minimale Gleichungssystem für L:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = & 0 \\ & & x_3 & +3x_4 & & = & 0 \\ & & & & x_5 & = & 0 \end{array}$$

Nach Satz IV.3.11(c) bilden die Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis eines zu L komplementären Teilraums L', der auch durch das minimale Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccc} x_2 & & = & 0 \\ & x_4 & = & 0 \end{array}$$

beschrieben werden kann. Um die letzte Frage zu beantworten bringen wir A auf Spaltenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 4 & 14 & 30 \\ 3 & 6 & 3 & 12 & 34 \\ 2 & 4 & 6 & 20 & 41 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 12 & 19 \\ 1 & 0 & -2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz IV.3.12(d) bildet die ersten drei Gleichungen von (IV.8),

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +4x_4 & +11x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +14x_4 & +30x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & +6x_2 & +3x_3 & +12x_4 & +34x_5 & = & 0 \end{array}$$

ein minimales Gleichungssystem für L.

IV.3.20. Beispiel. Betrachte den Teilraum $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle \subseteq \mathbb{R}^5$, der von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 12 \\ 20 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 11 \\ 30 \\ 34 \\ 41 \\ 7 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Wir wollen eine Basis von W bestimmen, die aus gewissen der Vektoren v_i besteht. Mit Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 4 & 14 & 30 \\ 3 & 6 & 3 & 12 & 34 \\ 2 & 4 & 6 & 20 & 41 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 19 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz IV.3.11(d) bilden die Vektoren v_1, v_3, v_5 eine Basis von W und es gilt $\dim(W) = 3$. Auch sehen wir nun, dass etwa v_1, v_2, v_5 keine Basis von W bildet.

IV.3.21. Beispiel. Betrachte den von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -6 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 15 \\ 11 \\ 14 \\ 26 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 20 \\ 9 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix},$$

aufgespannten Teilraum $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^6$. Wir wollen einen zu W komplementären Teilraum W' bestimmen, genauer, eine Basis von W' angeben. Mittels Spaltenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 7 & -6 & 15 & 20 \\ 4 & -1 & 11 & 9 \\ 5 & -1 & 14 & 11 \\ 8 & 1 & 26 & 17 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & -3 \\ 5 & 4 & 4 & -4 \\ 8 & 9 & 10 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz IV.3.12(c) spannen daher die Einheitsvektoren e_2, e_4, e_5 einen Teilraum $W' = \langle e_2, e_4, e_5 \rangle \subseteq \mathbb{R}^6$ auf, der zu W komplementär ist, $W \oplus W' = \mathbb{R}^6$. Beachte auch $\dim(W) = 3 = \dim(W')$.

IV.3.22. Beispiel. Wir wollen verifizieren, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 21 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 19 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ sind, und drei dieser Vektoren bestimmen, die eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden. Wir fassen die Vektoren zu einer Matrix zusammen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & -1 & 3 & 3 & -6 \\ 4 & 11 & 18 & 21 & 19 \end{pmatrix}$$

Mittels Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & -1 & 3 & 3 & -6 \\ 4 & 11 & 18 & 21 & 19 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Somit ist $\operatorname{rank}(A) = 3$, also bilden die Vektoren $v_1, \dots, v_5$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$, siehe Korollar IV.3.4. Nach Satz IV.3.11(d) bilden die Vektoren v_1, v_2, v_5 eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

IV.3.23. Beispiel. Es bezeichne $W \subseteq \mathbb{R}^5$ den Teilraum aller y, für die das folgende Gleichungssystem lösbar ist:

$$\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & & -x_3 & & +2x_5 & = & y_1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +3x_4 & +x_5 & = & y_2 \\ 7x_1 & +5x_2 & +3x_3 & +15x_4 & +9x_5 & = & y_3 \\ 5x_1 & +2x_2 & & +7x_4 & +12x_5 & = & y_4 \\ 17x_1 & +7x_2 & -x_3 & +23x_4 & +35x_5 & = & y_5 \end{array} \tag{IV.9}$$

Wir wollen nun $\dim(W)$ und eine Basis von W bestimmen, und auch ein minimales Gleichungssystem für W angeben. Beachte, dass W genau der Spaltenraum der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 15 & 9 \\ 5 & 2 & 0 & 7 & 12 \\ 17 & 7 & -1 & 23 & 35 \end{pmatrix}$$

ist. Durch Spaltenumformungen bringen wir diese Matrix auf reduzierte Spaltenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 15 & 9 \\ 5 & 2 & 0 & 7 & 12 \\ 17 & 7 & -1 & 23 & 35 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & 10 & 15 & -5 \\ 5 & 2 & 5 & 7 & 2 \\ 17 & 7 & 16 & 23 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 10 & 7 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus lesen wir $\dim(W) = 3$ ab und erhalten auch eine Basis

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

von W, vgl. Satz IV.3.12(b). Mit Satz IV.3.12(e) erhalten wir auch ein minimales Gleichungssystem für W:

$$\begin{array}{rrrrrcl} -2y_1 & -5y_2 & +y_3 & & & = & 0 \\ -4y_1 & -3y_2 & & -2y_4 & +y_5 & = & 0 \end{array} \tag{IV.10}$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem (IV.9) ist also genau dann lösbar, wenn die rechte Seite den beiden Gleichungen (IV.10) genügt.

IV.4. Inhomogene Gleichungssysteme. Sei wieder $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ eine Matrix. Wir wollen nun, für fixes $y \in \mathbb{K}^m$, das inhomogene System $Ax = y$ lösen, d.h. alle $x \in \mathbb{K}^n$ bestimmen, für die $Ax = y$ gilt.

