IV. Endlich-dimensionale Vektorräume

Unter einem endlich-dimensionalen Vektorraum verstehen wir einen Vektorraum, der eine endliche Basis besitzt. Die entscheidende Beobachtung ist die Tatsache, dass in diesem Fall je zwei Basen aus gleich vielen Elementen bestehen müssen, siehe Korollar IV.1.5 unten. Dies ermöglich es jedem endlich-dimensionalen Vektorraum V eine Dimension, $\dim(V) \in \mathbb{N}_0$, zuzuordnen, nämlich die Anzahl der Elemente einer, und dann jeder, Basis von V.

Im ersten Teil dieses Kapitels werden wir die grundlegenden Eigenschaften dieses Dimensionsbegriffs zusammenstellen. Insbesondere werden wir sehen, dass jeder Teilraum W von $\mathbb{K}^n$ endlich-dimensional ist und daher von endlich-vielen linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird. In anderen Worten, jeder Teilraum lässt sich mit Hilfe einer Parameterdarstellung darstellen. Andererseits lässt sich jeder Teilraum W von $\mathbb{K}^n$ auch durch ein homogenes lineares Gleichungssystem beschreiben, wobei mindestens $n - \dim(W)$ viele Gleichungen notwendig sind. Anschließend werden wir uns dem rechnerischen Aspekt widmen und Algorithmen zur Lösung linearer Gleichungssysteme und zur Berechnung der Inversen einer Matrix besprechen. Im letzten Abschnitt werden wir lineare Abbildungen zwischen allgemeinen endlich-dimensionalen Vektorräumen, $\varphi\colon V \to W$, durch Matrizen beschreiben indem wir Basen der beiden Vektorräume fixieren.

IV.1. Dimension. Im vorangehenden Kapitel haben wir Basen stets als Teilmengen eines Vektorraums aufgefasst. Manchmal ist es jedoch zweckmäßig *geordnete* Basen zu betrachten. Dies sind Systeme von Vektoren $b_1, \dots, b_n$ die ein linear unabhängiges Erzeugendensystem bilden. Wir wollen damit beginnen diesen Begriff zu präzisieren.

Sei dazu V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Ein System von Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ wird *linear abhängig* genannt, falls $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ für gewisse Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, die nicht alle veschwinden. Das System $v_1, \dots, v_n$ heißt *linear unabhängig* wenn es nicht linear abhängig ist. In anderen Worten, die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn aus $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ stets $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ folgt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ paarweise verschieden sind und die Teilmenge $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig im Sinn von Abschnitt III.2 ist.

IV.1.1. Beispiel. Die Vektoren $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ sind linear abhängig in $\mathbb{R}^2$, aber $\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\}$ bildet eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

Ein System von Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ wird *Erzeugendensystem* von V genannt, falls $\langle v_1, \dots, v_n\rangle = V$ gilt, d.h. falls die Teilmenge $\{v_1, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V bildet, vgl. Abschnitt III.1. Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem $v_1, \dots, v_n$ von V wird als *(geordnete) Basis* von V bezeichnet. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ bilden also genau dann eine geordnete Basis von V, wenn sie paarweise verschieden sind und die Teilmenge $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis im Sinn von Abschnitt III.3 bildet. Aus Proposition III.3.2 erhalten wir sofort folgende Charakterisierung geordneter Basen:

IV.1.2. Proposition. *Für ein System von Vektoren* $b_1, \dots, b_n$ *eines* $\mathbb{K}$*-Vektorraums* V *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) Die Vektoren $b_1, \dots, b_n$ *bilden eine Basis von* V*.*
(b) Zu jedem $v \in V$ *existieren eindeutige Skalare* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$*, sodass* $v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$*.*
(c) Die Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{K}^n \to V, \qquad \phi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n,$$

ist ein linearer Isomorphismus.
(d) Ist W *ein* $\mathbb{K}$*-Vektorraum und* $w_1, \dots, w_n \in W$*, dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung* $\varphi\colon V \to W$*, sodass* $\varphi(b_i) = w_i$ *für alle* $i = 1, \dots, n$*.*

Aus Proposition III.3.14 erhalten wir auch:

IV.1.3. Proposition. *Ist* $\varphi\colon V \to W$ *linear und* $b_1, \dots, b_n$ *eine Basis von* V*, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) φ *ist ein Isomorphismus.*
(b) Für jede Basis $c_1, \dots, c_m$ *von* V *ist* $\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_m)$ *eine Basis von* W*.*
(c) $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)$ *ist eine Basis von* W*.*

Der Schlüssel zum Dimensionsbegriff ist folgendes Resultat.

