III. Basen

Das Konzept der Basis bildet das wesentliche Hilfmittel um die Struktur allgemeiner Vektorräume zu verstehen. Ist ein Vektorraum mit einer Basis ausgestattet, dann kann jeder Vektor in eindeutiger Weise als Linearkombination der Basisvektoren geschrieben werden, Vektoren können somit durch Zahlen, und zwar eine für jeden Basisvektor, beschrieben werden.

Basen werden als linear unabhängige Erzeugendensysteme definiert, wir beginnen dieses Kapitel daher mit zwei Abschnitten, in denen wir die Begriffe *Erzeugendensystem* und *lineare Unabhängigkeit* erläutern. In Abschnitt III.3 werden wir dann zeigen, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt und einige Konsequenzen dieses zentralen Resultats besprechen. Bevor wir im folgenden Kapitel IV näher auf die wichtige Klasse der endlich-dimensionalen Vektorräume eingehen, werden wir in Abschnitt III.4 noch grundlegende Eigenschaften des Dualraums zusammenstellen.

III.1. Erzeugendensysteme. Sei A eine Teilmenge eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Unter einer *Linearkombination* von Elementen in A verstehen wir jeden Ausdruck der Form

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n,$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ und $a_1, \dots, a_n \in A$. Auch $n = 0$ ist hier zulässig, wir interpretieren diesen Fall als leere Summe, ihr Wert ist definitionsgemäß gleich 0. Lässt sich ein Vektor $v \in V$ als Linearkombination von Elementen in A schreiben, d.h. existieren $a_i \in A$ und $\lambda_i \in \mathbb{K}$, sodass $v = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$, dann können wir durch geeignetes Zusammenfassen auch erreichen, dass die Elemente $a_1, \dots, a_n$ paarweise verschieden sind, siehe (V7). Somit lässt sich v auch in der Form

$$v = \sum_{a \in A} \lambda_a a$$

schreiben, wobei die Skalare $\lambda_a \in \mathbb{K}$ fast alle verschwinden, d.h. alle bis auf endlich viele gleich 0 sind.

III.1.1. Definition (Lineare Hülle). Ist A eine Teilmenge eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, dann wird die Menge aller Vektoren, die sich als Linearkombinationen von Elementen in A schreiben lassen, d.h.

$$\langle A \rangle := \big\{ \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \bigm| \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K},\, a_1, \dots, a_n \in A \big\},$$

als *lineare Hülle* oder *lineares Erzeugnis* von A bezeichnet. Auch wird $\langle A \rangle$ der von A *erzeugte* bzw. *aufgespannte Teilraum* genannt. Sind $v_1, \dots, v_n \in V$, dann schreiben wir auch

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle := \langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle = \big\{ \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \bigm| \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \big\}$$

für den von $\{v_1, \dots, v_n\}$ aufgespannten Teilraum.

III.1.2. Proposition. *Sei A eine Teilmenge eines Vektorraums V. Dann ist $\langle A\rangle$ der kleinste Teilraum von V, der A enthält, d.h. $\langle A\rangle$ bildet einen Teilraum von V, es gilt $A \subseteq \langle A\rangle$ und für jeden weiteren Teilraum W von V mit $A \subseteq W$ gilt schon $\langle A\rangle \subseteq W$. Insbesondere ist*

$$\langle A\rangle = \bigcap_{\substack{W \text{ ist Teilraum von } V\\ \text{und } A \subseteq W}} W$$

wobei der Durchschnitt aller Teilräume von V gemeint ist, die A enthalten.

Beweis. Zunächst ist $\langle A\rangle$ nicht leer, denn $0 \in \langle A\rangle$. Weiters ist $\langle A\rangle$ offensichtlich abgeschlossen unter Addition. Um auch die Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation zu sehen, sei nun $v \in \langle A\rangle$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Nach Definition der linearen Hülle lässt sich v in der Form $v = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$ schreiben, wobei $a_i \in A$ und $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Es folgt $\lambda v = \lambda(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n) = (\lambda\lambda_1)a_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n)a_n$, also ist auch $\lambda v \in \langle A\rangle$. Dies zeigt, dass $\langle A\rangle$ einen Teilraum von V bildet. Da sich jedes $a \in A$ als Linearkombination $a = 1a$ schreiben lässt, gilt auch $A \subseteq \langle A\rangle$. Sei nun W ein Teilraum von V, sodass $A \subseteq W$. Für beliebige $a_1, \dots, a_n \in A$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ folgt dann $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \in W$, also $\langle A\rangle \subseteq W$. $\square$

III.1.3. Beispiel. Etwa gilt in $\mathbb{R}^3$:

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \lambda \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}\lambda\\2\lambda\\3\lambda\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \lambda \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}\lambda+3\mu\\2\lambda+2\mu\\3\lambda+\mu\end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \lambda \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \lambda \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} : \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3$$

III.1.4. Lemma. *Sind A und B Teilmengen eines Vektorraums V dann gilt:*

(a) $\langle\emptyset\rangle = \{0\}$ und $\langle V\rangle = V$.
(b) Ist $A \subseteq B$, dann auch $\langle A\rangle \subseteq \langle B\rangle$.
(c) A ist genau dann Teilraum von V, wenn $A = \langle A\rangle$.
(d) Es ist $B \subseteq \langle A\rangle$ genau dann, wenn $\langle A \cup B\rangle = \langle A\rangle$.
(e) Es gilt $\langle A \cup B\rangle = \langle A\rangle + \langle B\rangle$.
(f) Für jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ gilt $\langle\varphi(A)\rangle = \varphi(\langle A\rangle)$.
(g) Für je zwei lineare Abb. $\varphi, \psi\colon V \to W$ gilt: $\varphi|_A = \psi|_A \Leftrightarrow \varphi|_{\langle A\rangle} = \psi|_{\langle A\rangle}$.

Beweis. Die Behauptungen (a) und (b) sind trivial. Punkt (c) folgt sofort aus Proposition III.1.2. Ad (d): Gilt $\langle A \cup B\rangle = \langle A\rangle$, so folgt $B \subseteq A \cup B \subseteq \langle A \cup B\rangle = \langle A\rangle$, also $B \subseteq \langle A\rangle$. Für die andere Implikation sei nun $B \subseteq \langle A\rangle$. Da auch $A \subseteq \langle A\rangle$ erhalten wir $A \cup B \subseteq \langle A\rangle$ und somit $\langle A \cup B\rangle \subseteq \langle A\rangle$, denn $\langle A \cup B\rangle$ ist der kleinste Teilraum, der $A \cup B$ enthält. Aus $A \subseteq A \cup B$ folgt mit (b) aber auch die umgekehrte Inklusion, $\langle A\rangle \subseteq \langle A \cup B\rangle$, und somit Gleichheit.

Ad (e): Aus (b) erhalten wir zunächst $\langle A\rangle \cup \langle B\rangle \subseteq \langle A\cup B\rangle$, also $\langle A\rangle + \langle B\rangle \subseteq \langle A\cup B\rangle$, denn $\langle A\rangle + \langle B\rangle$ ist der kleinste Teilraum in dem $\langle A\rangle \cup \langle B\rangle$ enthalten ist, vgl. Proposition II.5.2. Andererseits ist $A\cup B \subseteq \langle A\rangle \cup \langle B\rangle \subseteq \langle A\rangle + \langle B\rangle$, es gilt daher auch die umgekehrte Inklusion, $\langle A\cup B\rangle \subseteq \langle A\rangle + \langle B\rangle$, denn $\langle A\cup B\rangle$ ist der kleinste Teilraum, der $A\cup B$ enthält.

Ad (f): Aus $A \subseteq \langle A\rangle$ folgt $\varphi(A) \subseteq \varphi(\langle A\rangle)$. Da $\varphi(\langle A\rangle)$ einen Teilraum bildet erhalten wir $\langle \varphi(A)\rangle \subseteq \varphi(\langle A\rangle)$, denn $\langle\varphi(A)\rangle$ ist der kleinste Teilraum, der $\varphi(A)$ enthält. Es gilt auch die umgekehrte Inklusion, $\varphi(\langle A\rangle) \subseteq \langle\varphi(A)\rangle$, denn jedes $v \in \langle A\rangle$ lässt sich als Linearkombination $v = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$ schreiben, $a_i \in A$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, also $\varphi(v) = \varphi(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n) = \lambda_1\varphi(a_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(a_n) \in \langle\varphi(A)\rangle$.

Ad (g): Die eine Implikation ist trivial, da $A \subseteq \langle A\rangle$. Für die andere Implikation sei nun $\varphi|_A = \psi|_A$. Der Teilraum $V' := \{v \in V : \varphi(v) = \psi(v)\} = \ker(\varphi - \psi)$ enthält daher A als Teilmenge. Es folgt $\langle A\rangle \subseteq V'$ und daher $\varphi|_{\langle A\rangle} = \psi|_{\langle A\rangle}$. □

III.1.5. Bemerkung. Aus Lemma III.1.4(b) folgt zwar $\langle A\cap B\rangle \subseteq \langle A\rangle \cap \langle B\rangle$, i.A. ist jedoch $\langle A\cap B\rangle \neq \langle A\rangle \cap \langle B\rangle$, siehe Übungsaufgabe 56.

III.1.6. Definition (Erzeugendensystem). Eine Teilmenge E eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V wird *Erzeugendensystem* von V genannt, wenn $\langle E\rangle = V$ gilt. In diesem Fall sagen wir auch *E erzeugt V* oder V wird von E *aufgespannt.* Ein Vektorraum heißt *endlich erzeugt,* wenn er ein endliches Erzeugendensystem besitzt.

III.1.7. Bemerkung. Jeder Vektorraum V besitzt ein Erzeugendensystem, etwa gilt $V = \langle V\rangle$ nach Lemma III.1.4(a).

III.1.8. Bemerkung. Ist E ein Erzeugendensystem eines Vektorraums V und gilt $E \subseteq E' \subseteq V$, dann ist auch E' Erzeugendensystem von V. Mit Lemma III.1.4(b) folgt nämlich $V = \langle E\rangle \subseteq \langle E'\rangle \subseteq V$, also $\langle E'\rangle = V$.

III.1.9. Bemerkung. Ist $\varphi\colon V \to W$ linear und E ein Erzeugendensystem von V, dann bildet $\varphi(E)$ ein Erzeugendensystem des Vektorraums $\operatorname{img}(\varphi)$. Dies folgt sofort aus Lemma III.1.4(f). Insbesondere sind Quotienten endlich erzeugter Vektorräume wieder endlich erzeugt, vgl. Satz II.6.3.

Erzeugendensysteme lassen sich auch mit Hilfe linearer Abbildungen charakterisieren.

III.1.10. Proposition (Erzeugendensysteme). *Für eine Teilmenge E eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
(a) E ist ein Erzeugendensystem von V.
(b) Jedes $v \in V$ lässt sich als Linearkombination $v = \sum_{e\in E} \lambda_e e$ schreiben, für gewisse Skalare $\lambda_e \in \mathbb{K}$, die fast alle verschwinden.
(c) Für je zwei lineare Abbildungen $\varphi, \psi\colon V \to W$ gilt: $\varphi|_E = \psi|_E \Rightarrow \varphi = \psi$.

