq\Lambda V$ *erhalten besitzt folgende universelle Eigenschaft: Ist* $\mathcal{A}$ *eine assoziative* $\mathbb{K}$*-Algebra mit Eins, und* $\varphi\colon V\to\mathcal{A}$ *eine lineare Abbildung, sodass* $\varphi(v)\varphi(v)=0$, *für alle* $v\in V$, *dann existiert ein eindeutig bestimmter Algebrahomomorphismus* $\tilde\varphi\colon\Lambda V\to\mathcal{A}$, *sodass* $\tilde\varphi\circ\iota=\varphi$, *d.h.* $\tilde\varphi|_V=\varphi$*:*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \Lambda V \arrow[dl, dashed, "\exists!\tilde\varphi"] \\
& \mathcal{A} &
\end{tikzcd}$$

Durch diese universelle Eigenschaft ist ΛV *zusammen mit der Abbildung* ι *bis auf kanonischen Isomorphismus eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir beginnen mit (b). Es bezeichne $\tau \in \mathfrak{S}_{p+q}$ folgende Permutation:

$$\tau(i) = \begin{cases} i+q & \text{falls } 1 \leq i \leq p \\ i-p & \text{falls } p+1 \leq i \leq p+q. \end{cases}$$

Für beliebige $v_i \in V$ gilt daher:

$$\phi_\tau\big(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q}\big) = v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q} \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$$

also auch $\phi_\tau(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi$, für alle $\xi \in T^pV$ und $\eta \in T^qV$. Inbesondere

$$\beta \otimes \alpha = \phi_\tau(\alpha \otimes \beta).$$

Da $\operatorname{sign}(\tau) = (-1)^{pq}$ folgt mit (IX.14)

$$\beta \wedge \alpha = A(\beta \otimes \alpha) = A(\phi_\tau(\alpha \otimes \beta)) = \operatorname{sign}(\tau) A(\alpha \otimes \beta)) = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta.$$

Um auch (a) zu zeigen, werden wir unten

$$A\big((A\xi) \otimes \eta\big) = A(\xi \otimes \eta) = A\big(\xi \otimes A\eta\big) \tag{IX.16}$$

für alle $\xi \in T^pV$ und $\eta \in T^qV$ herleiten. Ist dies gelungen, dann folgt

$$\begin{aligned} \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) &= A\big(\alpha \otimes A(\beta \otimes \gamma)\big) \\ &= A(\alpha \otimes \beta \otimes \gamma) = A\big(A(\alpha \otimes \beta) \otimes \gamma\big) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma. \end{aligned}$$

Um (IX.16) zu zeigen, fassen wir Permutationen $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ auch als Permutationen $\tilde{\sigma} \in \mathfrak{S}_{p+q}$ auf:

$$\tilde{\sigma}(i) := \begin{cases} \sigma(i) & \text{falls } 1 \leq i \leq p \\ i & \text{falls } p+1 \leq i \leq p+q. \end{cases}$$

Es gilt daher $(\phi_\sigma \xi) \otimes \eta = \phi_{\tilde{\sigma}}(\xi \otimes \eta)$, für alle $\xi \in T^pV$ und $\eta \in T^qV$. Da offensichtlich $\operatorname{sign}(\tilde{\sigma}) = \operatorname{sign}(\sigma)$ erhalten wir aus (IX.14)

$$A\big((\phi_\sigma \xi) \otimes \eta\big) = A\big(\phi_{\tilde{\sigma}}(\xi \otimes \eta)\big) = \operatorname{sign}(\tilde{\sigma}) A(\xi \otimes \eta) = \operatorname{sign}(\sigma) A(\xi \otimes \eta)$$

und somit

$$A\big((A\xi) \otimes \eta\big) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sign}(\sigma) A\big((\phi_\sigma \xi) \otimes \eta\big) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} A(\xi \otimes \eta) = A(\xi \otimes \eta).$$