IV.4.1. Satz. *Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $y \in \mathbb{K}^m$. Das inhomogene System*

$$Ax = y \tag{IV.11}$$

ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|y)$$

gilt. Durch Zeilenumformungen lässt sich die erweiterte Matrix $(A|y)$ auf die Form $(\tilde A|\tilde y)$ bringen, wobei $\tilde A$ (reduzierte) Zeilenstufenform hat. Sind $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$ wie in Definition IV.3.10, so ist (IV.11) *also genau dann lösbar, wenn $\tilde y_{k+1} = \tilde y_{k+2} = \cdots = \tilde y_m = 0$ gilt. In diesem Fall liefern die ersten k Zeilen von $(\tilde A|\tilde y)$ ein minimales inhomogenes Gleichungssystem, das dieselbe Lösungsmenge wie* (IV.11) *besitzt. Ist darüber hinaus die Zeilenstufenform $\tilde A$ reduziert, dann bildet*

$$\xi = \tilde y_1 e_{j_1} + \cdots + \tilde y_k e_{j_k}$$

eine spezielle Lösung von (IV.11)*, d.h. es gilt $A\xi = y$. Mit Satz IV.3.11(e) erhalten wir aus $\tilde A$ eine Basis $b_1, \dots, b_{n-k}$ für den Lösungsraum des homogenen Systems $Ax = 0$. Die allgemeine Lösung von* (IV.11) *ist dann von der Form*

$$x = \xi + s_1 b_1 + \cdots + s_{n-k} b_{n-k}, \qquad s_1, \dots, s_{n-k} \in \mathbb{K}.$$

Beweis. Bezeichnen $A = (a_1|\cdots|a_n)$ die Spalten von A, dann gilt

$$\operatorname{rank}(A) = \dim\bigl(\langle a_1, \dots, a_n\rangle\bigr) \quad \text{und} \quad \operatorname{rank}(A|y) = \dim\bigl(\langle a_1, \dots, a_n, y\rangle\bigr).$$

Die Bedingung $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|y)$ ist daher zu

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle a_1, \dots, a_n, y \rangle$$

äquivalent, siehe Korollar IV.1.20. Nach Lemma III.1.4(d) ist dies genau dann der Fall, wenn $y \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, d.h. genau dann, wenn das System $Ax = y$ eine Lösung besitzt. Nach Lemma IV.3.9 gilt $(\tilde{A}|\tilde{y}) = T(A|y) = (TA|Ty)$, für ein $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$. Wegen der Invertierbarkeit von T ist

$$Ax = y \quad \Leftrightarrow \quad TAx = Ty \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A}x = \tilde{y},$$

d.h. die Lösungsmenge von $Ax = y$ stimmt mit der von $\tilde{A}x = \tilde{y}$ überein. Daraus lassen sich nun sofort die restlichen Behauptungen ablesen. □

IV.4.2. Beispiel. Wir wollen alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrrcr} x_1 & +x_2 & +6x_3 & +4x_4 & & +3x_6 & = & 5 \\ x_1 & +5x_2 & +10x_2 & -4x_4 & -4x_5 & -x_6 & = & 9 \\ 2x_1 & +2x_2 & +12x_3 & +8x_4 & +2x_5 & +12x_6 & = & 12 \\ -3x_1 & -3x_2 & -18x_3 & -12x_4 & +3x_5 & & = & -12 \end{array} \tag{IV.12}$$

bestimmen. Mittels Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & -4 & -4 & -1 & 9 \\ 2 & 2 & 12 & 8 & 2 & 12 & 12 \\ -3 & -3 & -18 & -12 & 3 & 0 & -12 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & -8 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 3 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir sehen daher bereits, dass das Gleichungssystem lösbar ist. Durch weitere Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Daraus lesen wir eine spezielle Lösung ξ sowie eine Basis b_1, b_2, b_3 für den Lösungsraums des homogene System ab, vgl. Satz IV.4.1:

$$\xi = \begin{pmatrix} 3\\2\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -5\\-1\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -6\\2\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1\\-2\\0\\0\\-3\\1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (IV.12) ist daher

$$\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\2\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -5\\-1\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -6\\2\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -1\\-2\\0\\0\\-3\\1 \end{pmatrix}, \qquad s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}.$$

Auch ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum lässt sich ablesen:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & & +5x_3 & +6x_4 & & +x_6 & = & 3 \\ & x_2 & +x_3 & -2x_4 & & +2x_6 & = & 2 \\ & & 3 & & x_5 & +3x_6 & = & 1 \end{array}$$

IV.4.3. Beispiel. Wir wollen alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 4 \\ -x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +3x_4 & = & -1 \\ x_1 & +7x_2 & +17x_3 & +20x_4 & = & 9 \\ 2x_1 & -x_2 & -16x_3 & -17x_4 & = & 2 \end{array} \tag{IV.13}$$

bestimmen. Durch Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & 17 & 20 & 9 \\ 2 & -1 & -16 & -17 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 14 & 16 & 5 \\ 0 & -5 & -22 & -25 & -6 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & -18 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem (IV.13) besitzt daher keine Lösung, vgl. Satz IV.4.1.

Unter einem *affinen Teilraum* eines Vektorraums V verstehen wir jede Teilmenge der Form

$$E = \xi + W = \{\xi + w | w \in W\},$$

wobei W einen Teilraum von V bezeichnet und $\xi \in V$. In diesem Fall ist

$$W \xrightarrow{\cong} E, \qquad w \mapsto \xi + w,$$

eine Bijektion, aber i.A. keine lineare Abbildung. Unter der Dimension des affinen Teilraums E verstehen wir die Dimension des (dazu parallelen) Teilraums W. Ist

$b_1, \dots, b_k$ eine Basis von W, dann ist

$$\phi\colon \mathbb{K}^k \xrightarrow{\cong} E, \qquad \phi(s) = \xi + s_1 b_1 + \cdots + s_k b_k,$$

eine Bijektion, d.h. eine Parametrisierung von E, aber i.A. nicht linear. Sei $m = \dim(V)$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-k}$ ein Gleichungssystem für W, d.h. $W = \bigcap_{i=1}^{m-k} \ker(\alpha_i)$. Dann stimmt E also mit der Lösungsmenge des folgenden inhomogenen Systems überein:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1(v) & = & \alpha_1(\xi) \\ & \vdots & \\ \alpha_{m-k}(v) & = & \alpha_{m-k}(\xi) \end{array}$$

Jeder affine Teilräume $E \subseteq V$ kann daher durch $\dim(V) - \dim(E)$ inhomogenen lineare Gleichungen beschrieben werden. Umgekehrt ist die Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems stets ein affiner Teilraum, oder leer, siehe Satz IV.4.1. Soll ein Gleichungssystem für einen affinen Teilraum $E = \xi + W$ gefunden werden, so ist es zweckmäßig zunächst ein homogenes Gleichungssystem für den Teilraum W zu bestimmen, die Konstanten auf der rechten Seite lassen sich dann durch Einsetzen des Punktes ξ ermitteln.

