Ist $b_1, \dots, b_n$ eine Basis des reellen Vektorraums V, dann bildet $b_1, \dots, b_n$ auch eine Basis des komplexen Vektorraums $V^{\mathbb{C}}$. Mit V ist daher auch $V^{\mathbb{C}}$ endlich-dimensional und es gilt

$$\dim_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}) = \dim_{\mathbb{R}}(V).$$

IV.2.23. Proposition. *Seien $\phi\colon V' \xrightarrow{\cong} V$ und $\psi\colon W \xrightarrow{\cong} W'$ zwei lineare Isomorphismen. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ hat genau dann endlichen Rang, wenn $\psi \circ \varphi \circ \phi\colon V' \to W'$ endlichen Rang hat und in diesem Fall gilt*

$$\operatorname{rank}(\psi \circ \varphi \circ \phi) = \operatorname{rank}(\varphi).$$

Beweis. Da ϕ surjektiv ist, gilt $\phi(V') = V$ und somit

$$\operatorname{img}(\psi \circ \varphi \circ \phi) = (\psi \circ \varphi \circ \phi)(V') = \psi(\varphi(\phi(V'))) = \psi(\varphi(V)) = \psi(\operatorname{img}(\varphi)).$$

Wegen der Injektivität von ψ liefert die Einschränkung einen Isomorphismus

$$\psi|_{\operatorname{img}(\varphi)}\colon \operatorname{img}(\varphi) \xrightarrow{\cong} \psi(\operatorname{img}(\varphi)).$$

Zusammen folgt $\operatorname{img}(\psi \circ \varphi \circ \phi) \cong \operatorname{img}(\varphi)$, also $\operatorname{rank}(\psi \circ \varphi \circ \phi) = \operatorname{rank}(\varphi)$. □

IV.3. Rang von Matrizen. Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ eine Matrix und

$$\psi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \qquad \psi_A(x) = Ax,$$

die damit assoziierte lineare Abbildung. Der Teilraum

$$L := \ker(\psi_A) \subseteq \mathbb{K}^n \tag{IV.4}$$

ist daher genau der *Lösungsraum* des homogenen Systems $Ax = 0$. Der von den Spalten einer Matrix aufgespannte Teilraum wird ihr *Spaltenraum* genannt. Bezeichnen wir die Spalten mit $A = (a_1|\cdots|a_n)$, so stimmt der Spaltenraum,

$$W := \operatorname{img}(\psi_A) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \subseteq \mathbb{K}^m, \tag{IV.5}$$

also mit dem Teilraum jener $y \in \mathbb{K}^m$ überein, für die das Gleichungssystem $Ax = y$ eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ hat. Unter dem *Zeilenraum* einer Matrix verstehen wir den von den Zeilen aufgespannten Teilraum. Wir fassen die Zeilenvektoren der Matrix A als Elemente des Dualraums, $(\mathbb{K}^n)^* = L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \cong M_{1\times n}(\mathbb{K})$ auf. Bezeichnen wir die Zeilen von A mit $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, dann stimmt der Zeilenraum mit L° überein, siehe Satz III.4.10,

$$L^\circ = \ker(\psi_A)^\circ = \operatorname{img}((\psi_A)^t) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle \subseteq (\mathbb{K}^n)^*.$$

Wir können den Zeilenraum daher als den Vektorraum aller linearer Gleichungen verstehen, denen L genügt. Schließlich betrachten wir auch

$$W^\circ = \operatorname{img}(\psi_A)^\circ = \ker((\psi_A)^t) \subseteq (\mathbb{K}^m)^*,$$

den Teilraum aller Gleichungen, denen W genügt.

IV.3.1. Definition (Rang einer Matrix). Unter dem *Rang* einer Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ verstehen wir den Rang der damit assoziierten linearen Abbildung $\psi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi_A(x) = Ax$, d.h.

$$\operatorname{rank}(A) := \operatorname{rank}(\psi_A).$$

Nach Definition gilt daher $\dim(W) = \operatorname{rank}(A)$. Der Rang bestimmt auch die Dimensionen der anderen Teilräume, die wir oben betrachtet haben:

IV.3.2. Satz (Rang). *Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $k = \operatorname{rank}(A)$. Dann gilt:*

(a) $\dim(L) = n - k$*, d.h. der Lösungsraum ist $(n-k)$-dimensional.*
(b) $\dim(W) = k$*, d.h. der Spaltenraum ist k-dimensional. Die Matrix A besitzt daher k linear unabhängige Spalten, und je $k+1$ Spalten sind linear abhängig.*
(c) $\dim(L^\circ) = k$*, d.h. der Zeilenraum ist k-dimensional. Die Matrix A besitzt daher k linear unabhängige Zeilen, und je $k+1$ Zeilen sind linear abhängig. Jedes minimale lineare Gleichungssystem für L besteht daher aus genau k Gleichungen.*
(d) $\dim(W^\circ) = m - k$*. Jedes minimale lineare Gleichungssystem für W besteht daher aus genau $m-k$ Gleichungen.*

Beweis. Behauptung (b) ist trivial, vgl. Definition IV.3.1 und (IV.5). Behauptung (a) folgt aus Korollar IV.2.9, denn mit (IV.4) erhalten wir

$$\dim(L) = \dim(\ker(\psi_A)) = \dim(\mathbb{K}^n) - \dim(\operatorname{img}(\psi_A)) = n - \operatorname{rank}(A) = n - k.$$