Die zweite Gleichheit in (IX.16) lässt sich völlig analog behandeln. Um (c) zu zeigen, verwenden wir (IX.11) um

$$(\Lambda^q \varphi) \circ A = A \circ (T^q \varphi)$$

herzuleiten. Es folgt dann:

$$\begin{aligned} (\Lambda^{p+q}\varphi)(\alpha \wedge \beta) &= (\Lambda^{p+q}\varphi)\big(A(\alpha \otimes \beta)\big) \\ &= A\big((T^{p+q}\varphi)(\alpha \otimes \beta)\big) = A\big((T^p\varphi)(\alpha) \otimes (T^q\varphi)(\beta)\big) \\ &= A\big((\Lambda^p\varphi)(\alpha) \otimes (\Lambda^q\varphi)(\beta)\big) = (\Lambda^p\varphi)(\alpha) \wedge (\Lambda^q\varphi)(\beta). \end{aligned}$$

Nun zur universellen Eigenschaft der Abbildung $\iota\colon V \to \Lambda V$. Nach Proposition IX.5.2 existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\tilde{\varphi}^q\colon \Lambda^q V \to \mathcal{A}$, sodass

$$\tilde{\varphi}^q(v_1 \wedge \cdots \wedge v_q) = \varphi(v_1) \cdots \varphi(v_q),$$

denn die rechte Seite ist nach Voraussetzung alternierend. Diese Abbildungen induzieren eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi}\colon \Lambda V = \bigoplus_q \Lambda^q V \to \mathcal{A}$, für die offensichtlich $\tilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$ gilt. Es lässt sich leicht zeigen, dass dies ein Algebrahomomorphismus ist, der durch $\tilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$ völlig festgelegt ist. Die verbleibenden Behautungen sind nun offensichtlich. □

IX.5.5. Proposition. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V. Dann bilden die Vektoren*

$$b_{i_1} \wedge \cdots \wedge b_{i_q}, \qquad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_q \leq n, \tag{IX.17}$$

eine Basis von $\Lambda^q V$. Inbesondere gilt $\Lambda^q V = 0$, für alle $q > n$ und daher

$$\Lambda V = \bigoplus_{q=0}^{n} \Lambda^q V = \Lambda^0 V \oplus \Lambda^1 V \oplus \Lambda^2 V \oplus \cdots \oplus \Lambda^n V.$$

Weiters gilt

$$\dim(\Lambda^q V) = \binom{n}{q} \qquad \textit{und} \qquad \dim(\Lambda V) = 2^n.$$

Beweis. Da die Vektoren $b_{i_1} \otimes \cdots \otimes b_{i_q}$, $1 \leq i_1, \ldots, i_q \leq n$, eine Basis von $T^q V$ bilden, ist

$$b_{i_1} \wedge \cdots \wedge b_{i_q} = A(b_{i_1} \otimes \cdots \otimes b_{i_q}), \qquad 1 \leq i_1, \ldots, i_q \leq n,$$

ein Erzeugendensystem von $\Lambda^q V = \operatorname{img}(A)$. Nach Satz IX.5.4(b) haben wir weiters $b_{\sigma(i_1)} \wedge \cdots \wedge b_{\sigma(i_q)} = \pm b_{i_1} \wedge \cdots \wedge b_{i_q}$, für jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_q$, und es gilt $b_{i_1} \wedge \cdots \wedge b_{i_q} = 0$, falls wenigstens zwei der Indizes $i_1, \ldots, i_q$ übereinstimmen. Somit bilden auch die Vektoren

$$b_{i_1} \wedge \cdots \wedge b_{i_q}, \qquad 1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n,$$

ein Erzeugendensystem von $\Lambda^q V$.