Beweis. Die Äquivalenz (a)⇔(b) ist trivial. Die Implikation (a)⇒(c) folgt aus Lemma III.1.4(g). Ad (c)⇒(a): Betrachte die kanonische Projektion $\pi\colon V \to V/\langle E\rangle$, siehe Satz II.6.3. Da $\pi|_E = 0$, folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in (c), dass $\pi = 0$ gilt. Zusammen mit der Surjektivität von π erhalten wir $V/\langle E\rangle = \operatorname{img}(\pi) = \operatorname{img}(0) = \{0\}$ und somit $V = \langle E\rangle$, vgl. Bemerkung II.6.5. $\square$

III.1.11. Beispiel. Die Teilmenge $\{\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3\\7\end{smallmatrix}\right)\}$ bildet ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$, denn jedes Element von $\mathbb{R}^2$ lässt sich als Linearkombination dieser Vektoren schreiben,

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (7x-3y)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + (2x+y)\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}.$$

III.1.12. Beispiel. Die Menge $\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}$ bildet ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$, denn jedes Element von $\mathbb{R}^3$ lässt sich als Linearkombination dieser Vektoren schreiben,

$$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = (x-2y+z)\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) + (y-2z)\left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right) + z\left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right).$$

III.1.13. Beispiel. Die Menge $\left\{\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{i}\\1+\mathbf{i}\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1-\mathbf{i}\\-3\mathbf{i}\end{smallmatrix}\right)\right\}$ bildet ein Erzeugendensystem von $\mathbb{C}^2$, denn jedes Element von $\mathbb{C}^2$ lässt sich als Linearkombination dieser Vektoren schreiben,

$$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix} = \big(-3\mathbf{i}z_1 - (1-\mathbf{i})z_2\big)\begin{pmatrix}\mathbf{i}\\1+\mathbf{i}\end{pmatrix} + \big(-(1+\mathbf{i})z_1 + \mathbf{i}z_2\big)\begin{pmatrix}1-\mathbf{i}\\-3\mathbf{i}\end{pmatrix}.$$

III.1.14. Beispiel. Der Vektorraum $\mathbb{K}^n$ ist endlich erzeugt, die Menge der sogenannten *Einheitsvektoren,* $\{e_1, \dots, e_n\}$,

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

bildet ein Erzeugendensystem von $\mathbb{K}^n$. Jedes $x \in \mathbb{K}^n$ lässt sich nämlich als Linearkombination $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ schreiben, wobei x_i die i-te Komponente von x bezeichnet.

III.1.15. Beispiel. Die Menge der Matrizen $\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$ bildet ein Erzeugendensystem von $M_{2\times2}(\mathbb{K})$, denn jedes Element von $M_{2\times2}(\mathbb{K})$ lässt sich als Linearkombination dieser Matrizen schreiben,

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

III.1.16. Beispiel. Die Menge der Monome $\{1, z, z^2, z^3, \dots\}$ bildet ein Erzeugendensystem des Vektorraums der Polynome, $\mathbb{K}[z]$. Die Menge der Monome $\{1, z, z^2, \dots, z^n\}$ bildet ein Erzeugendensystem von $\mathbb{K}[z]_{\leq n}$.

Wir beenden diesen Abschnitt mit folgender Charakterisierung surjektiver linearer Abbildungen mittels Erzeugendensystemen.

III.1.17. PROPOSITION (Surjektive lineare Abbildungen). *Für eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) φ ist surjektiv.
(b) Für jedes Erzeugendensystem E von V ist $\varphi(E)$ Erzeugendensystem von W.
(c) Es gibt eine Teilmenge $A \subseteq V$, sodass $\varphi(A)$ Erzeugendensystem von W ist.

BEWEIS. Die Impliktion (a)⇒(b) folgt aus Bemerkung III.1.9. Die Implikation (b)⇒(c) ist offensichtlich, denn jeder Vektorraum besitzt ein Erzeugendensystem. Ad (c)⇒(a): Nach Voraussetzung existiert eine Teilmenge $A \subseteq V$, sodass $\langle\varphi(A)\rangle = W$. Aus Lemma III.1.4(f) folgt daher $\varphi(\langle A\rangle) = \langle\varphi(A)\rangle = W$, also ist φ surjektiv. □

III.1.18. BEMERKUNG. Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ eine Matrix und $\psi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi(x) := Ax$, die damit assoziierte lineare Abbildung. Dann bildet die Menge der Spaltenvektoren von A, d.h.

$$\left\{\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\} = \bigl\{\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)\bigr\} \subseteq \mathbb{K}^m$$

ein Erzeugendensystem von $\operatorname{img}(\psi)$, wobei $e_1, \dots, e_n$ die Einheitsvektoren in $\mathbb{K}^n$ bezeichnen. Dies folgt aus Bemerkung III.1.9, denn $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ bildet ein Erzeugendensystem von $\mathbb{K}^n$. Der Teilraum jener $y \in \mathbb{K}^m$, für die das Gleichungssystem $Ax = y$ mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ besitzt, wird daher von den Spalten von A aufgespannt, vgl. Bemerkung II.4.13. Insbesondere ist ψ genau dann surjektiv, wenn die Spalten von A ein Erzeugendensystem von $\mathbb{K}^m$ bilden. Etwa ist die mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1 & 1 & 9 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 4 & 0 & 8 & 4 & 1\\ 5 & 1 & 7 & 0 & 3 & 6 & 0\end{pmatrix}$$

assoziierte lineare Abbildung $\psi\colon \mathbb{K}^7 \to \mathbb{K}^3$, $\psi(x) := Ax$, surjektiv, denn die Menge der Spaltenvektoren von A enthält die Vektoren e_1, e_2 und $e_2 + e_3$, deren lineare Hülle enthält daher auch den Vektor $e_3 = (e_2 + e_3) - e_2$ und stimmt somit mit $\mathbb{K}^3$ überein, vgl. Beispiel III.1.14. Das lineare Gleichungssystem $Ax = y$ besitzt daher für jedes $y \in \mathbb{K}^3$ mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{K}^7$.

III.2. Lineare Unabhängigkeit. Eine Teilmenge eines Vektorraums heißt linear abhängig wenn zwischen ihren Elementen nicht-triviale lineare Relationen bestehen. Genauer haben wir folgende Definition.

III.2.1. DEFINITION (Lineare Abhängigkeit). Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Teilmenge $A \subseteq V$ wird *linear abhängig* genannt, falls gilt: Es existieren paarweise verschiedene Elemente $a_1, \dots, a_n \in A$ und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, die nicht alle verschwinden, sodass $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$.

III.2.2. Beispiel. Die Teilmenge $\{\binom{1}{2}, \binom{3}{7}, \binom{2}{4}\}$ von $\mathbb{R}^2$ ist linear abhängig, denn $2\binom{1}{2} + (-1)\binom{2}{4} = 0$.

III.2.3. Beispiel. Die Teilmenge $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}\right\}$ von $\mathbb{R}^3$ ist linear abhängig, denn $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} = 0$.

III.2.4. Bemerkung. Jede Teilmenge eines Vektorraums, die 0 enthält ist linear abhängig, denn $0 = 1 \cdot 0$.

III.2.5. Bemerkung. Jede Obermenge einer linear abhängigen Menge ist linear abhängig, d.h. ist A eine linear abhängige Teilmenge eines Vektorraums V und gilt $A \subseteq A' \subseteq V$, dann ist auch A' linear abhängig.

III.2.6. Proposition (Lineare Abhängigkeit). *Für eine Teilmenge A eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) A ist linear abhängig in V.
(b) Es existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ und paarweise verschiedene $a, a_1, \dots, a_n \in A$, sodass $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$, d.h. wenigstens eines der Elemente von A lässt sich als Linearkombination der restlichen schreiben.
(c) Es existiert eine echte Teilmenge $A' \subsetneq A$, sodass $\langle A' \rangle = \langle A \rangle$.

Beweis. Ad (a)⇒(b): Nach Voraussetzung existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, nicht alle gleich 0, und paarweise verschiedene $a_1, \dots, a_n \in A$, sodass $\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0$. Durch Umnummerieren dürfen wir o.B.d.A. $\lambda_n \neq 0$ annehmen. Es gilt daher

$$a_n = (-\lambda_n^{-1}\lambda_1)a_1 + \dots + (-\lambda_n^{-1}\lambda_{n-1})a_{n-1},$$

die gewünschte Darstellung.

Für die Implikation (b)⇒(c) seien nun $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ und $a, a_1, \dots, a_n \in A$ paarweise verschieden, sodass $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$. Dann ist $A' := A \setminus \{a\} \subsetneq A$ eine echte Teilmenge von A und es gilt $a_1, \dots, a_n \in A'$. Aus $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$ erhalten wir weiters $a \in \langle A' \rangle$. Nach Lemma III.1.4(d) gilt daher $\langle A' \cup \{a\} \rangle = \langle A' \rangle$. Da $A = A' \cup \{a\}$ folgt $\langle A \rangle = \langle A' \rangle$.

Ad (c)⇒(a): Sei also $A' \subsetneq A$ eine echte Teilmenge mit $\langle A' \rangle = \langle A \rangle$. Es existiert daher $a \in A \setminus A'$. Da $a \in A \subseteq \langle A \rangle = \langle A' \rangle$ existieren paarweise verschiedene $a_1, \dots, a_n \in A'$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n$. Auch die Vektoren $a, a_1, \dots, a_n$ sind paarweise verschieden, denn $a \notin A'$ aber $a_1, \dots, a_n \in A'$. Da

$$(-1)a + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n = 0,$$

ist A also linear abhängig. □

III.2.7. Beispiel. Wir wollen die Aussage von Proposition III.2.6 an der linear abhängige Teilmenge $\{\binom{1}{2}, \binom{3}{7}, \binom{2}{4}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ aus Beispiel III.2.2 illustrieren. In diesem Fall lassen sich zwei Vektoren als Linearkombinationen der anderen schreiben, $\binom{1}{2} = \frac{1}{2}\binom{2}{4}$ und $\binom{2}{4} = 2\binom{1}{2}$, aber der dritte Vektor ist nicht Linearkombination der restlichen, denn aus $\binom{3}{7} = \lambda\binom{1}{2} + \mu\binom{2}{4}$ folgt $3 = \lambda + 2\mu$

und $7 = 2\lambda + 4\mu$ und dieses Gleichungssystem besitzt keine Lösungen. Auch gilt $\mathbb{R}^2 = \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3\\7\end{smallmatrix}\right)\rangle = \langle\left(\begin{smallmatrix}3\\7\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}\right)\rangle = \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3\\7\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}\right)\rangle \neq \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}\right)\rangle = \langle\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)\rangle$.