Mit Korollar IV.2.8 und Korollar IV.2.16 folgt nun

$$\dim(L^\circ) = \dim(\mathbb{K}^n/L) = \dim(\mathbb{K}^n) - \dim(L) = n - (n-k) = k.$$

Nach Bemerkung IV.2.18 lässt sich L als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit k Gleichungen beschreiben, und weniger als k lineare Gleichungen reichen nicht aus. D.h. jedes minimale lineare Gleichungssystem für L muss aus genau k Gleichungen bestehen. Damit ist auch (c) gezeigt. Analog erhalten wir $\dim(W^\circ) = \dim(\mathbb{K}^m/W) = \dim(\mathbb{K}^m) - \dim(W) = m - k$, und somit (d). $\square$

Der Rang wurde als Dimension des Spaltenraums definiert, er wird daher manchmal auch als *Spaltenrang* bezeichnet. Unter dem *Zeilenrang* verstehen wir die Dimension des von den Zeilen aufgespannten Teilraums. Aus dem eben bewiesenen Satz IV.3.2(b)&(c) folgt, dass diese beiden Begriffe übereinstimmen. Wir wollen dies nun nochmals auf direktere Art zeigen:

IV.3.3. Satz (Rang der Transponierten). *Für jede Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ gilt:*

$$\operatorname{rank}(A^t) = \operatorname{rank}(A).$$

Der Zeilenrang stimmt daher stets mit dem Spaltenrang überein. Weiters gilt:

$$0 \le \operatorname{rank}(A) \le \min(n, m).$$

Beweis. Betrachte die lineare Abbildung $\psi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi_A(x) = Ax$, und die duale Abbildung $(\psi_A)^t\colon (\mathbb{K}^m)^* \to (\mathbb{K}^n)^*$. In Bemerkung III.4.5 haben wir Isomorphismen $\phi_{\mathbb{K}^m}\colon \mathbb{K}^m \to (\mathbb{K}^m)^*$ und $\phi_{\mathbb{K}^n}\colon \mathbb{K}^n \to (\mathbb{K}^n)^*$ konstruiert, sodass

$$\psi_{A^t} = \phi_{\mathbb{K}^n}^{-1} \circ (\psi_A)^t \circ \phi_{\mathbb{K}^m}.$$

Mit Proposition IV.2.23 und Satz IV.2.20 erhalten wir daher

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A^t) = \operatorname{rank}(\psi_{A^t}) = \operatorname{rank}\big(\phi_{\mathbb{K}^n}^{-1} \circ (\psi_A)^t \circ \phi_{\mathbb{K}^m}\big)&\\ = \operatorname{rank}((\psi_A)^t) = \operatorname{rank}(\psi_A) = \operatorname{rank}(A).&\end{aligned}$$

Da die Zeilen von A gerade die Spalten von A^t bilden, stimmen Zeilen- und Spaltenrang also überein. Da $\operatorname{img}(\psi_A) \subseteq \mathbb{K}^m$ gilt $\operatorname{rank}(A) = \dim(\operatorname{img}(\psi_A)) \leq \dim(\mathbb{K}^m) = m$ und analog $\operatorname{rank}(A^t) \leq n$. Zusammen mit $\operatorname{rank}(A^t) = \operatorname{rank}(A)$ folgt daraus $\operatorname{rank}(A) \leq \min(n, m)$. □

IV.3.4. Korollar. *Für $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Die Matrix A besitzt eine Rechtsinverse $A' \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, d.h. $AA' = I_m$.
(b) Die lineare Abbildung $\psi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi_A(x) = Ax$, ist surjektiv.
(c) Das Gl.system $Ax = y$ hat für jedes $y \in \mathbb{K}^m$ mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$.
(d) Die Spalten von A erzeugen $\mathbb{K}^m$.
(e) Die Matrix A hat m linear unabhängige Spalten.
(f) Die Zeilen von A erzeugen einen m-dimensionalen Teilraum.
(g) Die Zeilen von A sind linear unabhängig.
(h) Es gilt $\operatorname{rank}(A) = m$.

In diesem Fall muss $m \leq n$ gelten.

Beweis. Gilt $AA' = I_m$, so erhalten wir für die assoziierten linearen Abbildungen $\psi_A \circ \psi_{A'} = \psi_{AA'} = \psi_{I_m} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^m}$, also muss ψ_A surjektiv sein. Ist umgekehrt ψ_A surjektiv, dann existiert eine lineare Rechtsinverse $\varphi\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$, d.h. $\psi_A \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^m}$, siehe Korollar III.3.27(b). Bezeichnet nun A' die entsprechende Matrix, $\varphi = \psi_{A'}$, dann folgt $\psi_{AA'} = \psi_A \circ \psi_{A'} = \psi_A \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^m} = \psi_{I_m}$, also $AA' = I_m$. Damit ist die Äquivalenz (a)⇔(b) gezeigt. Die Äquivalenz (b)⇔(c) ist trivial. Die Äquivalenz (b)⇔(d) haben wir bereits früher fest gehalten, vgl. Bemerkung III.1.18. Die Äquivalenz (d)⇔(h) folgt aus der Definition des Rangs. Die Äquivalenz (d)⇔(f) folgt aus Satz IV.3.3. Die Implikation (d)⇒(e) folgt aus der Tatsache, dass jedes (endliche) Erzeugendensystem eine Basis enthält, siehe Proposition III.3.17. Die umgekehrte Implikation (e)⇒(d) folgt aus Korollar IV.1.17. Die Äquivalenz (f)⇔(g) folgt aus Korollar IV.1.17, denn A hat genau m Zeilen. Damit ist die Äquivalenz aller Eigenschaften gezeigt. Aus (e) folgt auch sofort der Zusatz $m \leq n$. □

IV.3.5. Korollar. *Für $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Die Matrix A besitzt eine Linksinverse $A' \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, d.h. $A'A = I_n$.
(b) Die lineare Abbildung $\psi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi_A(x) = Ax$, ist injektiv.