IV.1.4. Satz (Austauschsatz von Steinitz). *Sei* $v_1, \dots, v_n$ *ein Erzeugendensystem eines Vektorraums* V*, und* $w_1, \dots, w_k$ *linear unabhängig in* V*. Dann gilt*

$$k \leq n$$

und, nach geeignetem Umnummerieren der Vektoren $v_1, \dots, v_n$*, bildet auch*

$$w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n$$

ein Erzeugendensystem von V*.*

Beweis. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach k. Für $k = 0$ ist die Aussage trivial. Für den Induktionsschritt sei nun $k \geq 1$ und die Aussage für $k - 1$ bereits gezeigt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt daher $k - 1 \leq n$ und, nach geeignetem Umnummerieren der Vektoren $v_1, \dots, v_n$ bildet

$$w_1, \dots, w_{k-1}, v_k, \dots, v_n \tag{IV.1}$$

ein Erzeugendensystem von V. Daher existieren Skalare $\lambda_i \in \mathbb{K}$, sodass

$$w_k = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{k-1} w_{k-1} + \lambda_k v_k + \cdots + \lambda_n v_n. \tag{IV.2}$$

Da das System $w_1, \dots, w_k$ linear unabhängig ist folgt $k \leq n$ und mindestens einer der Skalare $\lambda_k, \dots, \lambda_n$ muss verschieden von 0 sein. Andernfalls erhielten wir die Relation $w_k = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{k-1} w_{k-1}$, was der linearen Unabhängigkeit des Systems $w_1, \ldots, w_k$ widerspräche. Durch Umnummerieren der Vektoren v_i können wir also $\lambda_k \neq 0$ erreichen. Aus (IV.2) erhalten wir daher

$$v_k = -\tfrac{\lambda_1}{\lambda_k} w_1 - \cdots - \tfrac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} w_{k-1} + \tfrac{1}{\lambda_k} w_k - \tfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} v_{k+1} - \cdots - \tfrac{\lambda_n}{\lambda_k} v_n.$$

Dies zeigt, dass der Vektor v_k im Erzeugniss des Systems

$$w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n \tag{IV.3}$$

liegt. Mit (IV.1) ist daher auch (IV.3) ein Erzeugendensystem für V. □

IV.1.5. Korollar. *Für einen Vektorraum V sind äquivalent:*

(a) V besitzt eine endliche Basis.
(b) V ist endlich erzeugt, d.h. besitzt ein endliches Erzeugendensystem.
(c) Jede linear unabhängige Teilmenge von V ist endlich.
(d) Jede Basis von V ist endlich.

In diesem Fall haben je zwei Basen von V gleich viele Elementen.

Beweis. Die Implikation (a)⇒(b) ist trivial. Die Implikation (b)⇒(c) folgt aus Satz IV.1.4. Die Implikation (c)⇒(d) ist trivial. Die Implikation (d)⇒(a) folgt aus Korollar III.3.23(a). Damit ist die Äquivalenz der vier Aussagen gezeigt. Sind $b_1, \ldots, b_m$ und $b'_1, \ldots, b'_n$ zwei endliche Basen von V, dann erhalten wir aus Satz IV.1.4 nun $m \leq n$ und $n \leq m$, also $n = m$, d.h. die Basen bestehen aus gleich vielen Vektoren. □

IV.1.6. Definition (Dimension). Ein Vektorraum V wird *endlich dimensional* genannt, wenn er eine endliche Basis besitzt. In diesem Fall existiert eine eindeutige Zahl $n \in \mathbb{N}_0$, sodass jede Basis von V aus genau n Elementen besteht, siehe Korollar IV.1.5. Diese Zahl n wird als *Dimension* von V bezeichnet und mit $\dim(V)$ notiert. Wir sagen auch V ist ein n-dimensionaler Vektorraum. Besitzt V keine endliche Basis dann wird V *unendlich dimensional* genannt und wir schreiben $\dim(V) = \infty$.

IV.1.7. Bemerkung. Ein Vektorraum V ist genau dann 0-dimensional, wenn die leere Menge eine Basis von V bildet. Dies ist genau dann der Fall, wenn V nur aus dem Nullvektor besteht, d.h. $V = \{0\}$.

IV.1.8. Beispiel. Es gilt $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, denn nach Beispiel III.3.5 bilden die Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$, die aus genau n Vektoren besteht.

IV.1.9. Beispiel. Es ist $\dim(\mathbb{K}[z]_{\leq n}) = n+1$, denn die Monome $1, z, z^2, \ldots, z^n$ bilden eine Basis von $\mathbb{K}[z]_{\leq n}$, die aus genau $n+1$ Elementen besteht.

IV.1.10. Beispiel. Es gilt $\dim(M_{m\times n}(\mathbb{K})) = mn$, denn die Matrizen $E_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, bilden eine Basis von $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, die aus genau mn vielen

Elementen besteht. Dabei bezeichnet

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

jene $(m \times n)$-Matrix, deren einzige nicht verschwindende Eintragungen eine Eins in der i-ten Zeile und j-ten Spalte bildet. In anderen Worten: $(E_{i,j})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$.