IV.4.4. Beispiel. Wir wollen die Dimension sowie ein minimales Gleichungssystem des affinen Teilraums

$$E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

bestimmen. Mittels Spaltenumformungen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

es gilt daher $\dim(E) = 2$. Daraus lesen wir zunächst ein minimales Gleichungssystems für den zu E parallelen Teilraum ab, siehe Satz IV.3.12(e):

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = & 0 \\ -x_1 & -3x_2 & & +x_4 & = & 0 \end{array}$$

Einsetzen des Punktes liefert dann folgendes minimale Gleichungssystem für E:

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = & -2 \\ -x_1 & -3x_2 & & +x_4 & = & -1 \end{array}$$

IV.5. Matrizeninversion. Wir wollen in diesem Abschnitt einen effizienten Algorithmus zur Berechnung der Inversen einer Matrix besprechen. Wir beginnen mit folgender Charakterisierungen der Invertierbarkeit einer Matrix, die wir sofort durch Kombination der Korollare IV.3.4 und IV.3.5 erhalten:

IV.5.1. Korollar (Invertierbare Matrizen). *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für eine quadratische Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Die Matrix A ist invertierbar.

(b) Die lineare Abbildung $\psi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, $\psi(x) = Ax$, *ist ein Isomorphismus.*
(c) Das Gl.system $Ax = y$ *hat für jedes* $y \in \mathbb{K}^n$ *genau eine Lösung* $x \in \mathbb{K}^n$.
(d) Die Spalten von A *bilden eine Basis von* $\mathbb{K}^n$.
(e) Die Zeilen von A *bilden eine Basis von* $M_{1\times n}(\mathbb{K}) \cong (\mathbb{K}^n)^* \cong \mathbb{K}^n$.
(f) Es gilt $\operatorname{rank}(A) = n$.

IV.5.2. Beispiel. Wir wollen verifizieren, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden. Nach Korollar IV.5.1 ist dies genau dann der Fall, wenn die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 7 \\ -4 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Rang 4 hat. Mittels Zeilenumformungen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 7 \\ -4 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

also bilden die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 tatsächlich eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

Wollen wir die Inverse einer Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ berechnen, dann müssen wir also jene Matrix $X \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bestimmen, für die $AX = I_n$ gilt. Dies kann als lineares Gleichungssystem mit n^2 vielen Gleichungen in den n^2 vielen Eintragungen von X verstanden werden. Allerdings zerfällt dieses Gleichungsystem in n unabhängige Systeme, eines für jede Spalte von X, mit je n Gleichungen in n Unbekannten,

$$A \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = e_1, \quad A \begin{pmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} = e_2, \quad \dots \quad A \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = e_n.$$

Diese Systeme lassen sich bequem gleichzeitig mit folgenden Algorithmus lösen:

IV.5.3. Satz (Algorithmus zur Bestimmung der Inversen). *Ist* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *eine invertierbare* $(n \times n)$*-Matrix, dann kann die* $n \times (2n)$*-Matrix* $(A|I_n)$ *durch Zeilenumformungen auf die Gestalt* $(I_n|B)$ *gebracht werden und es gilt* $A^{-1} = B$.

Beweis. Die Matrix A kann durch Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform gebracht werden, siehe Satz IV.3.11. Wegen der Invertierbarkeit von A ist $\operatorname{rank}(A) = n$, also muss die reduzierte Zeilenstufenform mit der Einheitsmatrix I_n übereinstimmen. Nach Lemma IV.3.9 entsprechen diese Zeilenumformungen gerade einer Multiplikation von links, $A \rightsquigarrow TA$, mit einer invertierbaren Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Es gilt daher $TA = I_n$, also $T = A^{-1}$. Wenden wir die selben Zeilenumformungen auf die erweiterte Matrix $(A|I_n)$ an, erhalten wir also $(A|I_n) \rightsquigarrow T(A|I_n) = (TA|TI_n) = (I_n|T) = (I_n|A^{-1})$. □

IV.5.4. Beispiel. Wir wollen die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

bestimmen. Mittels Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

Die Inverse von A ist daher

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

IV.5.5. Beispiel. Wir wollen die Inverse der komplexen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathbf{i} & 1-\mathbf{i} \\ 2 & 2+\mathbf{i} & 2+2\mathbf{i} \\ 0 & 1-3\mathbf{i} & -4+13\mathbf{i} \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

bestimmen. Mittels Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+\mathbf{i} & 1-\mathbf{i} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2+\mathbf{i} & 2+2\mathbf{i} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-3\mathbf{i} & -4+13\mathbf{i} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+\mathbf{i} & 1-\mathbf{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} & 4\mathbf{i} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-3\mathbf{i} & -4+13\mathbf{i} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+\mathbf{i} & 1-\mathbf{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2\mathbf{i} & \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 1-3\mathbf{i} & -4+13\mathbf{i} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5+3\mathbf{i} & -1+2\mathbf{i} & 1-\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2\mathbf{i} & \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{i} & 6+2\mathbf{i} & -3-\mathbf{i} & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5+3\mathbf{i} & -1+2\mathbf{i} & 1-\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2\mathbf{i} & \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-6\mathbf{i} & -1+3\mathbf{i} & -\mathbf{i} \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -29+26\mathbf{i} & 15-13\mathbf{i} & -3+5\mathbf{i} \\ 0 & 1 & 0 & 8-26\mathbf{i} & -4+13\mathbf{i} & -4\mathbf{i} \\ 0 & 0 & 1 & 2-6\mathbf{i} & -1+3\mathbf{i} & -\mathbf{i} \end{array}\right)$$