(c) Das Gl.system $Ax = y$ hat für jedes $y \in \mathbb{K}^m$ höchstens eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$.
(d) Die Spalten von A erzeugen einen n-dimensionalen Teilraum.
(e) Die Spalten von A sind linear unabhängig.
(f) Die Zeilen von A erzeugen $M_{1\times n}(\mathbb{K})$.
(g) Die Matrix A hat n linear unabhängige Zeilen.
(h) Es gilt $\operatorname{rank}(A) = n$.

In diesem Fall muss $n \leq m$ gelten.

Der Beweis kann analog zu dem des vorangehenden Korollars geführt werden und sei den LeserInnen überlassen.

IV.3.6. Bemerkung. Offenbar gilt $\operatorname{rank}(A) = 0$ genau dann, wenn $A = 0$.

Wir widmen uns nun der Berechnung des Rangs einer Matrix.

IV.3.7. Definition (Elementare Zeilen- und Spaltenumformungen). Unter einer *elementaren Zeilenumformung* einer Matrix verstehen wir eine der folgenden Modifikationen:

(I) Vertauschen zweier Zeilen.
(II) Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$.
(III) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Unter einer *elementaren Spaltenumformung* einer Matrix verstehen wir eine der folgenden Modifikationen:

(I) Vertauschen zweier Spalten.
(II) Multiplikation einer Spalte mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$.
(III) Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte.

Jede elementare Spaltenumformung kann durch Multiplikation von rechts mit einer invertierbaren Matrix S beschrieben werden, $A \rightsquigarrow AS$. Bei elementaren Spaltenumformungen vom Typ I ist diese Matrix von der Form

$$S = S_I^{i;\lambda} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = I + (\lambda - 1)E_{i,i},$$

wobei $\lambda \neq 0$, und i bezeichnet die Nummer jener Spalte, die mit λ multipliziert wird. Beachte, dass diese Matrizen invertierbar sind, $\big(S_I^{i;\lambda}\big)^{-1} = S_I^{i;1/\lambda}$. Bei elementaren Spaltenumformungen vom Typ II hat S die Gestalt

$$S = S_{II}^{i,j;\mu} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & \mu & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = I + \mu E_{i,j},$$

wobei $\mu \in \mathbb{K}$, $i \neq j$, und i bezeichnet die Nummer jener Spalte, die μ-mal zur j-ten Spalte addiert wird. Auch diese Matrizen sind invertierbar, $\big(S_{II}^{i,j;\mu}\big)^{-1} = S_{II}^{i,j;-\mu}$.

Bei elementaren Zeilenumformung vom Typ III ist die Matrix S von der Form

$$S = S_{III}^{i,j} = \begin{pmatrix} \ddots &&&&&&& \\ & 1 &&&&&& \\ && 0 &&& 1 && \\ &&& 1 &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& 1 && \\ && 1 &&&& 0 & \\ &&&&&&& 1 \\ &&&&&&&& \ddots \end{pmatrix} = I - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}.$$

wobei i und j die Nummern der beiden Spalten bezeichnen, die vertauscht werden, $i \neq j$. Auch diese Matrizen sind invertierbar, $\left(S_{III}^{i,j}\right)^{-1} = S_{III}^{i,j}$.

IV.3.8. Lemma. *Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Durch Anwenden endlich vieler elementarer Spaltenumformungen erhalten wir stets eine Matrix der Form $\tilde{A} = AS$, wobei $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Dabei bleibt der Rang der Matrix unverändert,* $\operatorname{rank}(\tilde{A}) = \operatorname{rank}(A)$, *und auch der Spaltenraum von $\tilde{A}$ stimmt mit dem Spaltenraum von A überein.*

Beweis. Entsteht $\tilde{A}$ aus A durch Anwenden von N elementaren Spaltenumformungen, dann existieren invertierbare Matrizen $S_1, \dots, S_N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, sodass $\tilde{A} = AS_1S_2 \cdots S_N$, siehe oben. Es gilt daher $\tilde{A} = AS$, wobei auch $S = S_1 \cdots S_N$ invertierbar ist, d.h. $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Betrachten wir die mit diesen Matrizen assoziierten linearen Abbildungen, $\psi_{\tilde{A}} = \psi_{AS} = \psi_A \circ \psi_S$, dann gilt

$$\operatorname{img}(\psi_{\tilde{A}}) = \operatorname{img}(\psi_A \circ \psi_S) = \psi_A(\psi_S(\mathbb{K}^n)) = \psi_A(\mathbb{K}^n) = \operatorname{img}(\psi_A),$$

denn $\psi_S(\mathbb{K}^n) = \mathbb{K}^n$ wegen der Invertierbarkeit von S. Dies bedeutet aber gerade, dass der Spaltenraum von $\tilde{A}$ mit dem Spaltenraum von A überein stimmt. Daraus erhalten wir auch sofort $\operatorname{rank}(\tilde{A}) = \operatorname{rank}(A)$. □