IV.1.11. Beispiel. Der Vektorraum der Polynome, $\mathbb{K}[z]$, ist unendlich-dimensional, denn die linear unabhängige Teilmenge der Monome, $\{1, z, z^2, z^3, \dots\}$, hat unendlich viele Elemente.

IV.1.12. Beispiel. Betrachten wir $\mathbb{C}$ als komplexen Vektorraum, so ist dieser ein-dimensional, denn 1 bildet eine Basis. Wir können $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ aber auch als zwei-dimensionalen reellen Vektorraum auffassen, dann bildet etwa $1, \mathbf{i}$ eine Basis. Es gilt daher $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ und $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$, siehe auch Aufgabe 75.

IV.1.13. Bemerkung. Sind V und W zwei isomorphe Vektorräume und ist V endlich dimensional, dann ist auch W endlich-dimensional und es gilt $\dim(V) = \dim(W)$. Ist nämlich $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V und $\varphi \colon V \to W$ ein Isomorphismus, dann bildet $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)$ eine Basis von W, siehe Proposition IV.1.3.

Das folgende Resultat zeigt, dass es über jedem Körper $\mathbb{K}$ im Wesentlichen nur einen n-dimensionalen Vektorraum gibt, nämlich $\mathbb{K}^n$.

IV.1.14. Korollar. *Zwei endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension haben. Insbesondere gilt $\mathbb{K}^n \cong \mathbb{K}^m$ genau dann, wenn $n = m$. Jeder endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist zu $\mathbb{K}^n$ isomorph, wobei $n = \dim(V)$.*

Beweis. In Bemerkung IV.1.13 haben wir bereits beobachtet, dass isomorphe endlich-dimensionale Vektorräume gleiche Dimension haben müssen. Umgekehrt folgt aus Bemerkung III.3.11, dass endlich-dimensionale Vektorräume gleicher Dimension isomorph sind. □

IV.1.15. Bemerkung. Sind $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n \times m}(\mathbb{K})$ zwei Matrizen, sodass $AB = I_m$ und $BA = I_n$, dann muss $n = m$ gelten. Eine Matrix kann also nur dann invertierbar sein, wenn sie quadratisch ist. Aus den beiden Gleichungen folgt nämlich, dass die assoziierten linearen Abbildungen $\psi_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ und $\psi_B \colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ zueinander inverse Isomorphismen darstellen, d.h. $\psi_A \circ \psi_B = \psi_{AB} = \psi_{I_m} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^m}$ und $\psi_B \circ \psi_A = \psi_{BA} = \psi_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$, vgl. Satz II.4.4, die Relation $n = m$ folgt daher aus Korollar IV.1.14.

IV.1.16. Korollar. *Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum dann gilt:*

(a) Jede linear unabhängige Teilmenge von V hat höchstens n verschiedene Elemente. Sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig in V, dann bilden diese Vektoren schon eine Basis von V.

(b) Jedes Erzeugendensystem von V besitzt mindestens n verschiedene Elemente. Ist $v_1, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V, dann bilden diese Vektoren schon eine Basis von V.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V, das aus genau n Vektoren besteht. Nach Satz IV.1.4 kann eine linear unabhängige Teilmenge von V höchstens n Elementen haben, und jedes Erzeugendensystem von V muss aus mindestens n Vektoren bestehen. Die restlichen Behauptungen folgen aus Proposition III.3.19. □

Daraus erhalten wir auch:

IV.1.17. Korollar. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $v_1, \dots, v_n$ ein System von n Vektoren in V. Dann sind äquivalent:*

(a) $v_1, \dots, v_n$ ist eine Basis von V.
(b) $v_1, \dots, v_n$ ist linear unabhängig in V.
(c) $v_1, \dots, v_n$ ist ein Erzeugendensystem von V.

IV.1.18. Bemerkung. Nach Bemerkung III.3.15 ist eine quadratische Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ genau dann invertierbar, wenn ihre Spaltenvektoren eine Basis von $\mathbb{K}^n$ bilden. Nach Korollar IV.1.17 ist dies genau dann der Fall, wenn die Spaltenvektoren linear unabhängig sind. Ebenso ist A genau dann invertierbar, wenn die ihre Spaltenvektoren ein Erzeugendensystem von $\mathbb{K}^n$ bilden.

IV.1.19. Bemerkung. Ein Vektorraum V hat genau dann Dimension n, wenn es n linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_n$ in V gibt und je $n+1$ Vektoren in V linear abhängig sind. Auch hat V genau dann Dimension n, wenn ein Erzeugendensystem von V mit n Vektoren existiert, und je $n-1$ Vektoren V nicht erzeugen. Dies folgt aus Korollar IV.1.16 und Proposition III.3.19, vgl. Aufgabe 67.

IV.1.20. Korollar. *Ist W ein Teilraum eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, dann ist auch W endlich-dimensional und es gilt*

$$\dim(W) \leq \dim(V).$$

Ist darüber hinaus $\dim(W) = \dim(V)$, dann folgt schon $W = V$.