Um die lineare Unabhängigkeit einzusehen, seien $\lambda_{i_1 \ldots i_q} \in \mathbb{K}$, sodass

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} \lambda_{i_1 \ldots i_q} b_{i_1} \wedge \cdots \wedge b_{i_q} = 0.$$

Da $b_{i_1} \wedge \cdots \wedge b_{i_q} = A(b_{i_1} \otimes \cdots \otimes b_{i_q})$, folgt

$$\begin{aligned} 0 &= A\Big(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} \lambda_{i_1 \ldots i_q} b_{i_1} \otimes \cdots \otimes b_{i_q}\Big) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} \frac{\operatorname{sign}(\sigma) \lambda_{i_1 \ldots i_q}}{q!} b_{\sigma(i_1)} \otimes \cdots \otimes b_{\sigma(i_q)}. \end{aligned}$$

Beachte, dass die Vektoren
$$b_{\sigma(i_1)}\otimes\cdots\otimes b_{\sigma(i_q)},\qquad \sigma\in\mathfrak{S}_q,\ 1\leq i_1<\cdots<i_q\leq n$$
linear unabhängig in T^qV sind, siehe (IX.12). Folglich $\frac{\operatorname{sign}(\sigma)\lambda_{i_1\dots i_q}}{q!}=0$, also $\lambda_{i_1\dots i_q}=0$, für alle $1\leq i_1<\cdots<i_q\leq n$. Dies zeigt, dass die Vektoren (IX.17) auch linear unabhängig, also eine Basis von Λ^qV sind. Da diese Basis aus $\binom{n}{q}$ Elementen besteht, folgt $\dim(\Lambda^qV)=\binom{n}{q}$ und dann $\dim(\Lambda V)=\sum_{q=0}^n\dim(\Lambda^qV)=\sum_{q=0}^n\binom{n}{q}=(1+1)^n=2^n$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes. □

IX.5.6. Beispiel. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\varphi\colon V\to V$ linear. Nach Proposition IX.5.5 ist Λ^nV ein 1-dimensionaler Vektorraum, die lineare Abbildung $\Lambda^n\varphi\colon\Lambda^nV\to\Lambda^nV$ ist daher durch Multiplikation mit einem Skalar gegeben. Tatsächlich gilt
$$\Lambda^n\varphi=\det(\varphi)\operatorname{id}_{\Lambda^nV}.$$
Um dies einzusehen, nehmen wir zunächst an, dass φ diagonalisierbar ist. Es existiert daher eine Basis $b_1,\dots,b_n$ von V und Skalare $\lambda_i\in\mathbb{K}$ mit $\varphi(b_i)=\lambda_ib_i$. Nach (IX.17) bildet der Vektor $b_1\wedge\cdots\wedge b_n$ eine Basis von Λ^nV und
$$\begin{aligned}(\Lambda^n\varphi)(b_1\wedge\cdots\wedge b_n)&=\varphi(b_1)\wedge\cdots\wedge\varphi(b_n)\\&=\lambda_1b_1\wedge\cdots\wedge\lambda_nb_n=\det(\varphi)b_1\wedge\cdots\wedge b_n.\end{aligned}$$
Der allgemein Fall ist in Aufgabe 64 zu verifizieren.

IX.5.7. Beispiel. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\varphi\colon V\to V$ linear. Dann gilt für die Koeffizienten des charakteristioschen Polynoms:
$$\det(\varphi+z\operatorname{id}_V)=\sum_{q=0}^n\operatorname{tr}\bigl(\Lambda^q\varphi\bigr)z^{n-q}.$$
Wir nehmen wieder an, dass φ diagonalisierbar ist. Es existiert daher eine Basis $b_1,\dots,b_n$ von V und Skalare $\lambda_i\in\mathbb{K}$ mit $\varphi(b_i)=\lambda_ib_i$. Somit
$$(\Lambda^q\varphi)(b_{i_1}\wedge\cdots\wedge b_{i_q})=\varphi(b_{i_1})\wedge\cdots\wedge\varphi(b_{i_q})=\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_q}b_{i_1}\wedge\cdots\wedge b_{i_q}.$$
Aus (IX.17) folgt daher
$$\operatorname{tr}(\Lambda^q\varphi)=\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_q\leq n}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_q},$$
also
$$\begin{aligned}\det(\varphi+z\operatorname{id}_V)&=\prod_{j=1}^n(\lambda_j+z)\\&=\sum_{q=0}^n\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_q\leq n}\lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_q}z^{n-q}=\sum_{q=0}^n\operatorname{tr}\bigl(\Lambda^q\varphi\bigr)z^{n-q}.\end{aligned}$$

Der allgemeine Fall ist in Aufgabe 65 zu behandeln.