Analog lassen sich elementare Zeilenumformung durch Multiplikation von links mit invertierbaren Matrizen T beschreiben, $A \rightsquigarrow TA$. Den drei Typen elementarer Zeilenumformungen entsprechen dabei Matrizen T von der Form:

$$\begin{aligned} T_I^{i;\lambda} &= \left(S_I^{i;\lambda}\right)^t = S_I^{i;\lambda} \\ T_{II}^{i,j;\mu} &= \left(S_{II}^{i,j;\mu}\right)^t = S_{II}^{j,i;\mu} \\ T_{III}^{i,j} &= \left(S_{III}^{i,j}\right)^t = S_{III}^{i,j} \end{aligned} \tag{IV.6}$$

IV.3.9. Lemma. *Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Durch Anwenden endlich vieler elementarer Zeilenumformungen erhalten wir stets eine Matrix der Form $\tilde{A} = TA$, wobei $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$. Dabei bleibt der Rang der Matrix unverändert,* $\operatorname{rank}(\tilde{A}) = \operatorname{rank}(A)$, *der Zeilenraum von $\tilde{A}$ stimmt mit dem Zeilenraum von A überein, und auch die Lösungsräume von $\tilde{A}$ und A sind gleich, d.h. $\tilde{A}x = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$.*

Beweis. Entsteht $\tilde{A}$ aus A durch Anwenden von N elementaren Zeilenumformungen, dann existieren invertierbare Matrizen $T_1, \dots, T_N \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, sodass

$\tilde{A} = T_N \cdots T_2 T_1 A$, also $\tilde{A} = TA$, wobei $T = T_N \cdots T_2 T_1 \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$. Wir erhalten aber auch $\tilde{A}^t = A^t T_1^t T_2^t \cdots T_N^t$, d.h. $\tilde{A}^t$ entsteht aus A^t durch eine Folge elementarer Spaltenumformungen, siehe (IV.6). Nach Lemma IV.3.8 gilt daher $\operatorname{rank}(\tilde{A}^t) = \operatorname{rank}(A^t)$ und der Spaltenraum von $\tilde{A}^t$ stimmt mit dem Spaltenraum von A^t überein. Mit Satz IV.3.3 folgt $\operatorname{rank}(\tilde{A}) = \operatorname{rank}(A)$. Da der Spaltenraum der Transponierten gerade der Zeilenraum der ursprünglichen Matrix ist, müssen auch die Zeilenräume von $\tilde{A}$ und A gleich sein. Aus der Invertierbarkeit von T folgt sofort $\tilde{A}x = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$, $x \in \mathbb{K}^n$. □

IV.3.10. Definition (Zeilen- und Spaltenstufenform). Wir sagen eine Matrix $\tilde{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ hat *Zeilenstufenform*, wenn sie die Gestalt

$$\begin{pmatrix}
0\cdots0 & \tilde{A}_{1j_1} & *\cdots* & * & *\cdots* & * & \cdots & *\cdots* & * & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & \tilde{A}_{2j_2} & *\cdots* & * & \cdots & *\cdots* & * & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & \tilde{A}_{3j_3} & \cdots & *\cdots* & * & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & *\cdots* & * & *\cdots* \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & *\cdots* & * & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & 0\cdots0 & \tilde{A}_{kj_k} & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0
\end{pmatrix}$$

hat, wobei $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$, und die Einträge $\tilde{A}_{1j_1}, \dots, \tilde{A}_{kj_k}$ alle verschieden von Null sind. Die Matrix hat *reduzierte Zeilenstufenform*, falls sie folgende Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix}
0\cdots0 & 1 & *\cdots* & 0 & *\cdots* & 0 & \cdots & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 1 & *\cdots* & 0 & \cdots & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 1 & \cdots & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & 0\cdots0 & 1 & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0
\end{pmatrix}$$

Wir sagen $\tilde{A}$ hat *(reduzierte) Spaltenstufenform*, wenn $\tilde{A}^t$ (reduzierte) Zeilenstufenform hat. Eine Matrix $\tilde{A}$ ist also genau dann von Spaltenstufenform, wenn sie folgende Gestalt hat

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\
\tilde{A}_{i_1 1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
* & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
* & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\
* & \tilde{A}_{i_2 2} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
* & * & \cdots & \tilde{A}_{i_k k} & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & & * & 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
* & * & & * & 0 & & 0
\end{pmatrix}$$

wobei $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m$ und die Eintragungen $\tilde{A}_{i_1 1}, \dots, \tilde{A}_{i_k k}$ alle verschieden von Null sind.

IV.3.11. Satz (Elimination). *Jede Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ kann durch endlich viele elementare Zeilenumformungen auf (reduzierte) Zeilenstufenform $\tilde{A}$ gebracht werden. Sind dabei $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$ wie in Definition IV.3.10 dann gilt:*

(a) $\operatorname{rank}(A) = k$.

(b) Die ersten k Zeilen der Zeilenstufenform $\tilde{A}$ bilden eine Basis des Zeilenraums von A, und liefern daher ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum $L = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$.

(c) Die Einheitsvektoren $e_{j_1}, \dots, e_{j_k}$ bilden eine Basis für einen zu L komplementären Teilraum L'. Die Zeilenvektoren e_j^t, $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$, liefern ein minimales Gleichungssystem für L'.