Beweis. Nach Korollar IV.1.16(a) besteht jede linear unabhängige Teilmenge von W aus höchstens $\dim(V)$ vielen Elementen. Es gibt daher eine größte Zahl $k \in \mathbb{N}_0$, sodass linear unabhängige Vektoren $w_1, \dots, w_k$ in W existieren. Nach Konstruktion bilden die Vektoren $w_1, \dots, w_k$ eine maximal linear unabhängige Teilmenge von W und daher eine Basis von W, siehe Proposition III.3.19. Somit ist W endlich dimensional, und es gilt $\dim(W) = k \leq \dim(V)$. Gilt darüber hinaus $\dim(W) = \dim(V)$, dann ist $w_1, \dots, w_k$ auch Basis von V, siehe Korollar IV.1.16(a), und daher $V = \langle w_1, \dots, w_k \rangle = W$. $\square$

IV.1.21. Bemerkung (Teilräume von $\mathbb{K}^n$). Nach Korollar IV.1.20 ist jeder Teilraum $W \subseteq \mathbb{K}^n$ endlich-dimensional und es gilt $0 \leq \dim(W) \leq n$. Es existieren daher linear unabhängige Vektoren $w_1, \dots, w_m \in W$, sodass $W = \langle w_1, \dots, w_m \rangle$, wobei $m = \dim(W)$. Diese Vektoren bilden eine Basis von W und es gilt $W \cong \mathbb{K}^m$. Jeder Teilraum von $\mathbb{K}^n$ ist also zu einem $\mathbb{K}^m$ isomorph, wobei $0 \leq m \leq n$.

IV.1.22. Beispiel (Teilräume von $\mathbb{K}^2$). Aus Bemerkung IV.1.21 folgt, dass jeder Teilraum W von $\mathbb{K}^2$ von der Form

$$W = \{0\}, \quad W = \langle w \rangle, \quad \text{oder} \quad W = \mathbb{K}^2$$

ist, wobei $0 \neq w \in \mathbb{K}^2$. In Beispiel II.2.9 haben wir dies schon auf elementare Weise hergeleitet.

IV.1.23. Beispiel (Teilräume von $\mathbb{K}^3$). Bemerkung IV.1.21 folgt, dass jeder Teilraum W von $\mathbb{K}^3$ von der Form

$$W = \{0\}, \quad W = \langle w \rangle, \quad W = \langle w_1, w_2 \rangle, \quad \text{oder} \quad W = \mathbb{K}^3$$

ist, wobei $0 \neq w \in \mathbb{K}^3$ und w_1, w_2 linear unabhängig in $\mathbb{K}^3$ sind. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ entsprechen die nicht-trivialen Fälle also genau den Geraden bzw. Ebenen durch den Koordinatenursprung.

IV.2. Dimensionsformeln. Wir wollen in diesem Abschnitt Dimensionsformel für Summen und Durchschnitte von Teilräumen, Kern und Bild linearer Abbildungen, Dualräumen, Quotientenräumen und Annihilatoren herleiten, und einige Anwendungen besprechen.

IV.2.1. Satz (Dimension von Summen und Durchschnitten). *Seien W_1 und W_2 zwei Teilräume eines Vektorraums V. Es ist $W_1 + W_2$ genau dann endlich-dimensional, wenn W_1 und W_2 beide endlich-dimensional sind. In diesem Fall ist auch $W_1 \cap W_2$ endlich-dimensional und es gilt*

$$\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

Beweis. Ist $W_1 + W_2$ endlich-dimensional, dann gilt dies auch für die Teilräume W_1, W_2 und $W_1 \cap W_2$ von $W_1 + W_2$, siehe Korollar IV.1.20. Seien nun umgekehrt W_1 und W_2 endlich-dimensional. Nach Proposition III.3.29 existieren daher endliche Basen B_1 von W_1 und B_2 von W_2, sodass $B_1 \cap B_2$ eine Basis von $W_1 \cap W_2$ bildet und $B_1 \cup B_2$ eine Basis von $W_1 + W_2$ ist. Es gilt daher:

$$\begin{aligned} \dim(W_1) &= \sharp B_1 \\ \dim(W_2) &= \sharp B_2 \\ \dim(W_1 \cap W_2) &= \sharp(B_1 \cap B_2) \\ \dim(W_1 + W_2) &= \sharp(B_1 \cup B_2) \end{aligned}$$

wobei $\sharp X$ die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge X bezeichnet. Aus der evidenten Formel

$$\sharp(B_1 \cap B_2) + \sharp(B_1 \cup B_2) = \sharp B_1 + \sharp B_2$$

erhalten wir den Satz. □

IV.2.2. KOROLLAR (Dimension direkter Summen). *Seien W_1 und W_2 zwei komplementäre Teilräume eines Vektorraums V, d.h. $V = W_1 \oplus W_2$. Es ist V genau dann endlich-dimensional, wenn W_1 und W_2 beide endlich-dimensional sind, und in diesem Fall gilt*

$$\dim(V) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

BEWEIS. Nach Voraussetzung gilt $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ und $W_1 + W_2 = V$. Das Korollar folgt daher sofort aus Satz IV.2.1. □