IX.5.8. Beispiel. Seien V und W zwei endlich dimensionale Vektorräume. Weiters bezeichnen $\iota_1\colon V \to V \oplus W$ und $\iota_2\colon W \to V \oplus W$ die beiden kanonischen Inklusionen. Dann induzieren die linearen Abbildungen

$$\Lambda^p V \otimes \Lambda^q W \to \Lambda^{p+q}(V \oplus W), \qquad \alpha \otimes \beta \mapsto (\Lambda^p \iota_1)(\alpha) \wedge (\Lambda^q \iota_2)(\beta),$$

eine lineare Abbildung $\bigoplus_{p+q=k} \Lambda^p V \otimes \Lambda^q W \to \Lambda^k(V \oplus W)$. Aus Proposition IX.5.5 folgt, dass diese Basen auf Basen abbildet. Wir erhalten daher einen kanonischen linearen Isomorphismus

$$\Lambda^k(V \oplus W) = \bigoplus_{p+q=k} \Lambda^p V \otimes \Lambda^q W$$

und auch $\Lambda(V \oplus W) = (\Lambda V) \otimes (\Lambda W)$.

IX.5.9. Beispiel. Die Komposition $\Lambda^q V^* \subseteq T^q V^* = (T^q V)^* \to (\Lambda^q V)^*$, siehe (IX.6), liefert einen kanonischen linearen Isomorphismus

$$\Lambda^q V^* = (\Lambda^q V)^* = L_q^{\mathrm{alt}}(V; \mathbb{K}).$$

Für $\alpha \in \Lambda^p V^* = L_p^{\mathrm{alt}}(V; \mathbb{K})$ und $\beta \in \Lambda^q V^* = L_q^{\mathrm{alt}}(V; \mathbb{K})$ ist $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{p+q} V^* = L_{p+q}^{\mathrm{alt}}(V; \mathbb{K})$ durch

$$\begin{aligned}(\alpha \wedge \beta)&(v_1, \dots, v_{p+q}) \\ &= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \operatorname{sign}(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})\end{aligned}$$

gegeben, wobei $v_1, \dots, v_{p+q} \in V$.

Die äußere Algebra ΛV kann auch als Quotient der Tensoralgebra TV definiert werden, und diese Konstruktion ist für Körper beliebiger Charakteristik sinnvoll. Details dazu finden sich in [**11**, Chapter 4.6].

IX.6. Symmetrische Algebra. Wir beschränken uns auch in diesem Abschnitt auf Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$ der Charakteristik 0. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Es bezeichne

$$S^q V := \big\{ \xi \in T^q V \;\big|\; \forall \sigma \in \mathfrak{S}_q : \phi_\sigma(\xi) = \xi \big\},$$

den Teilraum der *symmetrischen* Tensoren. Beachte, $S^0 V = \mathbb{K}$ und $S^1 V = V$. Ist $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, dann folgt aus (IX.11), dass die lineare Abbildung $T^q \varphi\colon T^q V \to T^q W$ den Teilraum $S^q V$ in den Teilraum $S^q W$ abbildet. Wir bezeichnen diese Einschränkung mit

$$S^q \varphi\colon S^q V \to S^q W.$$

Aus (IX.10) erhalten wir sofort

$$S^q(\psi \circ \varphi) = (S^q \psi) \circ (S^q \varphi) \qquad \text{und} \qquad S^q(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{S^q V},$$

für jede weitere lineare Abbildung $\psi\colon W \to U$.

IX.6.1. Lemma. *Die lineare Abbildung*

$$S\colon T^qV \to T^qV, \qquad S(\xi) := \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_q}\phi_\sigma(\xi),$$

ist ein Projektor, $S^2 = S$, *mit* $\operatorname{img}(S) = S^qV$, *und es gilt*

$$S \circ \phi_\sigma = S = \phi_\sigma \circ S, \tag{IX.18}$$

für jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_q$.