(d) Die Spalten von A mit den Nummern $j_1, \dots, j_k$ bilden eine Basis des Spaltenraums von A.

(e) Ist die Zeilenstufenform $\tilde{A}$ reduziert, so bilden die Vektoren

$$e_j - \sum_{\{l \mid 1 \leq j_l < j\}} \tilde{A}_{lj} e_{j_l}, \qquad j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\},$$

eine Basis des Lösungsraums L.

Beweis. Wir bringen die Matrix A spaltenweise von links nach rechts auf reduzierte Zeilenstufenform. Induktiv nehmen wir an die ersten $q-1$ Spalten von A sind schon in reduzierter Zeilenstufenform. Sei p minimal für die Eigenschaft $A_{p1} = \cdots = A_{p,q-1} = 0$. Sind die Elemente $A_{pq}, \dots, A_{mq}$ alle Null, dann sind auch die ersten q Spalten von A in reduzierter Zeilenstufenform, und der Induktionsschritt erledigt. O.B.d.A. sei also einer der Einträge $A_{pq}, \dots, A_{mq}$ verschieden von Null. Durch Vertauschen zweier Zeilen können wir weiters $A_{pq} \neq 0$ erreichen. Durch Multiplikation der p-ten Zeile mit $1/A_{pq}$, dürfen wir weiters annehmen, dass $A_{pq} = 1$. Durch Addition geeigneter Vielfacher der p-ten Zeile zu den restlichen Zeilen können wir schließlich auch $A_{iq} = 0$, für alle $i \neq p$ erreichen. Beachte, dass die verwendeten Zeilenumformungen die ersten $q-1$ Spalten von A unverändert lassen. Wir erhalten also eine Matrix, deren ersten q Spalten in reduzierter Zeilenstufenform vorliegen. Damit ist der Induktionsschritt gezeigt, also lässt sich A durch elementare Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform $\tilde{A}$ bringen. Nach Lemma IV.3.9 gilt $\operatorname{rank}(\tilde{A}) = \operatorname{rank}(A)$, die Zeilenräume von A und $\tilde{A}$ sind gleich und auch die Lösungsräume von A und $\tilde{A}$ stimmen überein.

Im Fall $\tilde{A} = A$ lassen sich die Aussagen (a), (b), (c) und (e) aufgrund der einfachen Zeilenstufenform sofort ablesen. Dies sind aber alles nur Aussagen über den Zeilen- bzw. Lösungsraum. Da auch im allgemeinen Fall Zeilen- und Lösungsraum der beiden Matrizen A und $\tilde{A}$ übereinstimmen, bleiben sie für A richtig.

Nun zur verbleibenden Behauptung (d): Der Spaltenraum von A hat Dimension k, siehe (a) und Satz IV.3.2(b). Es genügt daher zu zeigen, dass die Spalten mit Nummern $j_1, \dots, j_k$ linear unabhängig sind, siehe Korollar IV.1.17. Es bezeichne B die Matrix die wir aus A erhalten indem wir alle Spalten bis auf die mit Nummern $j_1, \dots, j_k$ streichen. Es genügt $\operatorname{rank}(B) = k$ zu zeigen, siehe Satz IV.3.5. Wenden wir die selben Zeilenumformungen, die uns von A zu $\tilde{A}$ geführt haben, auf B an, so erhalten wir eine Matrix $\tilde{B}$, deren Spalten gerade die Spalten von $\tilde{A}$ mit Nummern $j_1, \dots, j_k$ sind. Nach Lemma IV.3.9 genügt es $\operatorname{rank}(\tilde{B}) = k$ zu zeigen. Wegen der einfachen Gestalt von $\tilde{A}$ lässt sich dies aber sofort ablesen. □

IV.3.12. Satz (Elimination). *Jede Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ kann durch endlich viele elementare Spaltenumformungen auf (reduzierte) Spaltenstufenform $\tilde{A}$ gebracht werden. Sind dabei $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m$ wie in Definition IV.3.10, dann gilt:*

(a) $\operatorname{rank}(A) = k$.
(b) Die ersten k Spalten der Spaltenstufenform $\tilde{A}$ bilden eine Basis des Spaltenraums W von A.
(c) Die Spaltenvektoren e_i, $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$, bilden eine Basis für einen zu W komplementären Teilraum W'. Die Zeilenvektoren $e^t_{i_1}, \dots, e^t_{i_k}$ liefern ein minimales Gleichungssystem für W'.
(d) Die Zeilen von A mit den Nummern $i_1, \dots, i_k$ bilden eine Basis des Zeilenraums von A und liefern daher ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum $L = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$.
(e) Ist die Spaltenstufenform $\tilde{A}$ reduziert, so bilden die Zeilenvektoren

$$e^t_i - \sum_{\{\,l \,\mid\, 1 \leq i_l < i\}} \tilde{A}_{il} e^t_{i_l}, \qquad i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\},$$

eine Basis von W° und liefern daher ein minimales Gleichungssystem für den Spaltenraum von A.