IV.2.3. KOROLLAR. *Seien W_1 und W_2 zwei Teilräume eines endlich dimensionalen Vektorraums V und $\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(V)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
(a) $W_1 \oplus W_2 = V$.
(b) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.
(c) $W_1 + W_2 = V$

BEWEIS. Nach Satz IV.2.1 ist $\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = \dim(V)$, also

$$\dim(W_1 \cap W_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dim(W_1 + W_2) = \dim(V).$$

Mit Korollar IV.1.20 und Bemerkung IV.1.7 folgt daher die Äquivalenz (b)⇔(c). Die verbleibenden Behauptungen sind nun trivial. □

IV.2.4. BEISPIEL. Ist E ein 2-dimensionaler Teilraum von $\mathbb{K}^3$ und ist L ein 1-dimensionaler Teilraum von $\mathbb{K}^3$, der nicht in E enthalten ist, dann gilt schon

$$E \oplus L = \mathbb{K}^3.$$

Nach Voraussetzung ist nämlich $E \cap L \subsetneq L$, also $\dim(E \cap L) < \dim(L) = 1$ nach Korollar IV.1.20, folglich $\dim(E \cap L) = 0$ und daher $E \cap L = \{0\}$. Die Behauptung folgt somit aus Korollar IV.2.3.

IV.2.5. BEMERKUNG. Sind W_1 und W_2 zwei Teilräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, sodass

$$\dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(V),$$

dann muss schon $W_1 + W_2 = V$ und

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(V)$$

gelten. Aus Satz IV.2.1 folgt nämlich

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) \geq \dim(V),$$

also $W_1 + W_2 = V$ nach Korollar IV.1.20. Die Formel für die Dimension des Durchschnitts folgt nun aus Satz IV.2.1.

IV.2.6. Beispiel. Sind E_1 und E_2 zwei verschiedene 2-dimensionale Teilräume von $\mathbb{K}^3$, dann gilt

$$E_1 + E_2 = \mathbb{K}^3 \quad \text{und} \quad \dim(E_1 \cap E_2) = 1.$$

Nach Voraussetzung ist nämlich $E_1 \cap E_2 \subsetneq E_1$ oder $E_1 \cap E_2 \subsetneq E_2$, jedenfalls folgt $\dim(E_1 \cap E_2) < 2 = \dim(E_1) = \dim(E_2)$ nach Korollar IV.1.20, und somit $\dim(E_1 \cap E_2) \leq 1 = 2 + 2 - 3 = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(\mathbb{K}^3)$. Die Behauptung folgt daher aus Bemerkung IV.2.5. Für den Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bedeutet dies, dass zwei verschiedene Ebenen durch den Koordinatenursprung ganz $\mathbb{R}^3$ erzeugen und ihr Durchschnitt eine Gerade bildet. Siehe auch Aufgabe 71.

IV.2.7. Bemerkung. Sind W_1 und W_2 zwei Teilräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, sodass

$$\dim(W_1 + W_2) \geq \dim(W_1) + \dim(W_2),$$

dann muss schon $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ und

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$$

gelten. Aus Satz IV.2.1 folgt nämlich

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2) \leq 0,$$

also $\dim(W_1 + W_2) = 0$ und daher $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Die Formel für die Dimension der Summe folgt nun aus Satz IV.2.1.

IV.2.8. Korollar (Dimension eines Quotienten). *Sei W ein Teilraum eines Vektorraums V. Es ist V genau dann endlich-dimensional, wenn W und V/W beide endlich-dimensional sind, und in diesem Fall gilt*

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(V/W).$$

Beweis. Nach Korollar III.3.26 existiert ein zu W komplementärer Teilraum W' in V, d.h. $V = W \oplus W'$. Nach Korollar II.6.7 gilt $W' \cong V/W$. Insbesondere ist W' genau dann endlich-dimensional, wenn V/W endlich-dimensional ist, und in diesem Fall gilt $\dim(W') = \dim(V/W)$. Das Korollar folgt daher aus Korollar IV.2.2. □

IV.2.9. Korollar (Dimension von Kern und Bild). *Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Es ist V genau dann endlich-dimensional, wenn* $\ker(\varphi)$ *und* $\operatorname{img}(\varphi)$ *beide endlich-dimensional sind, und in diesem Fall gilt*

$$\dim(V) = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\operatorname{img}(\varphi)).$$

Beweis. Nach Korollar II.6.6 gilt $V/\ker(\varphi) \cong \operatorname{img}(\varphi)$. Insbesondere ist also $\operatorname{img}(\varphi)$ genau dann endlich-dimensional, wenn $V/\ker(\varphi)$ endlich-dimensional ist, und in diesem Fall gilt $\dim(V/\ker(\varphi)) = \dim(\operatorname{img}(\varphi))$. Das Korollar folgt daher aus Korollar IV.2.8. □