III.2.8. Beispiel. Die Menge der Vektoren $\left\{\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\\mathbf{i}\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\2\mathbf{i}\\3+5\mathbf{i}\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{i}\\-3\mathbf{i}\\-2+5\mathbf{i}\end{smallmatrix}\right)\right\}$ ist linear abhängig in $\mathbb{C}^3$, denn

$$\begin{pmatrix}1\\2\mathbf{i}\\3+5\mathbf{i}\end{pmatrix} = (3+2\mathbf{i})\begin{pmatrix}0\\1\\\mathbf{i}\end{pmatrix} - \mathbf{i}\begin{pmatrix}\mathbf{i}\\-3\mathbf{i}\\-2+5\mathbf{i}\end{pmatrix}.$$

III.2.9. Beispiel. Sei $\omega \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ fix. Die Funktionen $f_1, f_2, f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_1(x) := \sin(x), \quad f_2(x) := \cos(x) \quad \text{und} \quad f_3(x) := \sin(x+\omega).$$

sind paarweise verschieden, denn $f_1(0) = 0 \neq f_3(0) \neq 1 = f_2(0)$. Die Teilmenge $\{f_1, f_2, f_3\} \subseteq F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist linear abhängig, denn nach dem Additionstheorem für Winkelfunktionen gilt $f_3 = \cos(\omega)f_1 + \sin(\omega)f_2$.

III.2.10. Definition (Lineare Unabhängigkeit). Eine Teilmenge eines Vektorraums wird *linear unabhängig* genannt, wenn sie nicht linear abhängig ist.

III.2.11. Proposition (Lineare Unabhängigkeit). *Für eine Teilmenge A eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) A ist linear unabhängig in V.
(b) Sind $a_1, \dots, a_n \in A$ paarweise verschieden und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, sodass $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$, dann gilt schon $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
(c) Ist $\sum_{a\in A} \lambda_a a = 0$, wobei die Skalare $\lambda_a \in \mathbb{K}$ fast alle verschwinden, dann gilt schon $\lambda_a = 0$ für alle $a \in A$.
(d) Ist $\sum_{a\in A} \lambda_a a = \sum_{a\in A} \mu_a a$ wobei die Skalare $\lambda_a \in \mathbb{K}$ und $\mu_a \in \mathbb{K}$ fast alle verschwinden, dann gilt schon $\lambda_a = \mu_a$ für alle $a \in A$.
(e) Für jede echte Teilmenge $A' \subsetneq A$ gilt $\langle A'\rangle \neq \langle A\rangle$.

Beweis. Die Äquivalenz (a)⇔(b) folgt sofort aus der Definition. Die Äquivalenz (b)⇔(c) ist trivial. Ad (c)⇒(d): Sei also $\sum_{a\in A} \lambda_a a = \sum_{a\in A} \mu_a a$, wobei die Skalare $\lambda_a \in \mathbb{K}$ und $\mu_a \in \mathbb{K}$ fast alle verschwinden. Es folgt

$$\sum_{a\in A}(\lambda_a - \mu_a)a = \sum_{a\in A}\lambda_a a - \sum_{a\in A}\mu_a a = 0.$$

Für jedes $a \in A$ gilt daher nach Voraussetzung $\lambda_a - \mu_a = 0$, also $\lambda_a = \mu_a$. Die Implikation (d)⇒(c) folgt sofort indem wir $\mu_a = 0$ setzen. Die Äquivalenz (a)⇔(e) folgt aus Proposition III.2.6. □

III.2.12. Bemerkung. Die leere Menge ist stets linear unabhängig.

III.2.13. Bemerkung. Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist linear unabhängig, d.h. ist A eine linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums V und gilt $A' \subseteq A$, dann ist auch A' linear unabhängig. Dies folgt aus Bemerkung III.2.5.

III.2.14. Bemerkung. Ist W ein Teilraum eines Vektorraums V und $A \subseteq W$ linear unabhängig in W, dann ist A auch linear unabhängig in V.

III.2.15. Beispiel. Eine 1-elementige Teilmenge $\{v\} \subseteq V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$.

III.2.16. Beispiel. Die Menge der Vektoren $\{\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3\\7\end{smallmatrix}\right)\}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{R}^2$. Sind nämlich $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und

$$\lambda \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} = 0,$$

dann folgt $\lambda + 3\mu = 0$ und $2\lambda + 7\mu = 0$, also $\lambda = \mu = 0$.

III.2.17. Beispiel. Die Menge der Vektoren $\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{R}^3$. Sind nämlich $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ und

$$\lambda \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) + \mu \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right) + \nu \left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right) = 0,$$

so folgt $\lambda + 2\mu + 3\nu = 0$, $\mu + 2\nu = 0$ und $\nu = 0$, also $\lambda = \mu = \nu = 0$.

III.2.18. Beispiel. Die Menge der Vektoren $\left\{\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{i}\\1+\mathbf{i}\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1-\mathbf{i}\\-3\mathbf{i}\end{smallmatrix}\right)\right\}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{C}^2$. Sind nämlich $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$ und

$$\lambda \begin{pmatrix}\mathbf{i}\\1+\mathbf{i}\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1-\mathbf{i}\\-3\mathbf{i}\end{pmatrix} = 0,$$

dann folgt $\mathbf{i}\lambda + (1-\mathbf{i})\mu = 0$ und $(1+\mathbf{i})\lambda - 3\mathbf{i}\mu = 0$, also $\lambda = \mu = 0$.

III.2.19. Beispiel. Die Menge der Einheitsvektoren $\{e_1, \dots, e_n\}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{K}^n$, denn aus $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$, folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

III.2.20. Beispiel. Die Menge der Matrizen $\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$ ist linear unabhängig in $M_{2\times2}(\mathbb{K})$. Sind nämlich $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{K}$ und

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = 0,$$

dann gilt schon $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

III.2.21. Beispiel. Die Menge der Monome, $\{1, z, z^2, z^3, \dots\}$, ist linear unabhängig in $\mathbb{K}[z]$.

III.2.22. Beispiel. Die Teilmenge $\{\sin, \cos\} \subseteq F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist linear unabhängig. Sind nämlich $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda \sin + \mu \cos = 0,$$

so folgt durch Auswerten bei 0 und $\pi/2$ sofort $0 = \lambda \sin(0) + \mu \cos(0) = \mu$ und $0 = \lambda \sin(\pi/2) + \mu \cos(\pi/2) = \lambda$.

III.2.23. Beispiel. Betrachte die Funktionen $f_1, f_2, f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) := e^x$, $f_2(x) := e^{2x}$ und $f_3(x) := e^{3x}$. Die Teilmenge $\{f_1, f_2, f_3\} \subseteq F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist linear unabhängig. Sind nämlich $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ und

$$\lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3 = 0,$$

dann erhalten wir durch Auswerten bei $x = \ln 1$, $x = \ln 2$ und $x = \ln 3$ das lineare Gleichungsystem

$$\begin{aligned} \lambda + \nu + \mu &= 0 \\ 2\lambda + 4\nu + 8\mu &= 0 \\ 3\lambda + 9\nu + 27\mu &= 0 \end{aligned}$$

und dieses besitzt nur eine Lösung, $\lambda = \mu = \nu = 0$.

III.3. Basen. Um Elemente eines Vektorraums effizient durch Linearkombinationen beschreiben zu können, liegt es nahe möglichst kleine, d.h. linear unabhängige Erzeugendensysteme zu betrachten. Diese werden Basen genannt.

III.3.1. Definition (Basis). Unter einer *Basis* eines Vektorraums verstehen wir ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

III.3.2. Proposition (Basen). *Für eine Teilmenge B eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
(a) B ist eine Basis von V.
(b) Jedes $v \in V$ lässt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination $v = \sum_{b \in B} \lambda_b b$ schreiben, wobei die Skalare $\lambda_b \in \mathbb{K}$ fast alle verschwinden.
(c) Zu jedem Vektorraum W und jeder Abbildung $f \colon B \to W$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi \colon V \to W$ mit $\varphi|_B = f$.

Beweis. Die Äquivalenz (a)$\Leftrightarrow$(b) folgt aus Proposition III.1.10(b) und Proposition III.2.11(d). Ad (b)$\Rightarrow$(c): Wir definieren $\varphi \colon V \to W$ durch $\varphi(v) := \sum_{b \in B} \lambda_b f(b)$, wobei $\lambda_b \in \mathbb{K}$ jene eindeutig bestimmten Skalare bezeichnen, für die $v = \sum_{b \in B} \lambda_b b$ gilt. Diese Abbildung ist wohldefiniert und es gilt $\varphi|_B = f$, denn jedes $b \in B$ lässt sich in der Form $b = 1 \cdot b$ schreiben, also $\varphi(b) = 1f(b) = f(b)$. Es bleibt daher nur noch die Linearität von φ zu zeigen. Seien dazu $v = \sum_{b \in B} \lambda_b b$ und $v' = \sum_{\lambda \in B} \lambda'_b b$. Dann ist $v + v' = \sum_{b \in B} \lambda_b b + \sum_{b \in B} \lambda'_b b = \sum_{b \in B} (\lambda_b + \lambda'_b) b$ und daher

$$\varphi(v + v') = \sum_{b \in B} (\lambda_b + \lambda'_b) f(b) = \sum_{b \in B} \lambda_b f(b) + \sum_{b \in B} \lambda'_b f(b) = \varphi(v) + \varphi(v').$$

Für $\mu \in \mathbb{K}$ gilt analog $\mu v = \mu \sum_{b \in B} \lambda_b b = \sum_{b \in B} (\mu \lambda_b) b$ und daher $\varphi(\mu v) = \sum_{b \in B} (\mu \lambda_b) f(b) = \mu \sum_{b \in B} \lambda_b f(b) = \mu \varphi(v)$. Damit ist die Existenz einer linearen Abbildung φ mit den gewünschten Eigenschaften gezeigt. Die Eindeutigkeit von φ folgt aus Proposition III.1.10.

Ad (c)$\Rightarrow$(a): Betrachte die kanonische Projektion $\pi \colon V \to V/\langle B \rangle$. Da $\pi|_B = 0$, folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in (c), dass $\pi = 0$ gilt. Da π surjektiv ist, erhalten wir $V/\langle B\rangle = \operatorname{img}(\pi) = \operatorname{img}(0) = \{0\}$ und somit $V = \langle B\rangle$, vgl. Bemerkung II.6.5. Dies zeigt, dass B ein Erzeugendensystem von V bildet. Um auch die lineare Unabhängigkeit von B zu zeigen, seien $b_1, \dots, b_n \in B$ paarweise verschieden und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ so, dass $\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n = 0$. Zu jedem $i \in \{1, \dots, n\}$ existiert nach Voraussetzung eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to \mathbb{K}$ mit $\varphi(b_i) = 1$ und $\varphi|_{B\setminus\{b_i\}} = 0$. Es folgt

$$0 = \varphi(0) = \varphi\big(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n\big) = \lambda_1\varphi(b_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(b_n) = \lambda_i\varphi(b_i) = \lambda_i,$$

und daher $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Dies zeigt, dass B auch linear unabhängig ist. □

III.3.3. Bemerkung. Ist A eine linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums V, dann bildet A eine Basis des Teilraums $\langle A\rangle$.

III.3.4. Bemerkung. Die leere Menge bildet eine Basis des trivialen Vektorraums $\{0\}$.

III.3.5. Beispiel. Die Menge der Einheitsvektoren $\{e_1, \dots, e_n\}$ bildet eine Basis von $\mathbb{K}^n$, siehe Beispiel III.1.14 und Beispiel III.2.19. Diese Basis wird als *Standardbasis* von $\mathbb{K}^n$ bezeichnet.