Beweis. Wir führen die erste Aussage auf den vorangehenden Satz IV.3.11 zurück. Dieser besagt, dass A^t durch elementare Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform gebracht werden kann. Es existieren daher invertierbare Matrizen $T_1, \dots, T_N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ wie in (IV.6), sodass $T_N \cdots T_1 A^t$ reduzierte Zeilenstufenform hat. Also ist $AT^t_1 \cdots T^t_N$ eine Matrix in reduzierter Spaltenstufenform. Da die Multiplikation von rechts mit T^t_i gerade einer elementaren Spaltenumformung entspricht sehen wir, dass A durch N elementare Spaltenumformungen auf reduzierte Spaltenstufenform $\tilde{A}$ gebracht werden kann. Nach Lemma IV.3.8 gilt $\operatorname{rank}(\tilde{A}) = \operatorname{rank}(A)$, und auch der Spaltenraum von $\tilde{A}$ stimmt mit dem Spaltenraum von A überein.

Wie im Beweis von Satz IV.3.11 lassen sich die Aussagen (a), (b), (c) und (e) für die (reduzierte) Spaltenstufenform $\tilde{A}$ sofort ablesen. Da es sich dabei um

Aussagen über den Spaltenraum handelt, bleiben sie für A richtig, denn die Spaltenräume von A und $\tilde{A}$ sind gleich. Die verbleibende Behauptung (d) lässt sich wie zuvor zeigen, oder kann durch Übergang zur Transponierten aus Satz IV.3.11 abgeleitet werden. □

IV.3.13. Beispiel. Wir wollen zunächst den Rang der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 8 & 2 & 14 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 12 & 9 & 17 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in M_{6\times 8}(\mathbb{R})$$

bestimmen. Durch Vertauschen der ersten und dritten Zeile erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 8 & 2 & 14 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 12 & 9 & 17 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Durch Addition geeigneter Vielfacher der ersten Zeile zu den anderen Zeilen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vertauschen der zweiten und dritten Zeile liefert:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Durch Addition geeigneter Vielfacher der zweiten Zeile zu den letzten beiden Zeilen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Durch Addition geeigneter Vielfacher der dritten Zeile zur vierten und sechsten Zeile erhalten wir schließlich eine Matrix in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 0&0&2&3&4&1&3&4\\ 0&0&0&0&0&3&4&1\\ 0&0&0&0&0&0&4&5\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz IV.3.11(a) gilt daher $\operatorname{rank}(A) = 3$. Aus dieser Rechnung lässt sich noch viel mehr über A sagen. Nach Satz IV.3.11(b) bildet

$$\begin{array}{cccccccc} 2x_3 & +3x_4 & +4x_5 & +x_6 & +3x_7 & +4x_8 & = & 0 \\ & & & 3x_6 & +4x_7 & +x_8 & = & 0 \\ & & & & 4x_7 & +5x_8 & = & 0 \end{array} \tag{IV.7}$$

ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum $L = \{x \in \mathbb{R}^8 | Ax = 0\}$, und es gilt $\dim(L) = 5$, siehe Satz IV.3.2(a). Nach Satz IV.3.11(c) ist $L' := \langle e_3, e_6, e_7 \rangle$ ein zu L komplementärer Teilraum, $\dim(L') = 3$, und dieser lässt sich durch das minimale Gleichungssytem $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_8 = 0$ beschreiben. Nach Satz IV.3.11(d) bilden die folgenden Spalten von A

$$a_3 = \begin{pmatrix} 0\\2\\2\\4\\6\\-2 \end{pmatrix}, \quad a_6 = \begin{pmatrix} 0\\1\\4\\2\\9\\-4 \end{pmatrix}, \quad a_7 = \begin{pmatrix} 4\\3\\7\\14\\17\\-3 \end{pmatrix},$$

eine Basis des Spaltenraums von A. Bringen wir A durch weitere Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform,

$$\begin{pmatrix} 0&0&2&3&4&1&3&4\\ 0&0&0&0&0&3&4&1\\ 0&0&0&0&0&0&4&5\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0&0&1&3/2&2&1/2&3/2&2\\ 0&0&0&0&0&1&4/3&1/3\\ 0&0&0&0&0&0&1&5/4\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0&0&1&3/2&2&1/2&0&1/8\\ 0&0&0&0&0&1&0&-4/3\\ 0&0&0&0&0&0&1&5/4\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0&0&1&3/2&2&0&0&19/24\\ 0&0&0&0&0&1&0&-4/3\\ 0&0&0&0&0&0&1&5/4\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

dann folgt aus Satz IV.3.11(e), dass die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0\\0\\-3/2\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0\\0\\-2\\0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad b_5 = \begin{pmatrix} 0\\0\\-19/24\\0\\0\\4/3\\-5/4\\1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Lösungsraums $L = \{x \in \mathbb{R}^8 | Ax = 0\}$ bilden. Somit ist $\phi\colon \mathbb{R}^5 \xrightarrow{\cong} L$,

$$\phi\begin{pmatrix} s_1\\ s_2\\ s_3\\ s_4\\ s_5\end{pmatrix} = s_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + s_3\begin{pmatrix}0\\0\\-3/2\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + s_4\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + s_5\begin{pmatrix}0\\0\\-19/24\\0\\0\\4/3\\-5/4\\1\end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus, d.h. eine Parameterdarstellung von L. Schließlich erhalten wir aus der reduzierten Zeilenstufenform folgendes etwas einfachere minimale Gleichungssystem für L, vgl. (IV.7):

$$\begin{array}{ccccccl} x_3 & +\frac{3}{2}x_4 & +2x_5 & & & +\frac{19}{24}x_8 & = 0 \\ & & & x_6 & & -\frac{4}{3}x_8 & = 0 \\ & & & & x_7 & +\frac{5}{4}x_8 & = 0 \end{array}$$