Die Inverse von A ist daher:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -29+26\mathbf{i} & 15-13\mathbf{i} & -3+5\mathbf{i} \\ 8-26\mathbf{i} & -4+13\mathbf{i} & -4\mathbf{i} \\ 2-6\mathbf{i} & -1+3\mathbf{i} & -\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

IV.5.6. Beispiel. Wir wollen zeigen, dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcl} & 4x_2 & -4x_3 & 7x_4 & = & y_1 \\ & 2x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & y_2 \\ x_1 & +5x_2 & -6x_3 & +7x_4 & = & y_3 \\ x_1 & +3x_2 & -5x_3 & +4x_4 & = & y_4 \end{array} \tag{IV.14}$$

für jede rechte Seite $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist und diese Lösung bestimmen. Wir betrachten die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & -6 & 7 \\ 1 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \in M_{4\times4}(\mathbb{R}).$$

Mittels Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 4 & -4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -6 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & -6 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & -6 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & -6 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & -6 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & -6 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -5/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -7/2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1/2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3/2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2/3 & 5/6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Matrix A ist daher invertierbar mit Inverser

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3/2 & 2 & -1 \\ -2/3 & 5/6 & 1 & -1 \\ -1/3 & -1/3 & 1 & -1 \\ 1/3 & -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssysteme (IV.14) ist somit eindeutig lösbar und $x = A^{-1}y$ die gesuchte Lösung, d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3/2 & 2 & -1 \\ -2/3 & 5/6 & 1 & -1 \\ -1/3 & -1/3 & 1 & -1 \\ 1/3 & -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 - \frac{3}{2}y_2 + 2y_3 - y_4 \\ -\frac{2}{3}y_1 + \frac{5}{6}y_2 + y_3 - y_4 \\ -\frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + y_3 - y_4 \\ \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 \end{pmatrix}.$$

IV.5.7. Beispiel. Es soll die Inverse folgender Matrix über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ bestimmt werden:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{5\times 5}(\mathbb{Z}_2)$$

Mittels Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&1&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&1&1&0&0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&1&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&1&1&1&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&1&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&1&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&1&1&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&1&1&0&1&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1&1&1&1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&1&1&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1&1&1&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&1&1&1&0&1&0 \\ 0&1&0&0&1&1&1&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1&1&1&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0&1&1 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&1&1&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1&0&1&1&1&1 \end{array}\right)$$

die Inverse von A ist daher:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

IV.5.8. Bemerkung. Analog zur Formel für die Inverse einer (2×2)-Matrix, siehe Beispiel II.4.8, gibt es auch eine explizite Formel für die Inversion von

$(n \times n)$-Matrizen. Für (3×3)-Matrizen sieht diese wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \left|\begin{smallmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right| & -\left|\begin{smallmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{smallmatrix}\right| & \left|\begin{smallmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{smallmatrix}\right| \\ -\left|\begin{smallmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right| & \left|\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{smallmatrix}\right| & -\left|\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{smallmatrix}\right| \\ \left|\begin{smallmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right| & -\left|\begin{smallmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{smallmatrix}\right| & \left|\begin{smallmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{smallmatrix}\right| \end{pmatrix}^{t} \tag{IV.15}$$

wobei $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| = ad - bc$ und

$$D := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Dabei ist A genau dann invertierbar wenn $D \neq 0$, d.h. genau dann wenn die rechte Seite in Gleichung (IV.15) Sinn macht. Die analogen Formeln für größere n sind noch komplexer und erfordern mehr Rechenaufwand als der oben beschriebene Algorithmus mit Zeilenumformungen.

IV.6. Basisdarstellung. Wir haben in Abschnitt II.4 lineare Abbildungen $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ durch Matrizen beschrieben. Wollen wir lineare Abbildugen zwischen allgemeinen endlich-dimensionalen Vektorräumen, $\varphi\colon V \to W$, durch Matrizen darstellen, ist es notwendig geordnete Basen B und C der beiden Vektorräume V und W zu fixieren. Damit kann jeder lineare Abbildung φ eine Matrix $[\varphi]_{CB}$ zugeordnet werden, und wieder entspricht die Matrizenmultiplikation der Komposition von Abbildungen, siehe Satz IV.6.15 unten. Diese Matrix $[\varphi]_{CB}$ hängt von der Wahl der Basen B und C ab. Gehen wir zu anderen Basen, über transformiert sich die Matrixdarstellung mit sogenannten Basiswechselmatrizen, siehe Korollar IV.6.21 unten. In diesem Zusammenhang ist es auch zweckmäßig die zu einer Basis von V duale Basis von V^* zu betrachten, und damit wollen wir diesen Abschnitt beginnen.

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\dim(V) = n$, und $b_1, \dots, b_n$ eine geordnete Basis von V. Nach Proposition IV.1.2(d) existiert zu jedem $i \in \{1, \dots, n\}$ ein eindeutig bestimmtes lineares Funktional $b_i^*\colon V \to \mathbb{K}$, sodass

$$b_i^*(b_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \text{, und} \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases} \tag{IV.16}$$

Wir erhalten somit Elemente $b_1^*, \dots, b_n^* \in V^*$.