III.3.6. Beispiel. Die Teilmenge $\{\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3\\7\end{smallmatrix}\right)\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$, denn nach Beispiel III.1.11 bildet sie ein Erzeugendensystem, das nach Beispiel III.2.16 auch linear unabhängig ist.

III.3.7. Beispiel. Die Menge $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}\right\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$, denn nach Beispiel III.1.12 bildet sie ein Erzeugendensystem, das nach Beispiel III.2.17 auch linear unabhängig ist.

III.3.8. Beispiel. Die Menge $\{\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{i}\\1+\mathbf{i}\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1-\mathbf{i}\\-3\mathbf{i}\end{smallmatrix}\right)\}$ ist eine Basis von $\mathbb{C}^2$, denn nach Beispiel III.1.13 bildet sie ein Erzeugendensystem, das nach Beispiel III.2.18 auch linear unabhängig ist.

III.3.9. Beispiel. Die Menge der Matrizen $\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$ ist eine Basis von $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$, denn nach Beispiel III.1.15 bildet sie ein Erzeugendensystem, das nach Beispiel III.2.20 auch linear unabhängig ist.

III.3.10. Beispiel. Die Menge der Monome $\{1, z, z^2, z^3, \dots\}$ bildet eine Basis von $\mathbb{K}[z]$. Die Menge der Monome $\{1, z, z^2, \dots, z^n\}$ bildet eine Basis von $\mathbb{K}[z]_{\leq n}$.

III.3.11. Bemerkung. Zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, die gleichmächtige Basen besitzen, sind isomorph. Seien dazu V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen B bzw. C, und sei $f\colon B \to C$ eine Bijektion. Nach Proposition III.3.2 existieren lineare Abbildungen $\varphi\colon V \to W$ und $\psi\colon W \to V$, sodass $\varphi|_B = f$ und $\psi|_C = f^{-1}$. Es folgt $(\psi\circ\varphi)|_B = f^{-1}\circ f = \mathrm{id}_B = \mathrm{id}_V|_B$ und $(\varphi\circ\psi)|_C = f\circ f^{-1} = \mathrm{id}_C = \mathrm{id}_W|_C$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition III.3.2(c) erhalten wir also $\psi\circ\varphi = \mathrm{id}_V$ und $\varphi\circ\psi = \mathrm{id}_W$. Somit ist φ ein linearer Isomorphismus mit Umkehrabbildung $\varphi^{-1} = \psi$, d.h. $V \cong W$. Ist etwa B eine Basis eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, die aus genau n Elementen besteht, dann folgt $V \cong \mathbb{K}^n$. Daraus erhalten wir erneut $M_{m\times n}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{mn}$ und $\mathbb{K}[z]_{\leq n} \cong \mathbb{K}^{n+1}$.

III.3.12. Proposition (Injektive lineare Abbildungen). *Ist $\varphi\colon V \to W$ linear und B eine Basis von V, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) φ ist injektiv.
(b) φ bildet jede linear unabhängig Teilmenge von V bijektiv auf eine linear unabhängige Teilmenge von W ab.
(c) φ bildet jede Basis von V bijektiv auf eine lin. unabh. Teilmenge von W ab.
(d) φ bildet B bijektiv auf eine linear unabhängige Teilmenge von W ab.

Beweis. Ad (a)⇒(b): Sei also $A \subseteq V$ linear unabhängig. Da φ injektiv ist, wird A durch φ bijektiv auf $\varphi(A)$ abgebildet. Es genügt daher zu zeigen, dass $\varphi(A)$ linear unabhängig ist. Seien dazu $w_1, \dots, w_n \in \varphi(A)$ paarweise verschieden und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, sodass $\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n = 0$. Da $w_i \in \varphi(A)$, existieren $v_1, \dots, v_n \in A$, sodass $\varphi(v_i) = w_i$, für alle $i = 1, \dots, n$. Beachte, dass auch die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ paarweise verschieden sein müssen. Wir erhalten

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 \varphi(v_1) + \cdots + \lambda_n \varphi(v_n) = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n = 0.$$

Aus der Injektivität von φ folgt somit $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$. Da A linear unabhängig ist, erhalten wir schließlich $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Dies zeigt, dass die Menge $\varphi(A)$ linear unabhängig in W ist.

Die Implikationen (b)⇒(c)⇒(d) sind trivial.

Ad (d)⇒(a): Sei $v \in \ker(\varphi)$. Da B ein Erzeugendensystem von V bildet, existieren paarweise verschiedene $b_1, \dots, b_n \in B$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, sodass $v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$. Es folgt $0 = \varphi(v) = \varphi(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 \varphi(b_1) + \cdots + \lambda_n \varphi(b_n)$. Da $\varphi|_B$ injektiv ist, sind die Vektoren $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)$ paarweise verschieden. Da $\varphi(B)$ linear unabhängig ist, folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, also $v = 0$. Dies zeigt $\ker(\varphi) = \{0\}$, folglich ist φ injektiv, vgl. Proposition II.3.22. □

III.3.13. Bemerkung. Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ eine Matrix. Die mit A assoziierte lineare Abbildung $\psi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi(x) = Ax$, ist genau dann injektiv, wenn die Spaltenvektoren von A paarweise verschieden sind und eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{K}^m$ bilden. Dies folgt aus Proposition III.3.12, denn die Standardbasis $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ von $\mathbb{K}^n$ wird durch ψ auf die Menge der Spaltenvektoren von A abgebildet.

III.3.14. Proposition (Isomorphismen). *Ist $\varphi\colon V \to W$ linear und B eine Basis von V, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) φ ist ein Isomorphismus.
(b) φ bildet jede Basis von V bijektiv auf eine Basis von W ab.
(c) φ bildet B bijektiv auf eine Basis von W ab.

Beweis. Die Implikation (a)⇒(b) folgt aus Proposition III.1.17 und Proposition III.3.12. Die Implikation (b)⇒(c) ist trivial. Die Implikation (c)⇒(a) folgt aus Proposition III.1.17 und Proposition III.3.12. □

III.3.15. Bemerkung. Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ eine Matrix. Die mit A assoziierte lineare Abbildung $\psi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi(x) = Ax$, ist genau dann ein Isomorphismus, wenn die Spaltenvektoren von A paarweise verschieden sind und eine Basis von $\mathbb{K}^m$ bilden. Dies folgt aus Proposition III.3.14, denn die Standardbasis $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ von $\mathbb{K}^n$ wird durch ψ auf die Menge der Spaltenvektoren von A abgebildet. Wir werden später sehen, dass in diesem Fall $m = n$ gelten muss.

III.3.16. Proposition. *Seien W' und W'' zwei komplementäre Teilräume eines Vektorraums V, d.h. $V = W' \oplus W''$. Weiters sei B' eine Basis von W' und B'' eine Basis von W''. Dann ist $B' \cap B'' = \emptyset$ und $B' \cup B''$ ist eine Basis von V.*

Beweis. Nach Lemma III.1.4(e) gilt $\langle B' \cup B''\rangle = \langle B'\rangle + \langle B''\rangle = W' + W'' = V$, also bildet $B' \cup B''$ ein Erzeugendensystem von V. Weiters haben wir $B' \cap B'' \subseteq W' \cap W'' = \{0\}$ und daher $B' \cap B'' = \emptyset$, denn jeder Basisvektor muss verschieden von Null sein. Um die lineare Unabhängigkeit von $B' \cup B''$ einzusehen, sei nun

$$\sum_{b \in B' \cup B''} \lambda_b b = 0,$$

wobei die Skalare λ_b fast alle verschwinden. Da $B' \cap B'' = \emptyset$, folgt

$$\underbrace{\textstyle\sum_{b\in B'} \lambda_b b}_{\in W'} = \underbrace{-\textstyle\sum_{b\in B''} \lambda_b b}_{\in W''},$$

also $\sum_{b\in B'} \lambda_b b = 0 = \sum_{b\in B''} \lambda_b b$, denn beide Seiten obiger Gleichung liegen in $W' \cap W'' = \{0\}$. Da B' und B'' beide linear unabhängig sind, folgt $\lambda_b = 0$, für alle $b \in B' \cup B''$. Somit ist $B' \cup B''$ linear unabhängig, also eine Basis von V. $\square$

Wir wollen nun zeigen, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Eine Methode Basen zu konstruieren besteht darin Erzeugendensysteme solange zu Verkleinern, bis man bei einem linear unabhängig Erzeugendensystem, also einer Basis, anlangt. Ist etwa E ein linear abhängiges Erzeugendensystem von V, dann existiert nach Proposition III.2.6 eine echte Teilmenge $E' \subsetneq E$, sodass $\langle E'\rangle = \langle E\rangle = V$. Wir erhalten also ein echt kleiners Erzeugendensystem E' von V. Ist E' immer noch linear abhängig können wir die selbe Konstruktion auf E' anwenden und erhalten ein noch kleiners Erzeugendensystem $E'' \subsetneq E'$ von V. Im Allgemeinen wird dieser Prozess nicht abbrechen, und liefert auch keine Basis von V. War das ursprüngliche Erzeugendensystem jedoch endlich, so müssen wir nach endlich vielen Schritten ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, d.h. eine Basis von V erhalten. Wir fassen diese Überlegungen in folgender Proposition zusammen.

III.3.17. Proposition. *Ist E ein endliches Erzeugendensystem eines Vektorraums V, dann existiert eine Basis B von V mit $B \subseteq E$. Insbesondere besitzt jeder endlich erzeugte Vektorraum eine Basis.*

Ein anderer Ansatz zur Konstruktion von Basen besteht darin linear unabhängige Teilmengen durch Hinzunahme von Vektoren so zu erweitern, dass die entstehenden Mengen immer noch linear unabhängig sind. Dazu:

III.3.18. Lemma. *Sei A eine linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums V und $v \in V \setminus \langle A\rangle$. Dann ist auch $A \cup \{v\}$ linear unahängig.*

Beweis. Seien also $a_1, \dots, a_n \in A$ paarweise verschieden und $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ so, dass

$$0 = \lambda v + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n.$$

Wäre $\lambda \neq 0$, erhielten wir $v = (-\lambda^{-1}\lambda_1)a_1 + \cdots + (-\lambda^{-1}\lambda_n)a_n \in \langle A\rangle$, ein Widerspruch zur Voraussetzung $v \in V \setminus \langle A\rangle$. Es muss daher $\lambda = 0$ gelten. Somit ist auch $0 = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$. Da A linear unabhängig ist, folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Dies zeigt, dass $A \cup \{v\}$ linear unabhängig ist. □

Ist nun A eine linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums V, die nicht ganz V aufspannt, dann existiert nach Lemma III.3.18 eine echt größere linear unabhängige Teilmenge $A' \supsetneq A$. Ist A' ein Erzeugendensystem von V, dann haben wir eine Basis gefunden. Ist A' kein Erzeugendensystem, dann erhalten wir mittels Lemma III.3.18 eine noch größere linear unabhängige Teilmenge $A'' \supsetneq A'$. Dieser Prozess lässt sich fortsetzen, er wird i.A. aber nicht abbrechen, und es ist an dieser Stelle nicht klar wie sich daraus Basen von V gewinnen lassen. Lemma III.3.18 erlaubt es jedoch Basen als maximal linear unabhängige Teilmengen zu charakterisieren.