IV.3.14. Beispiel. Wir wollen den Rang der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 7\\ 1 & 5 & 8 & 10\\ 2 & 12 & 22 & 29\\ 3 & 13 & 21 & 32\end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

bestimmen. Durch entsprechende Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 7\\ 1 & 5 & 8 & 10\\ 2 & 12 & 22 & 29\\ 3 & 13 & 21 & 32\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10\\ 0 & 0 & 3 & 7\\ 2 & 12 & 22 & 29\\ 3 & 13 & 21 & 32\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10\\ 0 & 0 & 3 & 7\\ 0 & 2 & 6 & 9\\ 0 & -2 & -3 & 2\end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10\\ 0 & 2 & 6 & 9\\ 0 & 0 & 3 & 7\\ 0 & -2 & -3 & 2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10\\ 0 & 2 & 6 & 9\\ 0 & 0 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 3 & 11\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10\\ 0 & 2 & 6 & 9\\ 0 & 0 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

Somit $\operatorname{rank}(A) = 4$, die Matrix A ist daher invertierbar, siehe Korollar IV.3.5.

IV.3.15. Beispiel. Wir wollen den Rang der komplexen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 7 & 1-\mathbf{i}\\ 2\mathbf{i} & 14 & 3-\mathbf{i}\\ -1 & 2+4\mathbf{i} & 1+4\mathbf{i}\\ 1-\mathbf{i} & -4-5\mathbf{i} & 7\mathbf{i}\end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{C})$$

bestimmen. Durch Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & 7 & 1-\mathbf{i}\\ 2\mathbf{i} & 14 & 3-\mathbf{i}\\ -1 & 2+4\mathbf{i} & 1+4\mathbf{i}\\ 1-\mathbf{i} & -4-5\mathbf{i} & 7\mathbf{i}\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 7 & 1-\mathbf{i}\\ 0 & 0 & 1+\mathbf{i}\\ 0 & 2-3\mathbf{i} & 3\mathbf{i}\\ 0 & 3+2\mathbf{i} & 2+7\mathbf{i}\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 7 & 1-\mathbf{i}\\ 0 & 2-3\mathbf{i} & 3\mathbf{i}\\ 0 & 0 & 1+\mathbf{i}\\ 0 & 3+2\mathbf{i} & 2+7\mathbf{i}\end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 7 & 1-\mathbf{i}\\ 0 & 2-3\mathbf{i} & 3\mathbf{i}\\ 0 & 0 & 1+\mathbf{i}\\ 0 & 0 & 5+7\mathbf{i}\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 7 & 1-\mathbf{i}\\ 0 & 2-3\mathbf{i} & 3\mathbf{i}\\ 0 & 0 & 1+\mathbf{i}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Es gilt daher $\operatorname{rank}(A) = 3$. Die lineare Abbildung $\psi_A\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$, $\psi_A(x) = Ax$, ist daher injektiv. Das Gleichungssystem $Ax = y$ hat daher für jedes $y \in \mathbb{C}^4$ höchstens eine Lösung $x \in \mathbb{C}^3$, siehe Korollar IV.3.5.

IV.3.16. Beispiel. Wir wollen den Rang folgender Matrix über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ berechnen:

$$A = \begin{pmatrix} 0&1&0&0&1&0\\ 1&1&0&1&1&0\\ 1&0&1&1&0&1\\ 0&1&0&0&1&0\\ 1&0&1&1&1&1 \end{pmatrix} \in M_{5\times 6}(\mathbb{Z}_2)$$

Durch Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&1&0\\ 1&1&0&1&1&0\\ 1&0&1&1&0&1\\ 0&1&0&0&1&0\\ 1&0&1&1&1&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&1&0&1&1&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 1&0&1&1&0&1\\ 0&1&0&0&1&0\\ 1&0&1&1&1&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&1&0&1&1&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&1&1&0&1&1\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&1&1&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&1&0&1&1&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&1&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&1&0&1&1&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&1\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&1&0&1&1&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Es gilt daher $\operatorname{rank}(A) = 4$.

IV.3.17. Beispiel. Betrachte den von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1\\2\\4\\6\\1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2\\4\\8\\15\\6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1\\2\\4\\9\\8 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4\\8\\16\\30\\15 \end{pmatrix}, \quad v_5 \begin{pmatrix} 3\\6\\12\\24\\12 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Teilraum $W := \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle \subseteq \mathbb{R}^5$. Wir wollen nun:

(1) $\dim(W)$ und eine Basis von W bestimmen.
(2) Ein minimales Gleichungssystem für W angeben.
(3) Einen zu W komplementären Teilraum W' bestimmen und diesen durch eine Basis und ein minimales Gleichungssystem beschreiben.
(4) Eine Basis von W bestimmen, die aus gewissen der Vektoren v_i besteht.