IV.6.1. Lemma. *In dieser Situation ist $b_1^*, \dots, b_n^*$ eine Basis von V^*.*

Beweis. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, sodass

$$\lambda_1 b_1^* + \dots + \lambda_n b_n^* = 0.$$

Auswerten bei b_j liefert unter Verwendung von (IV.16)

$$0 = \big(\lambda_1 b_1^* + \dots + \lambda_n b_n^*\big)(b_j) = \lambda_1 b_1^*(b_j) + \dots + \lambda_n b_n^*(b_j) = \lambda_j,$$

für jedes $j = 1, \dots, n$. Dies zeigt, dass die Vektoren $b_1^*, \dots, b_n^*$ linear unabhängig in V^* sind. Nach Korollar IV.1.17 müssen diese Vektoren eine Basis von V^* bilden, denn es gilt $\dim(V^*) = \dim(V) = n$, siehe Korollar IV.2.15. $\square$

IV.6.2. Definition (Duale Basis). Ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $\dim(V) = n$, und $b_1, \dots, b_n$ eine geordnete Basis von V, dann werden die durch (IV.16) eindeutig bestimmten Funktionale $b_1^*, \dots, b_n^*$ als die zu $b_1, \dots, b_n$ *duale Basis* von V^* bezeichnet, vgl. Lemma IV.6.1.

IV.6.3. Bemerkung. Sei $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ und $B := (b_1|\cdots|b_n)$ die Matrix mit Spaltenvektoren b_i. Weiters bezeichnen $a_1, \dots, a_n$ die Zeilen der Inversen Matrix B^{-1}. Fassen wir $a_i \in M_{1\times n}(\mathbb{K})$ als Element von $(\mathbb{K}^n)^*$ auf, $M_{1\times n}(\mathbb{K}) \cong L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) = (\mathbb{K}^n)^*$, dann ist $a_1, \dots, a_n$ die zu $b_1, \dots, b_n$ duale Basis, genauer $b_i^* = \psi_{a_i}$, d.h. $b_i^* \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $b_i^*(x) = a_i x$, $x \in \mathbb{K}^n$, denn die Relation $B^{-1}B = I_n$ ist offensichtlich zu den Bedingungen (IV.16) äquivalent. Die duale Basis einer Basis von $\mathbb{K}^n$ lässt sich daher durch Matrizeninversion berechnen.

IV.6.4. Beispiel. Es soll die zur Basis $b_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$, $b_2 = \left(\begin{smallmatrix}3\\7\end{smallmatrix}\right)$ von $\mathbb{K}^2$ duale Basis von $(\mathbb{K}^2)^*$ bestimmt werden. Für die Inverse der Matrix $B = \left(\begin{smallmatrix}1&3\\2&7\end{smallmatrix}\right)$ gilt $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}7&-3\\-2&1\end{smallmatrix}\right)$. Für die duale Basis erhalten wir also $b_1^* = \psi_{(7,-3)}$ und $b_2^* = \psi_{(-2,1)}$. Expliziter, $b_1^* \colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$, $b_1^*\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = (7,-3)\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = 7x - 3y$, und $b_2^* \colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$, $b_2^*\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = (-2,1)\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = -2x + y$.

IV.6.5. Beispiel. Wir wollen die zur Basis $b_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right)$, $b_2 = \left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\\-2\end{smallmatrix}\right)$, $b_3 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\2\end{smallmatrix}\right)$ von $\mathbb{K}^3$ duale Basis von $(\mathbb{K}^3)^*$ bestimmen. Zeilenumformungen liefern:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\2&-1&0&0&1&0\\3&-2&2&0&0&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&1&-1&-3&0&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-1&1&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&0&1\\0&1&0&-4&-1&2\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

Daraus schließen wir

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-1&0\\3&-2&2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-2&0&1\\-4&-1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix},$$

für die duale Basis gilt daher $b_1^* = \psi_{(-2,0,1)}$, $b_2^* = \psi_{(-4,-1,2)}$, $b_3^* = \psi_{(-1,-1,1)}$, genauer $b_1^*\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = -2x + z$, $b_2^*\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = -4x - y + 2z$ und $b_3^*\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = -x - y + z$.

IV.6.6. Beispiel (Duale Basis der Standardbasis). Die zur Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ von $\mathbb{K}^n$ duale Basis $e_1^*, \dots, e_n^*$ von $(\mathbb{K}^n)^*$ wird durch die $(1\times n)$-Matrizen $e_1^t, \dots, e_n^t$ repräsentiert, genauer $e_i^* = \psi_{e_i^t}$, d.h. $e_i^* \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ ist gerade die Projektion auf die i-te Koordinate, $e_i^*(x) = x_i$, $x \in \mathbb{K}^n$.

IV.6.7. Lemma. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V, $b_1^*, \dots, b_n^*$ die dazu duale Basis von V^* und $b_1^{**}, \dots, b_n^{**}$ die zu letzterer duale Basis von V^{**}. Dann gilt*

$$b_i^{**} = \iota(b_i), \qquad 1 \leq i \leq n,$$

wobei $\iota \colon V \to V^{**}$ die natürliche Abbildung aus Proposition III.4.13 bezeichnet. In anderen Worten: $b_i^{**}(\alpha) = \alpha(b_i)$, für alle $\alpha \in V^*$.

Beweis. Für $1 \leq i, j \leq n$ gilt nach (IV.16)

$$\iota(b_i)(b_j^*) = b_j^*(b_i) = \delta_{ji} = \delta_{ij} = b_i^{**}(b_j^*).$$

Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition IV.1.2(d) folgt daher $\iota(b_i) = b_i^{**}$, denn diese beiden Funktionale $V^* \to \mathbb{K}$ stimmen auf der Basis $b_1^*, \dots, b_n^*$ von V^* überein. □

IV.6.8. Bemerkung. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis $b_1, \dots, b_n$. Bezeichnet $b_1^*, \dots, b_n^*$ die dazu duale Basis von V^*, dann existiert genau eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V^*$ mit $\varphi(b_i) = b_i^*$, $i = 1, \dots, n$, und diese Abbildung ist ein Isomorphismus. Bezeichnet $b_1^{**}, \dots, b_n^{**}$ die zu $b_1^*, \dots, b_n^*$ duale Basis von V^{**}, dann existiert analog ein Isomorphismus $\psi\colon V^* \to V^{**}$ mit $\psi(b_i^*) = b_i^{**}$, $i = 1, \dots, n$. Obwohl φ und ψ beide von der ursprünglichen Basis abhängen, ist deren Komposition unabhängig von dieser Basis, denn nach Lemma IV.6.7 gilt $\psi \circ \varphi = \iota\colon V \to V^{**}$.