III.3.19. Proposition. *Für eine Teilmenge B eines Vektorraums V sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) B ist eine Basis von V.
(b) B ist ein minimales Erzeugendensystem von V, d.h. $\langle B\rangle = V$ und für jede echte Teilmenge $A \subsetneq B$ ist $\langle A\rangle \neq V$.
(c) B ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V, d.h. B ist linear unabhängig und jede echte Obermenge A, d.h. $B \subsetneq A \subseteq V$, ist linear abhängig.

Beweis. Die Äquivalenz (a)⇔(b) folgt sofort aus Proposition III.2.11.

Ad (a)⇒(c): Sei also B eine Basis von V. Insbesondere ist B linear unabhängig. Da B ein Erzeugendensystem von V bildet, gilt für jede Obermenge A von B, d.h. $B \subseteq A \subseteq V$, auch $\langle A\rangle = \langle B\rangle$, denn $V = \langle B\rangle \subseteq \langle A\rangle \subseteq V$. Nach Proposition III.2.6 ist daher jede echte Obermenge, $B \subsetneq A \subseteq V$, linear abhängig.

Ad (c)⇒(a): Sei also B eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V. Jede echte Obermenge A mit $B \subsetneq A \subseteq V$ ist daher linear abhängig. Insbesondere ist für jedes $v \in V \setminus B$ die Menge $B \cup \{v\}$ linear abhängig, also $v \in \langle B\rangle$ nach Lemma III.3.18. Dies zeigt $V \setminus B \subseteq \langle B\rangle$. Da auch $B \subseteq \langle B\rangle$ gilt, erhalten wir $V = B \cup (V \setminus B) \subseteq \langle B\rangle \subseteq V$, also $\langle B\rangle = V$. Somit ist B ein Erzeugendensystem von V, also eine Basis. □

Um nun die Existenz von Basen zeigen zu können, benötigen wir ein Hilfsmittel aus der Mengenlehre. Wir wiederholen zunächst die notwendigen Begriffe.

Sei X eine Menge und $\leq$ eine Halbordnung auf X, d.h. eine reflexsive, transitive und antisymmetrische Relation auf X, siehe [**7**, Kapitel 4]. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt nach *oben beschränkt* wenn $s \in X$ existiert, sodass $a \leq s$, für alle $a \in A$. Jedes solche s wird *eine obere Schranke* von A genannt. Unter einer *Kette in* X verstehen wir eine totalgeordnete Teilmenge $K \subseteq X$, d.h. für je zwei $k_1, k_2 \in K$ gilt stets $k_1 \leq k_2$ oder $k_2 \leq k_1$. Ein Element $x_0 \in X$ wird *maximal* genannt, wenn für jedes $x \in X$ mit $x_0 \leq x$ schon $x_0 = x$ gilt. In anderen Worten, ein Element von X ist genau dann maximal, wenn kein echt größeres Element von X existiert. Das wesentliche Hilfsmittel aus der Mengenlehre, das wir zur Konstruktion von Basen allgemeiner Vektorräume verwenden werden ist das folgende nach Max Zorn benannte Lemma.

III.3.20. Lemma (Lemma von Zorn). *Jede halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat, besitzt mindestens ein maximales Element.*

III.3.21. Bemerkung. Das Lemma von Zorn ist zum Auswahlaxiom äquivalent, siehe etwa [**4**, letztes Kapitel]. Dieses besagt, dass es stets möglich ist bei einer Familie nicht leerer Mengen X_i, $i \in I$, aus jeder der Mengen X_i ein Element auszuwählen, in anderen Worten, es existiert eine Abbildung $\alpha\colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i$, sodass $\alpha(i) \in X_i$, für jedes $i \in I$. Dies bedeutet gerade, dass das Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ nicht leer ist. Äquivalent dazu ist auch folgende Aussage: Jede surjektive Abbildung $f\colon X \to Y$ besitzt ein Rechtsinverses, d.h. es existiert eine Abbildung $g\colon Y \to X$, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Es soll an dieser Stelle auch erwähnt sein, dass das Auswahlaxiom unabhängig vom Zermelo–Fraenkel Axiomensystem (ZFA) der Mengenlehre ist. Ist ZFA widerspruchsfrei, dann gilt dies auch für ZFA+Auswahlaxiom, aber auch für ZFA+(Negation des Auswahlaxioms). Die erste Aussage wurde von Kurt Gödel 1938 bewiesen, die zweite von Paul Cohen im Jahre 1963.

III.3.22. Satz (Existenz von Basen). *Sei V ein Vektorraum, $A \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge und E ein Erzeugendensystem von V, sodass $A \subseteq E$. Dann existiert eine Basis B von V mit $A \subseteq B \subseteq E$.*

Beweis. Betrachte folgende Teilmenge der Potenzmenge von V,

$$X := \big\{ M \bigm| A \subseteq M \subseteq E \text{ und } M \text{ ist linear unabhängig} \big\}.$$

Die Mengeninklusion definiert eine Halbordnung $\subseteq$ auf X. Wir wollen nun zeigen, dass sich das Lemma von Zorn auf X anwenden lässt. Sei also K eine Kette in X. Es genügt zu zeigen, dass

$$S := \bigcup_{M\in K} M$$

in X liegt, denn dann ist S offenbar eine obere Schranke für K. Offensichtlich gilt $A \subseteq S \subseteq E$, denn $A \subseteq M \subseteq E$ für jedes $M \in K$, also auch für deren Vereinigung.

Es bleibt daher nur noch die lineare Unabhängigkeit von S zu zeigen. Seien dazu $s_1, \dots, s_n \in S$ paarweise verschieden und $\lambda_1 \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, sodass $\lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_n s_n = 0$. Nach Konstruktion von S existiert zu jedem $i \in \{1, \dots, n\}$ ein $M_i \in K$, sodass $s_i \in M_i$. Da endliche totalgeordnete Mengen stets ein (eindeutiges) Maximum besitzen, vgl. Übungsaufgabe 63, existiert $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, sodass $M_i \subseteq M_{i_0}$ für alle $i = 1, \dots, n$. Die Vektoren $s_1, \dots, s_n$ liegen daher alle in M_{i_0}. Da M_{i_0} linear unabhängig ist, folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Dies zeigt, dass S linear unabhängig ist.

Wir haben oben gesehen, dass jede Kette in X nach oben beschränkt ist. Nach dem Lemma von Zorn existiert daher ein maximales Element $B \in X$. Nach Konstruktion ist B eine linear unabhängige Teilmenge von V und es gilt $A \subseteq B \subseteq E$. Wegen der Maximalität von B ist jede Obermenge B' mit $B \subsetneq B' \subseteq E$ linear abhängig. Für jedes $e \in E \setminus B$ ist daher $B \cup \{e\}$ linear abhängig, also $e \in \langle B \rangle$ nach Lemma III.3.18. Dies zeigt $E \setminus B \subseteq \langle B \rangle$. Zusammen mit $B \subseteq \langle B \rangle$ folgt $E \subseteq \langle B \rangle$. Da E ein Erzeugendensystem von V bildet, erhalten wir $V = \langle E \rangle \subseteq \langle B \rangle \subseteq V$, also $\langle B \rangle = V$. Dies zeigt, dass B ein Erzeugendensystem von V bildet, also ist B die gesuchte Basis. □

III.3.23. Korollar.

(a) *Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.*
(b) *Jede linear unabhängige Teilmenge kann zu einer Basis erweitert werden.*
(c) *Jedes Erzeugendensystem enthält eine Basis.*

Beweis. Dies folgt aus Satz III.3.22 mit $A = \emptyset$ bzw. $E = V$. □

III.3.24. Bemerkung. Es lässt sich zeigen, dass je zwei Basen eines Vektorraums gleiche Kardinalität haben, d.h. bijektiv aufeinander abgebildet werden können, siehe etwa [**6**, Theorem 1.12]. Den endlich-dimensionalen Fall werden wir in Kapitel IV genau diskutieren.

III.3.25. Korollar. *Ist W ein Teilraum eines Vektorraums V, dann lässt sich jede lineare Abbildung $\varphi\colon W \to U$ zu einer linearen Abbildung $\tilde\varphi\colon V \to U$ fortsetzen, d.h. $\tilde\varphi|_W = \varphi$.*

Beweis. Nach Korollar III.3.23(a) besitzt W eine Basis B. Offensichtlich ist B auch in V linear unabhängig. Nach Korollar III.3.23(b) existiert daher eine Basis $\tilde B$ von V mit $B \subseteq \tilde B$. Nach Proposition III.3.2 existiert eine lineare Abbildung $\tilde\varphi\colon V \to U$, sodass $\tilde\varphi|_B = \varphi|_B$ und $\tilde\varphi|_{\tilde B \setminus B} = 0$. Nach Proposition III.3.2 gilt $\tilde\varphi|_W = \varphi$, also ist $\tilde\varphi$ die gesuchte Fortsetzung von φ. □

III.3.26. Korollar. *Jeder Teilraum besitzt ein Komplement.*

Beweis. Sei also W Teilraum eines Vektorraums V. Nach Korollar III.3.25 existiert eine lineare Abbildung $\pi\colon V \to W$, sodass $\pi|_W = \mathrm{id}_W$. Daraus folgt $\mathrm{img}(\pi) = W$ und $\pi \circ \pi = \pi$. Nach Proposition II.5.8 ist daher $\ker(\pi)$ ein Komplement von W in V, d.h. $V = W \oplus \ker(\pi)$. □

III.3.27. Korollar.

(a) *Jede injektive lineare Abbildung* $\varphi\colon V \to W$ *besitzt eine lineare Linksinverse, d.h. es existiert eine lineare Abbildung* $\psi\colon W \to V$ *mit* $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_V$.
(b) *Jede surjektive lineare Abbildung* $\varphi\colon V \to W$ *besitzt eine lineare Rechtsinverse, d.h. es existiert eine lineare Abbildung* $\psi\colon W \to V$ *mit* $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W$

Beweis. Ad (a): Wegen der Injektivität von φ ist $\varphi\colon V \to \operatorname{img}(\varphi)$ eine lineare Bijektion, also ein Isomorphismus. Nach Korollar III.3.25 lässt sich die lineare Abbildung $\varphi^{-1}\colon \operatorname{img}(\varphi) \to V$ zu einer linearen Abbildung $\psi\colon W \to V$ fortsetzen, d.h. $\psi|_{\operatorname{img}(\varphi)} = \varphi^{-1}$. Es folgt nun $\psi \circ \varphi = \psi|_{\operatorname{img}(\varphi)} \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_V$.

Ad (b): Sei B eine Basis von W. Wegen der Surjektivität von φ existiert eine Abbildung $f\colon B \to V$, sodass $\varphi \circ f = \mathrm{id}_B$. Nach Proposition III.3.2 existiert eine lineare Abbildung $\psi\colon W \to V$, sodass $\psi|_B = f$. Es folgt $\varphi \circ \psi|_B = \varphi \circ f = \mathrm{id}_B$ und nach der Eindeutigkeitsaussage in Proposition III.3.2(c) daher $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_W$. □

III.3.28. Korollar. *Sei* V *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum und* $0 \neq v \in V$. *Dann existiert ein lineares Funktional* $\alpha\colon V \to \mathbb{K}$ *mit* $\alpha(v) = 1$.