Fassen wir die Vektoren zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 1&2&1&4&3\\ 2&4&2&8&6\\ 4&8&4&16&12\\ 6&15&9&30&24\\ 1&6&8&15&12 \end{pmatrix},$$

dann ist W der Spaltenraum von A. Durch Spaltenumformungen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1&2&1&4&3\\ 2&4&2&8&6\\ 4&8&4&16&12\\ 6&15&9&30&24\\ 1&6&8&15&12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 2&0&0&0&0\\ 4&0&0&0&0\\ 6&3&3&6&6\\ 1&4&7&11&9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 2&0&0&0&0\\ 4&0&0&0&0\\ 6&3&0&0&0\\ 1&4&3&3&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 2&0&0&0&0\\ 4&0&0&0&0\\ 6&3&0&0&0\\ 1&4&3&0&0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz IV.3.12(b) bilden daher die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1\\2\\4\\6\\1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\3\\4 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\3 \end{pmatrix}$$

eine Basis von W und es gilt $\dim(W) = 3$. Durch weitere Spaltenumformungen kann die Matrix auf reduzierte Spaltenstufenform gebracht werden:

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 2&0&0&0&0 \\ 4&0&0&0&0 \\ 6&3&0&0&0 \\ 1&4&3&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 2&0&0&0&0 \\ 4&0&0&0&0 \\ 6&3&0&0&0 \\ 1&4&1&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 2&0&0&0&0 \\ 4&0&0&0&0 \\ 6&3&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 2&0&0&0&0 \\ 4&0&0&0&0 \\ 6&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 2&0&0&0&0 \\ 4&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten so eine Basis von W,

$$b_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

die sehr viele verschwindende Komponenten hat. Insbesondere ist

$$\phi\colon \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} W, \qquad \phi\begin{pmatrix} s \\ t \\ u \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 2s \\ 4s \\ t \\ u \end{pmatrix},$$

ein Isomorphismus, d.h. Parameterdarstellung von W. Nach Satz IV.3.12(e) ist

$$\begin{array}{rrrcl} -2x_1 & +x_2 & & = & 0 \\ -4x_1 & & +x_3 & = & 0 \end{array}$$

ein minimales Gleichungssystem für W. Nach Satz IV.3.12(c) bilden die Vektoren

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

eine Basis für einen zu W komplementären Teilraum $W' = \langle e_2, e_3 \rangle$. Ein minimales Gleichungssystem für W' ist:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & & & = & 0 \\ & x_4 & & = & 0 \\ & & x_5 & = & 0 \end{array}$$

Um die letzte Frage zu beantworten bringen wir A auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1&2&1&4&3 \\ 2&4&2&8&6 \\ 4&8&4&16&12 \\ 6&15&9&30&24 \\ 1&6&8&15&12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&2&1&4&3 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&3&3&6&6 \\ 0&4&7&11&9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&2&1&4&3 \\ 0&3&3&6&6 \\ 0&4&7&11&9 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&2&1&4&3 \\ 0&1&1&2&2 \\ 0&4&7&11&9 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&2&1&4&3 \\ 0&1&1&2&2 \\ 0&0&3&3&1 \\ 0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz IV.3.11(d) bilden auch die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis von W.

IV.3.18. Beispiel. Wir wollen verifizieren, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 14 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -21 \\ 0 \\ -6 \\ -3 \\ -23 \\ 2 \end{pmatrix},$$

linear unabhängig in $\mathbb{R}^6$ sind und diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^6$ ergänzen. Mit Hilfe von Spaltenumformungen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 7&14&-21 \\ -1&-1&0 \\ 2&4&-6 \\ 0&1&-3 \\ 3&10&-23 \\ 1&3&2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 7&0&0 \\ -1&1&-3 \\ 2&0&0 \\ 0&1&-3 \\ 3&4&-14 \\ 1&1&5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 7&0&0 \\ -1&1&0 \\ 2&0&0 \\ 0&1&0 \\ 3&4&1 \\ 1&1&8 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind also linear unabhängig, siehe Korollar IV.3.5. Zusammen mit den Einheitsvektoren e_3, e_4 und e_6 bilden sie eine Basis $v_1, v_2, v_3, e_3, e_4, e_6$ von $\mathbb{R}^6$, siehe Satz IV.3.12(c).

IV.3.19. Beispiel. Es bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^5$ den Lösungsraum des Systems:

$$\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +4x_4 & +11x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +14x_4 & +30x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & +6x_2 & +3x_3 & +12x_4 & +34x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & +20x_4 & +41x_5 & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & -2x_4 & +7x_5 & = & 0 \end{array} \tag{IV.8}$$

Wir wollen nun:

(1) $\dim(L)$ und eine Basis von L bestimmen.
(2) Ein minimales Gleichungssystem für L angeben.
(3) Einen zu L komplementären Teilraum L' bestimmen und diesen durch eine Basis und ein minimales Gleichungssystem beschreiben.
(4) Ein minimales Gleichungssystem für L angeben, das aus gewissen der ursprünglichen Gleichungen besteht.

Wir fassen die Koeffizienten des Gleichungssytems zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 4 & 14 & 30 \\ 3 & 6 & 3 & 12 & 34 \\ 2 & 4 & 6 & 20 & 41 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Durch Zeilenumformungen bringen wir A auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 4 & 14 & 30 \\ 3 & 6 & 3 & 12 & 34 \\ 2 & 4 & 6 & 20 & 41 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 19 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz IV.3.11(e) bilden die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von L und es gilt $\dim(L) = 2$. Insbesondere ist

$$\phi\colon \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} L, \qquad \phi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s-t \\ s \\ -3t \\ t \\ 0 \end{pmatrix},$$

ein Isomorphismus, d.h. eine Parameterdarstellung. Nach Satz IV.3.11(b) erhalten wir aus den nicht-trivialen Zeilen der reduzierten Zeilstufenform folgendes