IV.6.9. Proposition. *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Jede Basis von V^* ist die duale Basis einer Basis von V.*

Beweis. Sei also $\beta_1, \dots, \beta_n$ eine Basis von V^*, wobei $n = \dim(V^*)$. Weiters bezeichne $\beta_1^*, \dots, \beta_n^*$ die dazu duale Basis von V^{**}. Nach Korollar IV.2.15 ist $\iota\colon V \to V^{**}$ ein Isomorphismus. Setzen wir $b_j := \iota^{-1}(\beta_j^*)$, $1 \leq j \leq n$, dann bildet also $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V, siehe Proposition IV.1.3. Bezeichnet $b_1^*, \dots, b_n^*$ die dazu dual Basis von V^*, dann gilt für alle $1 \leq i, j \leq n$,

$$\beta_i(b_j) = \iota(b_j)(\beta_i) = \beta_j^*(\beta_i) = \delta_{ji} = \delta_{ij} = b_i^*(b_j),$$

also stimmen die Funktionale β_i und b_i^* auf einer Basis von V überein. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition IV.1.2(d) folgt daher $\beta_i = b_i^*$. Dies zeigt, dass $\beta_1, \dots, \beta_n$ die zu $b_1, \dots, b_n$ duale Basis ist. □

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine geordnete Basis von V. Nach Proposition IV.1.2 ist

$$\phi_B\colon \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cong} V, \quad \phi_B(x) := x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n,$$

ein linearer Isomorphismus. Zu jedem $v \in V$ existieren daher eindeutig bestimmte Skalare $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, sodass $v = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$. Der Vektor

$$[v]_B := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

wird als *Koordinatenvektor von v bezüglich der Basis B* bezeichnet. Nach Konstruktion ist $V \to \mathbb{K}^n$, $v \mapsto [v]_B$, gerade die Umkehrabbildung von ϕ_B, für jedes $v \in V$ gilt daher

$$v = \phi_B([v]_B) = ([v]_B)_1 b_1 + \cdots + ([v]_B)_n b_n, \tag{IV.17}$$

und auch $[\phi_B(x)]_B = x$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$. Für die Basisvektoren erhalten wir

$$[b_i]_B = e_i, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Aus der Linearität der Umkehrabbildung folgt weiters

$$[v_1 + v_2]_B = [v_1]_B + [v_2]_B \quad \text{und} \quad [\lambda v]_B = \lambda [v]_B \tag{IV.18}$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Die Komponenten von $[v]_B$ können auch mit Hilfe der zu B dualen Basis $B^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ beschrieben werden, für die i-te Komponente gilt

$$([v]_B)_i = b_i^*(v), \qquad 1 \leq i \leq n, \tag{IV.19}$$

denn $b_i^*(v) = b_i^*\big(x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n\big) = x_1 b_i^*(b_1) + \cdots + x_n b_i^*(b_n) = x_i = ([v]_B)_i$.

IV.6.10. Bemerkung. Ist etwa $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ und sollen die Koordinaten eines Vektors $v \in \mathbb{K}^n$ bezüglich B bestimmt werden, so muss das Gleichungssystem

$$x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n = v$$

gelöst werden, die Koordinaten von v bezüglich B sind dann

$$[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Werden die Koordinaten von vielen verschiedenen Vektoren benötigt, dann ist es zweckmäßig zunächst die duale Basis B^* zu bestimmen, wir erhalten die Koordinaten eines beliebigen Vektors v dann sofort aus (IV.19),

$$[v]_B = \begin{pmatrix} b_1^*(v) \\ \vdots \\ b_n^*(v) \end{pmatrix} = (b_1|\cdots|b_n)^{-1} v,$$

vgl. Bemerkung IV.6.3.

IV.6.11. Beispiel. Betrachte die Basis $B = (b_1, b_2)$ von $\mathbb{K}^2$, wobei $b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $b_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$. Es sollen die Koordinaten des Vektors $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ bezüglich B bestimmt werden. In Beispiel IV.6.4 haben wir die zu B duale Basis berechnet, $b_1^* = \psi_{(7,-3)}$ und $b_2^* = \psi_{(-2,1)}$. Mit (IV.19) folgt $[v]_B = \left(\begin{smallmatrix} b_1^*(v) \\ b_2^*(v) \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 9 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$. Die Entwicklung des Vektors v in der Basis B ist daher $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) = 9b_1 - 2b_2 = 9\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) - 2\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$.

IV.6.12. Beispiel. Betrachte die Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ von $\mathbb{K}^3$, wobei

$$b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \quad b_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{und} \quad b_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right).$$

Es sollen die Koordinaten des Vektors $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3$ bezüglich der Basis B bestimmt werden. In Beispiel IV.6.5 haben wir die zu B duale Basis bestimmt,

$b_1^* = \psi_{(-2,0,1)}$, $b_2^* = \psi_{(-4,-1,2)}$ und $b_3^* = \psi_{(-1,-1,1)}$. Mit (IV.19) folgt

$$[v]_B = \begin{pmatrix} b_1^*(v) \\ b_2^*(v) \\ b_3^*(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

die Entwicklung des Vektors v in der Basis B ist daher

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -5b_1 - 12b_2 - 4b_3 = -5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 12\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