IV.2.10. Beispiel (Hyperebenen). Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\alpha\colon V \to \mathbb{K}$ ein nicht-triviales lineares Funktional, $\alpha \neq 0$. Dann folgt $\{0\} \subsetneq \operatorname{img}(\alpha) \subseteq \mathbb{K}$, aus Dimensionsgründen gilt daher $\operatorname{img}(\alpha) = \mathbb{K}$, also $\dim(\operatorname{img}(\alpha)) = 1$. Mit Korollar IV.2.9 folgt $\dim(\ker(\alpha)) = n - 1$. Teilräume der Form $\ker(\alpha)$ mit $0 \neq \alpha \in V^*$ werden *Hyperebenen* genannt. Dies sind also genau jene Teilräume, die sich durch *eine* nicht-triviale lineare Gleichung beschreiben lassen. In $\mathbb{R}^3$ entsprechen diese genau den Ebenen durch den Koordinatenursprung.

IV.2.11. Korollar. *Ist $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen gleicher Dimension,* $\dim(V) = \dim(W)$*, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
(a) φ ist injektiv.
(b) φ ist surjektiv.
(c) φ ist ein linearer Isomorphismus.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ ist injektiv} &\Leftrightarrow \ker(\varphi) = \{0\} && \text{nach Proposition II.3.22}\\
&\Leftrightarrow \dim(\ker(\varphi)) = 0 && \text{nach Bemerkung IV.1.7}\\
&\Leftrightarrow \dim(\operatorname{img}(\varphi)) = \dim(V) && \text{nach Korollar IV.2.9}\\
&\Leftrightarrow \dim(\operatorname{img}(\varphi)) = \dim(W) && \text{da } \dim(V) = \dim(W)\\
&\Leftrightarrow \operatorname{img}(\varphi) = W && \text{nach Korollar IV.1.20}\\
&\Leftrightarrow \varphi \text{ ist surjektiv}
\end{aligned}$$

Dies zeigt (a)$\Leftrightarrow$(b). Die verbleibenden Behauptungen folgen sofort aus Bemerkung II.3.11. □

IV.2.12. Bemerkung. Eine injektive lineare Abbildung zwischen unendlich-dimensionalen Vektorräumen wird i.A. nicht surjektiv sein. Etwa ist die lineare Abbildung $\mathbb{K}[z] \to \mathbb{K}[z]$, $p \mapsto zp$, injektiv aber nicht surjektiv. Auch muss eine surjektive lineare Abbildung zwischen unendlich-dimensionalen Vektorräumen nicht injektiv sein. Zum Beispiel ist die lineare Abbildung $\mathbb{K}[z] \to \mathbb{K}[z]$, $a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots \mapsto a_1 + a_2z + a_3z^2 + \cdots$, surjektiv aber nicht injektiv. Auf die Voraussetzung in Korollar IV.2.11 kann daher nicht verzichtet werden.

IV.2.13. Korollar. *Seien $A, A' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zwei quadratische Matrizen.*
(a) Gilt $A'A = I_n$, dann ist A invertierbar mit Inverser $A^{-1} = A'$.
(b) Gilt $AA' = I_n$, dann ist A invertierbar mit Inverser $A^{-1} = A'$.

Beweis. Wir zeigen nur die erste Behauptung, die zweite lässt sich völlig analog beweisen. Seien also $A, A' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und $A'A = I_n$. Betrachten wir die assoziierten linearen Abbildungen $\psi_A, \psi_{A'}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, dann folgt $\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} = \psi_{I_n} = \psi_{A'A} = \psi_{A'} \circ \psi_A$, siehe Satz II.4.4. Die lineare Abbildung $\psi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ist daher injektiv, und somit ein Isomorphismus, siehe Korollar IV.2.11. Nach Korollar II.4.6 ist A also invertierbar. □

IV.2.14. SATZ (Dimension von $L(V,W)$). *Sind V und W zwei endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, dann ist auch $L(V,W)$ endlich-dimensional und es gilt*

$$\dim(L(V,W)) = \dim(V) \cdot \dim(W).$$

PROOF. Es existieren Isomorphismen $\phi\colon \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cong} V$ und $\psi\colon \mathbb{K}^m \xrightarrow{\cong} W$, wobei $n = \dim(V)$ und $m = \dim(W)$. Weiters ist die Zuordnung

$$L(V,W) \xrightarrow{\cong} L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), \quad \rho \mapsto \psi^{-1} \circ \rho \circ \phi,$$

ein linearer Isomorphismus mit Umkehrabbildung $\sigma \mapsto \psi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$. Die Linearität dieser Abbildung folgt aus Proposition II.3.18, denn

$$\psi^{-1} \circ (\rho_1 + \rho_2) \circ \phi = \psi^{-1} \circ \rho_1 \circ \phi \; + \; \psi^{-1} \circ \rho_2 \circ \phi$$

und $\psi^{-1} \circ (\lambda\rho) \circ \phi = \lambda(\psi^{-1} \circ \rho \circ \phi)$, für beliebige $\rho, \rho_1, \rho_2 \in L(V,W)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Da $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \cong M_{m\times n}(\mathbb{K})$, siehe Satz II.4.4, erhalten wir $L(V,W) \cong M_{m\times n}(\mathbb{K})$, das Korollar folgt somit aus Beispiel IV.1.10, $\dim(M_{m\times n}(\mathbb{K})) = mn$. □