Beweis. Wir beginnen mit (IX.18): Da $\mathfrak{S}_q$ aus $q!$ Permutationen besteht:

$$S\circ\phi_\tau = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_q}\phi_\sigma\circ\phi_\tau = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_q}\phi_{\sigma\tau} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_q}\phi_\sigma = S.$$

Analog lässt sich die zweite Gleichheit in (IX.18) zeigen. Daraus folgt nun:

$$S\circ S = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_q}\phi_\sigma\circ S = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_q} S = S.$$

Somit ist S ein Projektor, aus (IX.18) folgt sofort $\operatorname{img}(S) = S^qV$. □

Für zwei Vektorräume V und W bezeichne $L_q^{\mathrm{sym}}(V;W) \subseteq L_q(V,\dots,V;W)$ den Vektorraum der q-linearen symmetrischen Abbildungen $\mu\colon V\times\cdots\times V \to W$. Diese können durch jede der folgenden äquivalenten Eigenschaften charakterisiert werden:

(a) $\mu(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(q)}) = \mu(v_1,\dots,v_q)$, für alle $v_1,\dots,v_q \in V$ und $\sigma\in\mathfrak{S}_q$.
(b) $\mu(v_1,\dots,v_q)$ bleibt unverändert wenn zwei Eintragungen vertauscht werden.
(c) $\mu(v_1,\dots,v_q)$, bleibt unverändert wenn zwei benachbarte Eintragungen vertauscht werden.

IX.6.2. Proposition. *Die q-lineare symmetrische Abbildung*

$$V\times\cdots\times V \to S^qV, \qquad (v_1,\dots,v_q) \mapsto v_1\cdots v_q := S(v_1\otimes\cdots\otimes v_q),$$

besitzt folgende universelle Eigenschaft: Ist $\mu\colon V\times\cdots\times V \to U$ *eine q-lineare symmetrische Abbildung, dann existiert genau eine lineare Abbildung* $\varphi\colon S^qV \to U$, *sodass* $\varphi(v_1\cdots v_q) = \mu(v_1,\dots,v_q)$, *für alle* $v_1,\dots,v_q\in V$:

$$\begin{tikzcd} V\times\cdots\times V \arrow[rr] \arrow[dr, "\mu"'] & & S^qV \arrow[dl, dashed, "\exists!\varphi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

Dies liefert einen kanonischen linearen Isomorphismus

$$L_q^{\mathrm{sym}}(V;U) = L(S^qV,U).$$

Durch obige universelle Eigenschaft ist S^qV zusammen mit der q-linearen symmetrischen Abbildung $V\times\cdots\times V\to S^qV$ bis auf kanonischen Isomorphismus eindeutig bestimmt.

Beweis. Aus (IX.18) folgt sofort, dass $S(v_1 \otimes \cdots \otimes v_q)$ symmetrisch ist. Da $\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_q : v_1, \dots, v_q \in V\}$ ein Erzeugendensystem von T^qV bildet, ist $\{S(v_1 \otimes \cdots \otimes v_q) : v_1, \dots, v_q \in V\}$ ein Erzeugendensystem von $S^qV = \operatorname{img}(S)$. Daraus folgt sofort, dass die lineare Abbildung $\varphi\colon S^qV \to U$ durch die Bedingung $\varphi(v_1 \cdots v_q) = \mu(v_1, \dots, v_q)$ eindeutig bestimmt ist, falls sie existiert. Um die Existenz zu zeigen, bezeichne $\tilde\varphi\colon T^qV \to U$ die eindeutige lineare Abbildung, sodass
$$\tilde\varphi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_q) = \mu(v_1, \dots, v_q),$$
für alle $v_1, \dots, v_q \in V$. Da μ symmetrisch ist, gilt
$$\begin{aligned}(\tilde\varphi \circ \phi_\sigma)(v_1 \otimes \ldots \otimes v_q) = \tilde\varphi(v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(q)}) &= \mu(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)}) \\ &= \mu(v_1, \dots, v_q) = \tilde\varphi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_q),\end{aligned}$$
für jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_q$, also
$$\tilde\varphi \circ \phi_\sigma = \tilde\varphi.$$
Daraus erhalten wir $\tilde\varphi \circ S = \tilde\varphi$, denn
$$\tilde\varphi \circ S = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \tilde\varphi \circ \phi_\sigma = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_q} \tilde\varphi = \tilde\varphi.$$
Bezeichnet nun $\varphi := \tilde\varphi|_{S^qV}\colon S^qV \to U$ die Einschränkung, so folgt
$$\varphi(v_1 \cdots v_q) = \tilde\varphi(S(v_1 \otimes \cdots \otimes v_q)) = \tilde\varphi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_q) = \mu(v_1, \dots, v_q).$$
Die verbleibenden Behautungen sind nun offensichtlich. □