Beweis. Da $v \neq 0$, ist die lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{K} \to V$, $\varphi(\lambda) := \lambda v$, injektiv. Nach Korollar III.3.27(a) existiert daher eine lineare Abbildung $\alpha\colon V \to \mathbb{K}$, sodass $\alpha \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}$. Es gilt daher $\alpha(v) = \alpha(\varphi(1)) = (\alpha \circ \varphi)(1) = \mathrm{id}_{\mathbb{K}}(1) = 1$. □

III.3.29. Proposition. *Seien* W' *und* W'' *zwei Teilräume eines Vektorraums* V. *Dann existieren eine Basis* B' *von* W' *und eine Basis* B'' *von* W'', *sodass* $B' \cap B''$ *eine Basis von* $W' \cap W''$ *bildet, und* $B' \cup B''$ *eine Basis von* $W' + W''$ *bildet.*

Beweis. Nach Korollar III.3.26 existiert ein zu $W := W' \cap W''$ komplementärer Teilraum U in $W' + W''$, d.h.

$$W' + W'' = W \oplus U.$$

Für die Teilräume $U' := W' \cap U$ und $U'' := W'' \cap U$ gilt dann:

$$W' = W \oplus U', \qquad W'' = W \oplus U'', \qquad U = U' \oplus U''.$$

Es ist nämlich $W \cap U' \subseteq W \cap U = \{0\}$ und $W + U' \subseteq W'$ aber auch $W' \subseteq W + U'$, denn zu jedem $w' \in W'$ existieren $w \in W$ und $u \in U$ mit $w' = w + u$, da aber $u = w' - w \in W'$ folgt $u \in U'$, also $w' \in W + U'$. Dies zeigt die erste Behauptung, $W' = W \oplus U$. Die zweite, $W'' = W \oplus U''$, lässt sich analog beweisen. Daraus folgt weiters $W' + W'' = W + U' + U''$ und somit $U \subseteq U' + U''$, denn zu jedem $u \in U$ exitieren $w \in W$, $u' \in U'$ und $u'' \in U''$ mit $u = w + u' + u''$, da aber $w = u - u' - u'' \in W \cap U = \{0\}$ muss $w = 0$ gelten, also $u = u' + u'' \in U' + U''$. Da offensichtlich $U' + U'' \subseteq U$ erhalten wir $U = U' + U''$. Schließlich haben wir auch $U' \cap U'' \subseteq W' \cap W'' \cap U = W \cap U = \{0\}$, also $U = U' \oplus U''$.

Nach Korollar III.3.23(a) existiert eine Basis B von W, eine Basis C' von U' und eine Basis C'' von U''. Nach Proposition III.3.16 ist $B' := B \cup C'$ eine Basis von W', $B'' := B \cup C''$ eine Basis von W'', $C' \cup C''$ eine Basis von U, $B' \cup B'' = B \cup C' \cup C''$ eine Basis von $W' + W''$ und $C' \cap C'' = \emptyset$, also auch $B' \cap B'' = B$ eine Basis von $W' \cap W'' = W$. □

III.4. Dualräume. Eine Möglichkeit einen Teilraum W eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V zu beschreiben besteht darin eine Basis, oder allgemeiner, ein Erzeugendensystem von W anzugeben, siehe oben. Teilräume lassen sich aber auch durch lineare Gleichungen beschreiben. Eine naheliegende Verallgemeinerung einer Gleichung $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ für Vektoren $x \in \mathbb{K}^n$ ist die Bedingung $\alpha(v) = 0$, wobei $\alpha\colon V \to \mathbb{K}$ linear ist. Haben wir eine Menge linearer Abbildungen $\alpha_i\colon V \to \mathbb{K}$, $i \in I$, dann bildet

$$\bigl\{v \in V \bigm| \forall i \in I : \alpha_i(v) = 0\bigr\} = \bigcap_{i\in I} \ker(\alpha_i)$$

einen Teilraum von V, den wir als Lösungsraum des Gleichungssystems $\alpha_i(v) = 0$, $i \in I$, verstehen können. Wir werden unten sehen, dass sich jeder Teilraum von V in dieser Form schreiben lässt. Für eine effektive Beschreibung sind natürlich möglichst kleine Gleichungssysteme interessant. Für endlich-dimensionale Vektorräume werden wir diesen Aspekt im nächsten Kapitel genau behandeln.

III.4.1. Definition (Dualraum). Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Unter einem *linearen Funktional* auf V verstehen wir eine lineare Abbildung $V \to \mathbb{K}$. Unter dem *Dualraum* von V verstehen wir den Vektorraum $V^* := L(V, \mathbb{K})$, d.h. den Vektorraum aller linearen Funktionale auf V, vgl. Proposition II.3.18.

III.4.2. Beispiel. Es ist $(\mathbb{K}^n)^* = L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \cong M_{1\times n}(\mathbb{K})$, vgl. Satz II.4.4, lineare Funktionale auf $\mathbb{K}^n$ können daher durch Zeilenvektoren beschrieben werden.

III.4.3. Proposition. *Jede Abbildung $\varphi\colon V \to W$ induziert eine lineare Abbildung zwischen den Dualräumen, $\varphi^t\colon W^* \to V^*$, $\varphi^t(\beta) := \beta \circ \varphi$, $\beta \in W^*$. Die Zuordnung*

$$L(V, W) \to L(W^*, V^*), \quad \varphi \mapsto \varphi^t, \tag{III.1}$$

ist linear und injektiv, es gilt daher

$$(\varphi_1 + \varphi_2)^t = \varphi_1^t + \varphi_2^t \qquad \textit{sowie} \qquad (\lambda\varphi)^t = \lambda\varphi^t,$$

für beliebige lineare Abbildungen $\varphi, \varphi_1, \varphi_2\colon V \to W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Für jede weitere lineare Abbildung $\psi\colon W \to U$ gilt

$$(\psi \circ \varphi)^t = \varphi^t \circ \psi^t \qquad \textit{und} \qquad \mathrm{id}_V^t = \mathrm{id}_{V^*}.$$

Ist $\varphi\colon V \to W$ ein Isomorphismus, so ist auch $\varphi^t\colon W^* \to V^*$ ein Isomorphismus,

$$(\varphi^t)^{-1} = (\varphi^{-1})^t.$$

Insbesonder folgt aus $V \cong W$ auch $V^* \cong W^*$.

Beweis. Beachte zunächst, dass $\varphi^t(\beta) = \beta \circ \varphi$ als Komposition linearer Abbildungen selbst linear ist, d.h. $\varphi^t(\beta) \in V^*$ für jedes $\beta \in W^*$. Die Linearität von $\varphi^t\colon W^* \to V^*$ folgt aus Proposition II.3.18(a), denn $\varphi^t(\beta_1 + \beta_2) = (\beta_1 + \beta_2) \circ \varphi = \beta_1 \circ \varphi + \beta_2 \circ \varphi = \varphi^t(\beta_1) + \varphi^t(\beta_2)$ und $\varphi^t(\lambda\beta) = (\lambda\beta) \circ \varphi = \lambda(\beta \circ \varphi) = \lambda\varphi^t(\beta)$, für beliebige $\beta, \beta_1, \beta_2 \in W^*$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Aus Proposition II.3.18(b) erhalten wir weiters $(\varphi_1+\varphi_2)^t(\beta) = \beta\circ(\varphi_1+\varphi_2) = \beta\circ\varphi_1+\beta\circ\varphi_2 = \varphi_1^t(\beta)+\varphi_2^t(\beta) = (\varphi_1^t+\varphi_2^t)(\beta)$

und $(\lambda\varphi)^t(\beta) = \beta \circ (\lambda\varphi) = \lambda(\beta \circ \varphi) = \lambda\varphi^t(\beta)$, für jedes $\beta \in W^*$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Die Zuordnung (III.1) ist daher linear. Ist $0 \neq \varphi \in L(V,W)$, dann existiert $v \in V$ mit $\varphi(v) \neq 0$. Nach Korollar III.3.28 existiert daher ein Funktional $\beta \in W^*$ mit $\beta(\varphi(v)) = 1$. Es folgt $\varphi^t(\beta)(v) = \beta(\varphi(v)) = 1 \neq 0$, also $\varphi^t(\beta) \neq 0$ und daher $\varphi^t \neq 0$. Dies zeigt, dass die Abbildung (III.1) trivialen Kern hat, und daher injektiv ist, vgl. Proposition II.3.22. Weiters gilt $\mathrm{id}_V^t(\alpha) = \alpha \circ \mathrm{id}_V = \alpha$, für jedes $\alpha \in V^*$, also $\mathrm{id}_V^t = \mathrm{id}_{V^*}$, sowie $(\psi \circ \varphi)^t(\gamma) = \gamma \circ (\psi \circ \varphi) = (\gamma \circ \psi) \circ \varphi = \varphi^t(\gamma \circ \psi) = \varphi^t(\psi^t(\gamma)) = (\varphi^t \circ \psi^t)(\gamma)$, für jedes $\gamma \in U^*$, also $(\psi \circ \varphi)^t = \varphi^t \circ \psi^t$. Ist $\varphi\colon V \to W$ ein Isomorphismus, so folgt $\varphi^t \circ (\varphi^{-1})^t = (\varphi^{-1} \circ \varphi)^t = \mathrm{id}_V^t = \mathrm{id}_{V^*}$ und $(\varphi^{-1})^t \circ \varphi^t = (\varphi \circ \varphi^{-1})^t = \mathrm{id}_W^t = \mathrm{id}_{W^*}$, d.h. φ^t ist invertierbar mit Umkehrabbildung $(\varphi^t)^{-1} = (\varphi^{-1})^t$. $\square$

III.4.4. Bemerkung. Die Abbildung (III.1) ist i.A. nicht surjektiv.

III.4.5. Bemerkung. Nach Satz II.4.4 ist $\phi\colon \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cong} L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) = (\mathbb{K}^n)^*$, $\phi(x) := \psi_{x^t}$, ein Isomorphismus. Ist $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $\psi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi_A(x) = Ax$, die damit assoziierte lineare Abbildung, dann kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^m \arrow[r, "\phi_{\mathbb{K}^m}", "\cong"'] \arrow[d, "\psi_{A^t}"'] & (\mathbb{K}^m)^* \arrow[d, "(\psi_A)^t"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "\phi_{\mathbb{K}^n}", "\cong"'] & (\mathbb{K}^n)^* \end{tikzcd} \qquad \text{d.h.} \qquad \phi_{\mathbb{K}^n} \circ \psi_{A^t} = (\psi_A)^t \circ \phi_{\mathbb{K}^m}.$$

Es gilt nämlich $((\psi_A)^t \circ \phi_{\mathbb{K}^m})(x) = (\psi_A)^t(\psi_{x^t}) = \psi_{x^t} \circ \psi_A = \psi_{x^t A} = \psi_{(A^t x)^t} = \phi_{\mathbb{K}^n}(A^t x) = (\phi_{\mathbb{K}^n} \circ \psi_{A^t})(x)$, für alle $x \in \mathbb{K}^m$. Bis auf den Isomorphismus ϕ ist die duale Abbildung, $(\psi_A)^t$, daher durch die transponierte Matrix, A^t, gegeben, vgl. Proposition II.4.11.