IV.2.15. KOROLLAR. *Ein Vektorraum V ist genau dann endlich-dimensional, wenn sein Dualraum V^* endlich-dimensional ist. In diesem Fall gilt*

$$\dim(V) = \dim(V^*)$$

und die kanonische Abbildung $\iota\colon V \to V^{**}$ aus Proposition III.4.13 ist ein Isomorphismus.

BEWEIS. Ist V endlich-dimensional, dann folgt mit Satz IV.2.14, dass auch $V^* = L(V,\mathbb{K})$ endlich-dimensional ist und

$$\dim(V^*) = \dim(L(V,\mathbb{K})) = \dim(V) \cdot \dim(\mathbb{K}) = \dim(V) \cdot 1 = \dim(V).$$

Nach Proposition III.4.13 ist die Abbildung $\iota\colon V \to V^{**}$ injektiv, aus Korollar IV.2.11 folgt daher, dass ι ein Isomorphismus ist, denn $\dim(V^{**}) = \dim(V^*) = \dim(V)$. Sei nun umgekehrt V^* endlich dimensional. Nach dem eben gezeigten ist daher auch V^{**} endlich-dimensional. Nach Proposition III.4.13 ist die kanonische lineare Abbildung $\iota\colon V \to V^{**}$ injektiv. Somit ist V zu dem Teilraum $\operatorname{img}(\iota)$ von V^{**} isomorph. Aus Korollar IV.1.20 folgt daher, dass auch V endlich-dimensional sein muss. □

IV.2.16. KOROLLAR (Dimension des Annihilators). *Sei W ein Teilraum eines Vektorraums V. Es ist W° genau dann endlich-dimensional, wenn V/W endlich-dimensional ist, und in diesem Fall gilt*

$$\dim(W^\circ) = \dim(V/W).$$

BEWEIS. Dies folgt aus Korollar IV.2.15, denn es gilt $W^\circ \cong (V/W)^*$, siehe Korollar III.4.12(b). □

IV.2.17. Satz (Teilräume und Gleichungssyteme). *Sei W ein Teilraum eines Vektorraums V, sodass V/W endlich-dimensional ist. Eine Teilmenge $A \subseteq V^*$ ist genau dann ein Erzeugendensystem von W°, wenn $W = \bigcap_{\alpha \in A} \ker(\alpha)$ gilt. Es gibt daher $k = \dim(V/W)$ viele Funktionale $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V^*$, sodass*

$$W = \bigcap_{i=1}^{k} \ker(\alpha_i),$$

d.h. W ist Durchschnitt von k Hyperebenen, vgl. Beispiel IV.2.10. Jedes Funktional $\alpha \in V^*$, das auf W verschwindet, $\alpha|_W = 0$, ist eine Linearkombination von $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Mit weniger als k linearen Funktionalen lässt sich W nicht beschreiben.

Beweis. In Bemerkung III.4.8 haben wir bereits festgehalten, dass für jedes Erzeugendensystem A von W° auch $W = \bigcap_{\alpha \in A} \ker(\alpha)$ gelten muss. Sei nun umgekehrt $W = \bigcap_{\alpha \in A} \ker(\alpha)$. Nach Korollar IV.2.16 ist W° endlich-dimensional, also ist auch der Teilraum $\langle A \rangle$ endlich-dimensional, es existieren daher endlich viele Funktionale $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in A$, die eine Basis von $\langle A \rangle$ bilden. Wie in Bemerkung III.4.8 folgt

$$W = \bigcap_{\alpha \in A} \ker(\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \langle A \rangle} \ker(\alpha) = \bigcap_{i=1}^{l} \ker(\alpha_i),$$

denn $\langle A \rangle = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_l \rangle$. Zusammen definieren die Funktionale $\alpha_i \colon V \to \mathbb{K}$ eine lineare Abbildung $\varphi \colon V \to \mathbb{K}^l$, sodass $W = \ker(\varphi)$. Wir erhalten $V/W \cong \operatorname{img}(\varphi) \subseteq \mathbb{K}^l$, also

$$\dim(W^\circ) = \dim(V/W) = \dim(\operatorname{img}(\varphi)) \leq \dim(\mathbb{K}^l) = l.$$