Wir definieren:
$$SV := \bigoplus_{q=0}^{\infty} S^qV = \underbrace{S^0V}_{=\mathbb{K}} \oplus \underbrace{S^1V}_{=V} \oplus S^2V \oplus S^3V \oplus \cdots$$
Genau wie in Satz IX.5.4 lässt sich zeigen:

IX.6.3. Satz (Symmetrische Algebra). *Die bilineare Abbildung*
$$S^pV \times S^qV \to S^{p+q}V, \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta := S(\alpha \otimes \beta) \tag{IX.19}$$
hat folgende Eigenschaften:

(a) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$, *für alle* $\alpha \in S^pV$, $\beta \in S^qV$ *und* $\gamma \in S^rV$.

(b) $\alpha\beta = \beta\alpha$, *für alle* $\alpha \in S^pV$ *und* $\beta \in S^qV$.

(c) $(S^{p+q}\varphi)(\alpha\beta) = (S^p\varphi)(\alpha)(S^q\varphi)(\beta)$ *für jede lineare Abbbildung* $\varphi\colon V \to W$.

D.h. die von (IX.19) *induzierte bilineare Abbildung* $SV \times SV \to SV$ *macht* SV *zu einer kommutativen und assoziativen graduierten Algebra mit Einselement* $1 \in \mathbb{K} = S^0V \subseteq SV$. *Diese Algebra wird als* symmetrische Algebra *bezeichnet. Jede lineare Abbildung* $\varphi\colon V \to W$ *induziert einen Algebrahomomorphismus* $S\varphi\colon SV \to SW$, $S\varphi = \bigoplus_{q=0}^\infty S^q\varphi$, *und es gilt*
$$S(\psi \circ \varphi) = (S\psi) \circ (S\varphi) \qquad \textit{sowie} \qquad S(\mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{SV},$$

für jede weitere lineare Abbildung $\psi\colon W \to U$. Die lineare und injektive Abbildung $\iota\colon V \to SV$, die wir aus der Identifikation $V = S^1V \subseteq SV$ erhalten besitzt folgende universelle Eigenschaft: Ist $\mathcal{A}$ eine kommutative und assoziative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins, und $\varphi\colon V \to \mathcal{A}$ eine lineare Abbildung, dann existiert ein eindeutig bestimmter Algebrahomomorphismus $\tilde\varphi\colon SV \to \mathcal{A}$, sodass $\tilde\varphi \circ \iota = \varphi$, d.h. $\tilde\varphi|_V = \varphi$:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & SV \arrow[d, dashed, "\exists!\tilde\varphi"] \\ & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

Durch diese universelle Eigenschaft ist SV zusammen mit der Abbildung ι bis auf kanonischen Isomorphismus eindeutig bestimmt.