IV.6.13. Beispiel. Für die Koordinaten eines Vektors $x \in \mathbb{K}^n$ bezüglich der Standardbasis $E = (e_1, \dots, e_n)$ von $\mathbb{K}^n$ gilt offensichtlich

$$[x]_E = x.$$

Nach Satz II.4.4 kann jedes lineare Funktional $\alpha \in (\mathbb{K}^n)^*$ durch einen Zeilenvektor $a = (a_1, \dots, a_n) \in M_{1\times n}(\mathbb{K})$ beschrieben werden, $\alpha = \psi_a$, d.h. $\alpha(x) = ax$, $x \in \mathbb{K}^n$. Bezeichnet E^* die zur Standardbasis duale Basis von $(\mathbb{K}^n)^*$, dann gilt

$$[\alpha]_{E^*} = a^t,$$

denn $\alpha = a_1e_1^* + \cdots + a_ne_n^*$, da ja beide Seiten auf den Basisvektoren e_i übereinstimmen, $\alpha(e_i) = \psi_a(e_i) = ae_i = a_i = (a_1e_1^* + \cdots + a_ne_n^*)(e_i)$.

IV.6.14. Beispiel. Betrachte die Basis $B = (1, z, z^2)$ des Vektoraums $\mathbb{K}[z]_{\leq 2}$. Der Koordinatenvektor eines Polynoms $p = p_0 + p_1z + p_2z^2 \in \mathbb{K}[z]_{\leq 2}$ bezüglich B ist dann

$$[p]_B = [p_0 + p_1z + p_2z^2]_B = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3.$$

Der i-te Vektor der dualen Basis ist jenes lineare Funktional $\mathbb{K}[z]_{\leq 2} \to \mathbb{K}$, das einem Polynom seinen i-ten Koeffizienten zuordnet.

Sei nun $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Weiters seien $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, \dots, c_m)$ geordnete Basen von V und W. Nach Satz II.4.4 ist die Komposition $\phi_C^{-1} \circ \varphi \circ \phi_B\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ durch Multiplikation mit einer eindeutig bestimmen $(m \times n)$-Matrix gegeben. Diese Matrix wird mit $[\varphi]_{CB} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ bezeichnet und die *Matrix der linearen Abbildung φ bezüglich der Basen B und C* genannt. Die Definition lässt sich übersichtlich in folgendem kommutativen Diagramm veranschaulichen:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "\phi_B", "\cong"'] \arrow[d, "{[\varphi]_{CB}}"'] & V \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{K}^m & W \arrow[l, "\phi_C^{-1}"', "\cong"] \end{tikzcd} \qquad \text{d.h.} \quad (\phi_C^{-1} \circ \varphi \circ \phi_B)(x) = [\varphi]_{CB}\, x, \quad x \in \mathbb{K}^n. \qquad \text{(IV.20)}$$

Da $[\varphi]_{CB}\, e_j$ mit der j-ten Spalte von $[\varphi]_{CB}$ übereinstimmt, ist letztere also durch $(\phi_C^{-1} \circ \varphi \circ \phi_B)(e_j) = \phi_C^{-1}(\varphi(\phi_B(e_j))) = \phi_C^{-1}(\varphi(b_j)) = [\varphi(b_j)]_C$ gegeben. In anderen Worten, wir erhalten den j-ten Spaltenvektor von $[\varphi]_{CB}$ aus den Koordinaten bezüglich der Basis C des Bildes des j-ten Basisvektors von B, d.h. die Eintragungen in der j-ten Spalten sind gerade die Koordinaten von $\varphi(b_j)$ bezüglich C. Für die Eintragung in der i-ten Zeile der j-ten Spalte erhalten wir aus (IV.19)

$$([\varphi]_{CB})_{ij} = ([\varphi(b_j)]_C)_i = c_i^*(\varphi(b_j)), \qquad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n, \qquad \text{(IV.21)}$$

wobei $C^* = (c_1^*, \dots, c_m^*)$ die zu C duale Basis von W^* bezeichnet.

IV.6.15. Satz (Matrixdarstellung linearer Abbildungen). *Seien V, W und U drei endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$. Weiters seien B, C und D geordnete Basen von V, W und U. Für jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ und jedes $v \in V$ gilt dann*

$$[\varphi(v)]_C = [\varphi]_{CB}[v]_B, \qquad \text{(IV.22)}$$

die Koordinaten des Bildes $\varphi(v)$ können daher durch Multiplikation mit der Matrix $[\varphi]_{CB}$ aus den Koordinaten von v berechnet werden. Die Zuordnung

$$L(V, W) \cong M_{m\times n}(\mathbb{K}), \quad \varphi \leftrightarrow [\varphi]_{CB}, \qquad \text{(IV.23)}$$

ist ein linearer Isomorphismus, wobei $n = \dim(V)$ und $m = \dim(W)$. Für beliebige $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in L(V, W)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt daher

$$[\varphi_1 + \varphi_2]_{CB} = [\varphi_1]_{CB} + [\varphi_2]_{CB} \quad \text{und} \quad [\lambda\varphi]_{CB} = \lambda[\varphi]_{CB}.$$

Für jede weitere lineare Abbildung $\psi\colon W \to U$ haben wir

$$[\psi \circ \varphi]_{DB} = [\psi]_{DC}[\varphi]_{CB} \quad \text{sowie} \quad [\mathrm{id}_V]_{BB} = I_n. \qquad \text{(IV.24)}$$

Die lineare Abbildung φ ist genau dann invertierbar, wenn die Matrix $[\varphi]_{BC}$ invertierbar ist, in diesem Fall gilt

$$[\varphi^{-1}]_{BC} = [\varphi]_{CB}^{-1}. \qquad \text{(IV.25)}$$

Für jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ gilt weiters

$$\operatorname{rank}(\varphi) = \operatorname{rank}\big([\varphi]_{CB}\big). \qquad \text{(IV.26)}$$