Aus Korollar IV.1.16(a) folgt daher, dass $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ eine Basis von W° sein muss, denn $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ sind linear unabhängig in W°. Somit enthält A ein Erzeugendensystem von W° und muss daher selbst ein Erzeugendensystem von W° sein. Die verbleibenden Aussagen folgen nun aus Korollar IV.2.16. □

IV.2.18. Bemerkung (Teilräume von $\mathbb{K}^n$ und Gleichungssysteme). Sei W ein Teilraum von $\mathbb{K}^n$ und $k = n - \dim(W)$. Dann existiert ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

sodass W mit der Lösungsmenge dieses Systems übereinstimmt. Dies folgt aus Satz IV.2.17, denn $\dim(\mathbb{K}^n/W) = \dim(\mathbb{K}^n) - \dim(W) = k$. Jeder Teilraum von $\mathbb{K}^n$ lässt sich daher durch ein Gleichungssytem beschreiben. Fassen wir die Koeffizienten a_{ij} zu einer Matrix $A \in M_{k \times n}(\mathbb{K})$ zusammen, dann gilt also $W = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$. Weniger als k Gleichungen reichen nicht aus um W darzustellen, auch dies folgt aus Satz IV.2.17.

IV.2.19. Definition (Rang linearer Abbildungen). Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ hat *endlichen Rang* wenn ihr Bild, $\operatorname{img}(\varphi)$, endlich-dimensional ist. In diesem Fall wird die Zahl

$$\operatorname{rank}(\varphi) := \dim(\operatorname{img}(\varphi))$$

als *Rang* der linearen Abbildung φ bezeichnet.

IV.2.20. Satz (Rang der dualen Abbildung). *Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ hat genau dann endlichen Rang, wenn ihre duale Abbildung $\varphi^t\colon W^* \to V^*$ endlichen Rang hat, und in diesem Fall gilt*

$$\operatorname{rank}(\varphi^t) = \operatorname{rank}(\varphi).$$

Beweis. Aus Satz III.4.10, Korollar III.4.12(b) und Korollar II.6.6 erhalten wir Isomorphismen

$$\operatorname{img}(\varphi^t) = \ker(\varphi)^\circ \cong (V/\ker(\varphi))^* \cong \operatorname{img}(\varphi)^*.$$

Insbesondere ist $\operatorname{img}(\varphi^t)$ genau dann endlich-dimensional, wenn $\operatorname{img}(\varphi)^*$ endlich-dimensional ist, und in diesem Fall gilt $\dim(\operatorname{img}(\varphi^t)) = \dim(\operatorname{img}(\varphi)^*)$. Der Satz folgt daher aus Korollar IV.2.15. $\square$

IV.2.21. Bemerkung. Jeder komplexe Vektorraum V kann auch als reeller Vektorraum aufgefasst werden, indem wir die Skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times V \to V$ zu $\mathbb{R} \times V \to V$ einschränken. Wir werden diesen reellen Vektorraum wird mit $V^\mathbb{R}$ bezeichnen, er wird der dem komplexen Vektorraum V zugrundeliegende reelle Vektorraum genannt. Ist $b_1, \dots, b_n$ eine Basis des komplexen Vektorraums V, dann bildet

$$b_1, \mathbf{i}b_1, b_2, \mathbf{i}b_2, \dots, b_n, \mathbf{i}b_n$$

eine Basis des zugrundeliegenden reellen Vektorraums $V^\mathbb{R}$, vgl. Aufgabe 76. Mit V ist daher auch $V^\mathbb{R}$ endlich-dimensional und es gilt

$$\dim_\mathbb{R}(V^\mathbb{R}) = 2\dim_\mathbb{C}(V).$$

IV.2.22. Bemerkung. Sei V ein reeller Vektorraum. Mit den Operationen

$$(V \times V) \times (V \times V) \xrightarrow{+} V \times V, \qquad (v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2),$$
$$\mathbb{C} \times (V \times V) \xrightarrow{\cdot} V \times V, \qquad (a + b\mathbf{i})(v, w) := (av - bw, bv + aw),$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$, wird $V \times V$ zu einem komplexen Vektorraum, vgl. Aufgabe 77. Wir bezeichnen diesen komplexen Vektorraum mit $V^\mathbb{C}$, er wird die *Komplexifizierung* von V genannt. Wir fassen V als Teilmenge von $V^\mathbb{C}$ auf, $v \mapsto (v, 0)$. Jedes Element von $V^\mathbb{C}$ lässt sich daher in der Form $v + \mathbf{i}w$ schreiben, für eindeutig bestimmte $v, w \in V$. In dieser Darstellung sehen Addition und Skalarmultiplikation vertrauter aus:

$$(v_1 + \mathbf{i}w_1) + (v_2 + \mathbf{i}w_2) = (v_1 + v_2) + \mathbf{i}(w_1 + w_2)$$
$$(a + b\mathbf{i})(v + \mathbf{i}w) = av - bw + \mathbf{i}(aw + bv)$$