IX.6.4. Proposition. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V. Dann bilden die Vektoren*[21]

$$b_1^{a_1} \cdots b_n^{a_n}, \qquad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}_0, \quad a_1 + \cdots + a_n = q, \tag{IX.20}$$

eine Basis von S^qV. Insbesondere gilt

$$\dim(S^qV) = \binom{n+q-1}{q}.$$

Beweis. Wie zuvor, lässt sich leicht zeigen, dass die Vektoren (IX.20) ein Erzeugendensystem von S^qV bilden. Um auch die lineare Unabhängigkeit einzusehen, seien $\lambda_{a_1\dots a_n} \in \mathbb{K}$, sodass

$$\sum_{a_1+\cdots+a_n=q} \lambda_{a_1\dots a_n} b_1^{a_1} \cdots b_n^{a_n} = 0.$$

Dann gilt also

$$S\Bigg(\sum_{a_1+\cdots+a_n=q} \lambda_{a_1\dots a_n} \underbrace{b_1 \otimes \cdots \otimes b_1}_{a_1 \text{ Faktoren}} \otimes \cdots \otimes \underbrace{b_n \otimes \cdots \otimes b_n}_{a_n \text{ Faktoren}}\Bigg) = 0.$$

Daraus lässt sich $\lambda_{a_1\dots a_n} = 0$ herleiten. Dies zeigt, dass die Vektoren (IX.20) linear unabhängig in S^qV sind. Da die Basis (IX.20) aus $\binom{n+q-1}{q}$ Elementen besteht, folgt $\dim(S^qV) = \binom{n+q-1}{q}$. □

IX.6.5. Beispiel. Seien V und W zwei endlich dimensionale Vektorräume. Weiters bezeichnen $\iota_1\colon V \to V \oplus W$ und $\iota_2\colon W \to V \oplus W$ die beiden kanonischen Inklusionen. Dann induzieren die linearen Abbildungen

$$S^pV \otimes S^qW \to S^{p+q}(V \oplus W), \qquad \alpha \otimes \beta \mapsto (S^p\iota_1)(\alpha)(S^q\iota_2)(\beta),$$

[21] Da es nicht auf die Reihenfolge ankommt schreiben wir hier

$$b_1^{a_1} \cdots b_n^{a_n} := \underbrace{b_1 \cdots b_1}_{a_1 \text{ Faktoren}} \cdots \underbrace{b_n \cdots b_n}_{a_n \text{ Faktoren}},$$

wobei $b_i^0 := 1$.

eine lineare Abbildung $\bigoplus_{p+q=k} S^pV\otimes S^qW \to S^k(V\oplus W)$. Aus Proposition IX.6.4 folgt, dass diese Basen auf Basen abbildet. Wir erhalten daher einen kanonischen linearen Isomorphismus

$$S^k(V \oplus W) = \bigoplus_{p+q=k} S^pV \otimes S^qW$$

und auch $S(V \oplus W) = (SV) \otimes (SW)$.

IX.6.6. Beispiel (Polynomalgebra). Die Komposition

$$S^qV^* \subseteq T^qV^* = (T^qV)^* \to (S^qV)^*,$$

siehe (IX.6), liefert einen kanonischen linearen Isomorphismus

$$S^qV^* = (S^qV)^* = L_q^{\mathrm{sym}}(V; \mathbb{K}).$$

Mittels Polarisieren, lässt sich zeigen, dass Elemente $\mu \in L_q^{\mathrm{sym}}(V; \mathbb{K})$ durch die Werte $\mu(v) := \mu(v, \dots, v)$ eindeutig bestimmt sind. Für $\alpha \in S^pV^* = L_p^{\mathrm{sym}}(V; \mathbb{K})$ und $\beta \in S^qV^* = L_q^{\mathrm{sym}}(V; \mathbb{K})$ ist $\alpha\beta \in S^{p+q}V^* = L_{p+q}^{\mathrm{sym}}(V; \mathbb{K})$ durch

$$(\alpha\beta)(v) = \alpha(v)\beta(v),$$

d.h. durch punktweise Multiplikation gegeben. Somit kann SV^* mit der Algebra der Polynome $V \to \mathbb{K}$ identifiziert werden.

Die symmetrische Algebra SV kann auch als Quotient der Tensoralgebra TV definiert werden, und diese Konstruktion ist für Körper beliebiger Charakteristik sinnvoll. Details dazu finden sich in [**11**, Chapter 4.5].