III.4.6. Definition (Annihilator). Unter dem *Annihilator* einer Teilmenge A eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V verstehen wir den Teilraum

$$A^\circ := \{\alpha \in V^* : \alpha|_A = 0\} \subseteq V^*.$$

III.4.7. Lemma. *Sind A und B Teilmengen eines Vektorraums V, dann gilt:*

(a) $\{0\}^\circ = V^*$ und $V^\circ = \{0\}$.
(b) $A \subseteq B \Rightarrow B^\circ \subseteq A^\circ$.
(c) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
(d) $A^\circ = \langle A \rangle^\circ$.
(e) $\langle A \rangle = \bigcap_{\alpha \in A^\circ} \ker(\alpha)$.
(f) $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle \Leftrightarrow B^\circ \subseteq A^\circ$.
(g) $\langle A \rangle = \langle B \rangle \Leftrightarrow A^\circ = B^\circ$.
(h) Für jeden Teilraum W von V gilt: $W = \bigcap_{\alpha \in W^\circ} \ker(\alpha)$.
(i) Für je zwei Teilräume W_1 und W_2 von V gilt: $W_1 \subseteq W_2 \Leftrightarrow W_2^\circ \subseteq W_1^\circ$.
(j) Für je zwei Teilräume W_1 und W_2 von V gilt: $W_1 = W_2 \Leftrightarrow W_1^\circ = W_2^\circ$.

Beweis. Die Behauptungen (a), (b) und (c) sind trivial. Behauptung (d) folgt aus Lemma III.1.4(g). Ad (e): Offensichtlich gilt $A \subseteq \bigcap_{\alpha\in A^\circ}\ker(\alpha)$ und daher auch $\langle A\rangle \subseteq \bigcap_{\alpha\in A^\circ}\ker(\alpha)$, denn als Durchschnitt von Teilräumen bildet die rechte Seite einen Teilraum von V. Für die umgekehrte Inklusion sei nun $v \in V \setminus \langle A\rangle$. Es genügt ein lineares Funktional $\alpha\colon V \to \mathbb{K}$ zu konstruieren, sodass $\alpha(v) = 1$ und $\alpha|_A = 0$. Für die Konstruktion eines solchen Funktionals α bezeichne $\pi\colon V \to V/\langle A\rangle$ die kanonische Projektion. Da $v \notin \langle A\rangle$ gilt $\pi(v) \neq 0$. Nach Korollar III.3.28 existiert ein lineares Funktional $\bar\alpha\colon V/\langle A\rangle \to \mathbb{K}$ mit $\bar\alpha(\pi(v)) = 1$. Für das Funktional $\alpha := \bar\alpha \circ \pi \in V^*$ gilt daher $\alpha(v) = 1$ aber auch $\alpha|_A = 0$, denn $A \subseteq \ker(\pi)$. Ad (f): Die Implikation $\langle A\rangle \subseteq \langle B\rangle \Rightarrow B^\circ \subseteq A^\circ$ folgt aus (b) und (d), die umgekehrte Implikation aus (e). Aus (f) erhalten wir auch sofort (g). Die verbleibenden Behauptungen (h), (i) und (j) folgen aus (e), (f) und (g), denn für jeden Teilraum W gilt $W = \langle W\rangle$. □

III.4.8. Bemerkung. Ist W ein Teilraum eines Vektorraums V und $A \subseteq W^\circ$ ein Erzeugendensystem, d.h. $\langle A\rangle = W^\circ$, dann gilt

$$W = \bigl\{v \in V \bigm| \forall\alpha \in A : \alpha(v) = 0\bigr\} = \bigcap_{\alpha\in A}\ker(\alpha),$$

jedes Erzeugendensysteme von W° liefert daher ein Gleichungssysteme für W. Dies folgt aus Lemma III.4.7(h) und

$$\bigcap_{\alpha\in A}\ker(\alpha) = \bigcap_{\alpha\in\langle A\rangle}\ker(\alpha).$$

Um die letzte Gleichung einzusehen, sei $v \in \bigcap_{\alpha\in A}\ker(\alpha)$. Für beliebige $\alpha_i \in A$ und $\lambda_i \in \mathbb{K}$ gilt dann auch $(\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n)(v) = \lambda_1\alpha_1(v) + \cdots + \lambda_n\alpha_n(v) = 0$. Dies zeigt $\bigcap_{\alpha\in A}\ker(\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha\in\langle A\rangle}\ker(\alpha)$, die andere Inklusion ist trivial. Umgekehrt folgt i.A. aus $W = \bigcap_{\alpha\in A}\ker(\alpha)$ nicht, dass A ein Erzeugendensystem von W bildet. Betrachten wir etwa den Vektorraum $V = \mathbb{K}[z]$ und bezeichnet $\alpha_i \in \mathbb{K}[z]^*$ das lineare Funktional, das einem Polynom seinen i-ten Koeffizienten zuordnet, d.h. $\alpha_i(p_0 + p_1z + p_2z^2 + \cdots) := p_i$, dann gilt offensichtlich $\bigcap_i\ker(\alpha_i) = \{0\}$, aber die Menge der Funktionale $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ bildet kein Erzeugendensystem von $\{0\}^\circ = \mathbb{K}[z]^*$, etwa lässt sich das lineare Funktional $\alpha \in \mathbb{K}[z]^*$, $\alpha(p_0 + p_1z + p_2z^2 + \cdots) := \sum_i p_i$, nicht als Linearkombination der Funktionale α_i schreiben.

III.4.9. Satz. *Für je zwei Teilräume W_1 und W_2 eines Vektorraums V gilt*

$$(W_1 + W_2)^\circ = W_1^\circ \cap W_2^\circ \quad \text{und} \quad (W_1 \cap W_2)^\circ = W_1^\circ + W_2^\circ.$$

Insbesondere haben wir:

$$\begin{aligned} W_1^\circ \cap W_2^\circ = \{0\} \quad &\Leftrightarrow \quad W_1 + W_2 = V \\ W_1^\circ + W_2^\circ = V^* \quad &\Leftrightarrow \quad W_1 \cap W_2 = \{0\} \\ W_1^\circ \oplus W_2^\circ = V^* \quad &\Leftrightarrow \quad W_1 \oplus W_2 = V \end{aligned}$$

Beweis. Die erste Gleichheit folgt aus:

$$\begin{aligned} W_1^\circ \cap W_2^\circ &= (W_1 \cup W_2)^\circ && \text{nach Lemma III.4.7(c)} \\ &= \langle W_1 \cup W_2 \rangle^\circ && \text{nach Lemma III.4.7(d)} \\ &= (W_1 + W_2)^\circ && \text{nach Lemma III.1.4(e)} \end{aligned}$$

Auch die Inklusion $W_1^\circ + W_2^\circ \subseteq (W_1 \cap W_2)^\circ$ lässt sich leicht zeigen: Aus $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1$ folgt nämlich $W_1^\circ \subseteq (W_1 \cap W_2)^\circ$ und analog gilt $W_2^\circ \subseteq (W_1 \cap W_2)^\circ$. Somit ist $W_1^\circ \cup W_1^\circ \subseteq (W_1 \cap W_2)^\circ$. Da $W_1^\circ + W_2^\circ$ der kleinste Teilraum ist, der $(W_1 \cap W_2)^\circ$ enthält erhalten wir $W_1^\circ + W_2^\circ \subseteq (W_1 \cap W_2)^\circ$.

Um auch die umgekehrte Inklusion $(W_1 \cap W_2)^\circ \subseteq W_1^\circ + W_2^\circ$ zu zeigen sei nun $\alpha \in (W_1 \cap W_2)^\circ$, d.h. $\alpha \in V^*$ und $W_1 \cap W_2 \subseteq \ker(\alpha)$. Wir werden unten eine lineare Abbildung ρ mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

$$\rho\colon V \to V, \quad \rho|_{W_2} = \mathrm{id}_{W_2}, \quad \rho(W_1) \subseteq W_1 \cap W_2.$$

Es ist dann $\alpha_1 := \alpha \circ \rho \in W_1^\circ$, denn für jedes $w_1 \in W_1$ gilt $\alpha_1(w_1) = \alpha(\rho(w_1)) = 0$, da ja $\rho(w_1) \in \rho(W_1) \subseteq W_1 \cap W_2 \subseteq \ker(\alpha)$. Setzen wir $\alpha_2 := \alpha - \alpha_1$ dann gilt auch $\alpha_2 \in W_2^\circ$, denn für jedes $w_2 \in W_2$ ist $\alpha_2(w_2) = \alpha(w_2) - \alpha_1(w_2) = \alpha(w_2) - \alpha(\rho(w_2)) = \alpha(w_2) - \alpha(w_2) = 0$. Somit erhalten wir $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \in W_1^\circ + W_2^\circ$.

Für die Konstruktion von ρ wählen wir Basen B_1 von W_1 und B_2 von W_2 wie in Proposition III.3.29, d.h. $B_1 \cup B_2$ ist Basis von $W_1 + W_2$. Nach Proposition III.3.2 existiert eine lineare Abbildung $\bar\rho\colon W_1 + W_2 \to V$, sodass $\bar\rho|_{B_2} = \mathrm{id}_{B_2}$ und $\bar\rho|_{B_1 \setminus B_2} = 0$. Wegen $B_1 = (B_1 \setminus B_2) \cup (B_1 \cap B_2)$ gilt daher auch $\bar\rho(B_1) \subseteq W_1 \cap W_2$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition III.3.2(c) folgt daher $\bar\rho|_{W_2} = \mathrm{id}_{W_2}$ und $\bar\rho(W_1) \subseteq W_1 \cap W_2$. Nach Korollar III.3.25 lässt sich $\bar\rho$ zu einer linearen Abbildung $\rho\colon V \to V$ erweitern, d.h. $\rho|_{W_1+W_2} = \bar\rho$, und diese Fortsetzung hat die gewünschten Eigenschaften.

Die verbleibenden Behauptungen folgen nun aus Lemma III.4.7(a)&(j), denn $W_1 + W_2 = V \Leftrightarrow (W_1 + W_2)^\circ = V^\circ \Leftrightarrow W_1^\circ \cap W_2^\circ = \{0\}$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\} \Leftrightarrow (W_1 \cap W_2)^\circ = \{0\}^\circ \Leftrightarrow W_1^\circ + W_2^\circ = V$. □

III.4.10. Satz. *Für jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ gilt*

$$\ker(\varphi^t) = \mathrm{img}(\varphi)^\circ \quad \textit{und} \quad \mathrm{img}(\varphi^t) = \ker(\varphi)^\circ.$$

Insbesondere ist φ genau dann injektiv, wenn φ^t surjektiv ist. Auch ist φ genau dann surjektiv, wenn φ^t injektiv ist.

Beweis. Es ist $\ker(\varphi^t) = \mathrm{img}(\varphi)^\circ$, denn für $\beta \in W^*$ gilt:

$$\begin{aligned} \beta \in \ker(\varphi^t) &\Leftrightarrow \beta \circ \varphi = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall v \in V : \beta(\varphi(v)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall w \in \mathrm{img}(\varphi) : \beta(w) = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta|_{\mathrm{img}(\varphi)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta \in \mathrm{img}(\varphi)^\circ \end{aligned}$$

Auch die Inklusion $\operatorname{img}(\varphi^t) \subseteq \ker(\varphi)^\circ$ lässt sich leicht beweisen. Ist nämlich $\alpha \in \operatorname{img}(\varphi^t) \subseteq V^*$ dann existiert $\beta \in W^*$ mit $\alpha = \varphi^t(\beta) = \beta \circ \varphi$, also gilt $\alpha(v) = (\beta \circ \varphi)(v) = \beta(\varphi(v)) = 0$ für jedes $v \in \ker(\varphi)$, und daher $\alpha \in \ker(\varphi)^\circ$.

Wir zeigen nun die umgekehrte Inklusion, $\ker(\varphi)^\circ \subseteq \operatorname{img}(\varphi^t)$. Sei dazu $\alpha \in \ker(\varphi)^\circ$, d.h. $\alpha \in V^*$ und $\alpha|_{\ker(\varphi)} = 0$. Nach Satz II.6.3 existiert ein lineares Funktional $\bar{\alpha} \colon V/\ker(\varphi) \to \mathbb{K}$, sodass $\bar{\alpha} \circ \pi = \alpha$, wobei $\pi \colon V \to V/\ker(\varphi)$ die kanonische Projektion bezeichnet. Nach Korollar II.6.6 induziert φ einen linearen Isomorphismus $\bar{\varphi} \colon V/\ker(\varphi) \xrightarrow{\cong} \operatorname{img}(\varphi)$ und es gilt $\bar{\varphi} \circ \pi = \varphi$. Nach Korollar III.3.25 lässt sich das lineare Funktional $\bar{\alpha} \circ \bar{\varphi}^{-1} \colon \operatorname{img}(\varphi) \to \mathbb{K}$ zu einem linearen Funktional $\beta \in W^*$ fortsetzen, d.h. $\beta|_{\operatorname{img}(\varphi)} = \bar{\alpha} \circ \bar{\varphi}^{-1}$. Nach Konstruktion gilt $\varphi^t(\beta) = \beta \circ \varphi = \beta|_{\operatorname{img}(\varphi)} \circ \varphi = (\bar{\alpha} \circ \bar{\varphi}^{-1}) \circ (\bar{\varphi} \circ \pi) = \bar{\alpha} \circ \pi = \alpha$, also $\alpha \in \operatorname{img}(\varphi^t)$. Damit ist auch $\operatorname{img}(\varphi^t) = \ker(\varphi)^\circ$ gezeigt. Insbesondere folgt

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ ist surjektiv} &\Leftrightarrow \operatorname{img}(\varphi) = W \\
&\Leftrightarrow \operatorname{img}(\varphi)^\circ = W^\circ && \text{nach Lemma III.4.7(j)} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{img}(\varphi)^\circ = \{0\} && \text{nach Lemma III.4.7(a)} \\
&\Leftrightarrow \ker(\varphi^t) = \{0\} && \text{da } \ker(\varphi^t) = \operatorname{img}(\varphi)^\circ \\
&\Leftrightarrow \varphi^t \text{ ist injektiv} && \text{nach Proposition II.3.22}
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ ist injektiv} &\Leftrightarrow \ker(\varphi) = \{0\} && \text{nach Proposition II.3.22} \\
&\Leftrightarrow \ker(\varphi)^\circ = \{0\}^\circ && \text{nach Lemma III.4.7(j)} \\
&\Leftrightarrow \ker(\varphi)^\circ = V^* && \text{nach Lemma III.4.7(a)} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{img}(\varphi^t) = V^* && \text{da } \operatorname{img}(\varphi^t) = \ker(\varphi)^\circ \\
&\Leftrightarrow \varphi^t \text{ ist surjektiv}
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis des Satzes vollständig. □

III.4.11. Beispiel. Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\psi_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi_A(x) = Ax$, die damit assoziierte lineare Abbildung und $W = \ker(\psi_A)$ der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$. Bezeichnet $\alpha_i \in M_{1\times n}(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^n)^*$ den i-ten Zeilenvektor von A, dann bildet $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ ein Erzeugendensystem von W°. Da die Spalten von A^t ein Erzeugendensystem von $\operatorname{img}(\psi_{A^t})$ bilden, folgt nämlich mit Bemerkung III.4.5, dass die Zeilen von A ein Erzeugendensystem von $\operatorname{img}((\psi_A)^t)$ darstellen, nach Satz III.4.10 gilt jedoch $W^\circ = \ker(\psi_A)^\circ = \operatorname{img}((\psi_A)^t)$.

III.4.12. Korollar. *Ist W ein Teilraum eines Vektorraums V, dann gilt:*

(a) Die kanonische Inklusion $\iota \colon W \to V$ induziert einen Isomorphismus

$$V^*/W^\circ \cong W^*, \quad [\alpha] \mapsto \alpha|_W = \alpha \circ \iota, \quad \alpha \in V^*.$$

Wir können V^*/W° daher in natürlicher Weise mit W^* identifizieren.

(b) Die kanonische Projektion $\pi\colon V \to V/W$ induziert einen Isomorphismus

$$(V/W)^* \cong W^\circ, \quad \beta \mapsto \beta \circ \pi, \quad \beta \in (V/W)^*.$$

Wir können daher W° in natürlicher Weise mit $(V/W)^*$ identifizieren.

Beweis. Ad (a): Die Inklusionsabbildung $\iota\colon W \to V$ ist offensichtlich injektiv, und $\operatorname{img}(\iota) = W$. Nach Satz III.4.10 ist daher die duale Abbildung $\iota^t\colon V^* \to W^*$ surjektiv, und $\ker(\iota^t) = \operatorname{img}(\iota)^\circ = W^\circ$. Nach Korollar II.6.6 induziert ι^t also einen Isomorphismus $V^*/W^\circ \cong W^*$, $[\alpha] \mapsto \iota^t(\alpha) = \alpha \circ \iota = \alpha|_W$, wobei $\alpha \in V^*$.

Ad (b): Nach Satz II.6.3 ist die kanonische Projektion $\pi\colon V \to V/W$ surjektiv, und $\ker(\pi) = W$. Nach Satz III.4.10 ist daher die duale Abbildung $\pi^t\colon (V/W)^* \to V^*$ injektiv, und $\operatorname{img}(\pi^t) = \ker(\pi)^\circ = W^\circ$. Somit liefert π^t einen Isomorphismus $(V/W)^* \cong W^\circ$, $\beta \mapsto \pi^t(\beta) = \beta \circ \pi$, wobei $\beta \in (V/W)^*$. □

Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v \in V$, dann ist die Abbildung

$$\mathrm{ev}_v\colon V^* \to \mathbb{K}, \quad \mathrm{ev}_v(\alpha) := \alpha(v),$$

linear, denn $\mathrm{ev}_v(\alpha_1+\alpha_2) = (\alpha_1+\alpha_2)(v) = \alpha_1(v)+\alpha_2(v) = \mathrm{ev}_v(\alpha_1)+\mathrm{ev}_v(\alpha_2)$ und $\mathrm{ev}_v(\lambda\alpha) = (\lambda\alpha)(v) = \lambda\alpha(v) = \lambda\,\mathrm{ev}_v(\alpha)$, für beliebige $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in V^*$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, vgl. Beispiel II.3.8. Somit ist $\mathrm{ev}_v \in (V^*)^*$. Der Vektorraum $(V^*)^*$ wird *Bidual* von V genannt und oft mit V^{**} bezeichnet. Die Zuordnung

$$\iota_V\colon V \to V^{**}, \quad \iota_V(v) := \mathrm{ev}_v,$$

ist ebenfalls linear, denn es gilt $\mathrm{ev}_{v_1+v_2}(\alpha) = \alpha(v_1+v_2) = \alpha(v_1)+\alpha(v_2) = \mathrm{ev}_{v_1}(\alpha)+\mathrm{ev}_{v_2}(\alpha) = (\mathrm{ev}_{v_1}+\mathrm{ev}_{v_2})(\alpha)$ und $\mathrm{ev}_{\lambda v}(\alpha) = \alpha(\lambda v) = \lambda\alpha(v) = \lambda\,\mathrm{ev}_v(\alpha) = (\lambda\,\mathrm{ev}_v)(\alpha)$ für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

III.4.13. Proposition. *Die oben besprochene kanonische lineare Abbildung*

$$\iota_V\colon V \to V^{**}, \quad \iota_V(v)(\alpha) := \alpha(v), \quad v \in V,\ \alpha \in V^*,$$

ist injektiv. Für jeden Teilraum W von V gilt $\iota(W) \subseteq W^{\circ\circ}$. Für jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to U$ gilt $\varphi^{tt} \circ \iota_V = \iota_U \circ \varphi$, wobei $\varphi^{tt}\colon V^{**} \to U^{**}$ die zu φ^t duale Abbildung bezeichnet, d.h. $\varphi^{tt}(\xi)(\beta) = \xi(\varphi^t(\beta))$, $\xi \in V^{**}$, $\beta \in U^*$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass ι_V injektiv ist. Sei dazu $0 \neq v \in V$. Nach Korollar III.3.28 existiert $\alpha \in V^*$ mit $\alpha(v) = 1$. Es gilt daher $\iota_V(v)(\alpha) = \alpha(v) = 1 \neq 0$, also $\iota_V(v) \neq 0$. Es folgt $\ker(\iota_V) = \{0\}$, also ist ι_V injektiv, siehe Proposition II.3.22.

Sei nun $W \subseteq V$ ein Teilraum, $w \in W$ und $\alpha \in W^\circ$, d.h. $\alpha \in V^*$ und $\alpha|_W = 0$. Dann folgt $\iota_V(w)(\alpha) = \alpha(w) = 0$. Da dies für alle $\alpha \in W^\circ$ gilt, folgt $\iota_V(w) \in W^{\circ\circ}$. Da dies für alle $w \in W$ richtig ist, erhalten wir $\iota_V(W) \subseteq W^{\circ\circ}$.

Sei schließlich $\varphi\colon V \to U$ linear, $v \in V$ und $\beta \in U^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\varphi^{tt} \circ \iota_V)(v)(\beta) &= \varphi^{tt}(\iota_V(v))(\beta) && \text{Definition der Komposition von Abb.}\\
&= \iota_V(v)(\varphi^t(\beta)) && \text{Definition von der dualen Abb. } \varphi^{tt}\\
&= \varphi^t(\beta)(v) && \text{Definition von } \iota_V\\
&= \beta(\varphi(v)) && \text{Definition von der dualen Abb. } \varphi^t\\
&= \iota_U(\varphi(v))(\beta) && \text{Definition von } \iota_U\\
&= (\iota_U \circ \varphi)(v)(\beta) && \text{Definition der Komposition von Abb.}
\end{aligned}$$

Da dies für beliebige $v \in V$ und $\beta \in U^*$ gilt, folgt $\varphi^{tt} \circ \iota_V = \iota_U \circ \varphi$. □

III.4.14. Bemerkung. Die Abbildung $\iota_V\colon V \to V^{**}$ ist i.A. nicht surjektiv.