Bezeichnen B^* und C^* die zu B bzw. C dualen Basen von V^* und W^*, dann gilt für die Matrix der dualen Abbildung $\varphi^t\colon W^* \to V^*$

$$[\varphi^t]_{B^*C^*} = [\varphi]_{CB}^t. \qquad \text{(IV.27)}$$

Beweis. Aus (IV.20) erhalten wir mit $x = [v]_B$ sofort

$$[\varphi]_{CB}[v]_B = \phi_C^{-1}(\varphi(\phi_B([v]_B)) = \phi_C^{-1}(\varphi(v)) = [\varphi(v)]_C,$$

also (IV.22). Beachte, dass

$$L(V, W) \cong L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), \qquad \varphi \leftrightarrow \phi_C^{-1} \circ \varphi \circ \phi_B,$$

ein linearer Isomorphismus mit Umkehrabbildung $\phi_C \circ \sigma \circ \phi_B^{-1} \leftrightarrow \sigma$ ist, denn

$$\phi_C^{-1} \circ (\varphi_1 + \varphi_2) \circ \phi_B = \phi_C^{-1} \circ \varphi_1 \circ \phi_B + \phi_C^{-1} \circ \varphi_2 \circ \phi_B$$

und $\phi_C^{-1}\circ(\lambda\varphi)\circ\phi_B=\lambda(\phi_C^{-1}\circ\varphi\circ\phi_B)$ für alle $\varphi,\varphi_1,\varphi_2\in L(V,W)$ und $\lambda\in\mathbb{K}$, siehe Proposition II.3.18. Zusammen mit Satz II.4.4 folgt, dass (IV.23) einen linearen Isomorphismus bildet. Aus

$$\phi_D^{-1}\circ(\psi\circ\varphi)\circ\phi_B=\bigl(\phi_D^{-1}\circ\psi\circ\phi_C\bigr)\circ\bigl(\phi_C^{-1}\circ\varphi\circ\phi\bigr),\qquad \phi_B^{-1}\circ\mathrm{id}_V\circ\phi_B=\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n},$$

und Satz II.4.4 erhalten wir nun auch (IV.24). Beachte, dass φ genau dann invertierbar ist, wenn $\phi_C^{-1}\circ\varphi\circ\phi_B$ invertierbar ist, und dass in diesem Fall

$$\phi_B^{-1}\circ\varphi^{-1}\circ\phi_C=\bigl(\phi_C^{-1}\circ\varphi\circ\phi_B\bigr)^{-1}$$

gilt. Zusammen mit Satz II.4.4 sehen wir daher, dass φ genau dann invertierbar ist, wenn $[\varphi]_{CB}$ invertierbar ist, und dass in diesem Fall (IV.25) gilt.

Nach Definition des Rangs einer Matrix gilt $\operatorname{rank}([\varphi]_{CB})=\operatorname{rank}(\phi_C^{-1}\circ\varphi\circ\phi_B)$, die Gleichung (IV.26) folgt daher aus Proposition IV.2.23.

Seien nun $B^*=(b_1^*,\dots,b_n^*)$ und $C^*=(c_1^*,\dots,c_m^*)$ die zu $B=(b_1,\dots,b_n)$ bzw. $C=(c_1,\dots,c_m)$ dualen Basen von V^* und W^*. Mit (IV.21) erhalten wir

$$\begin{aligned}\bigl([\varphi^t]_{B^*C^*}\bigr)_{ij}=b_i^{**}(\varphi^t(c_j^*))=b_i^{**}(c_j^*\circ\varphi)=\iota_V(b_i)(c_j^*\circ\varphi)\\ =(c_j^*\circ\varphi)(b_i)=c_j^*(\varphi(b_i))=([\varphi]_{CB})_{ji}=([\varphi]_{CB}^t)_{ij},\end{aligned}$$

wobei $B^{**}=(b_1^{**},\dots,b_n^{**})$ die zu B^* duale Basis von V^{**} bezeichnet, für die ja $\iota_V(b_i)=b_i^{**}$ gilt, siehe Lemma IV.6.7. Dies zeigt (IV.27). □

IV.6.16. Bemerkung. Bezeichnen $B=(e_1,\dots,e_n)$ und $C=(e_1,\dots,e_m)$ die Standardbasen von $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$, dann stimmt der Isomorphismus aus Satz IV.6.15, $L(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m)\cong M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\varphi\leftrightarrow[\varphi]_{CB}$, mit dem in Satz II.4.4 besprochenen Isomorphismus überein. In diesem Fall gilt nämlich $\phi_B=\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$ und $\phi_C=\mathrm{id}_{\mathbb{K}^m}$. Die Matrix einer linearen Abbildung $\varphi\colon\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ stimmt also mit der in Satz II.4.4 besprochenen Matrix überein.

IV.6.17. Bemerkung. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\dim(V)=n$, und B eine geordnete Basis von V. Dann ist die Zuordnung

$$\operatorname{end}(V)\cong M_{n\times n}(\mathbb{K}),\qquad \varphi\leftrightarrow[\varphi]_{BB}$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren, der sich zu einem Gruppenisomorphismus

$$\mathrm{GL}(V)\cong\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\qquad \varphi\leftrightarrow[\varphi]_{BB}$$

einschränkt. Dies folgt sofort aus Satz IV.6.15.

IV.6.18. Beispiel. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\pi\colon V\to V$ ein Projektor. Sei $b_1,\dots,b_k$ eine Basis von $\operatorname{img}(\pi)$ und $b_{k+1},\dots,b_n$ eine Basis von

$\ker(\pi)$. Da $V = \operatorname{img}(\pi) \oplus \ker(\pi)$ ist $B := (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V und

$$[\pi]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad [\pi']_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\pi' = \mathrm{id}_V - \pi$ den komplementären Projektor auf $\ker(\pi)$ längs $\operatorname{img}(\pi)$ bezeichnet. Für die Spiegelung $\sigma = \pi - \pi'$ an $\operatorname{img}(\pi)$ längs $\ker(\pi)$ und die dazu komplementäre Spiegelung $\sigma' = -\sigma = \pi' - \pi$ an $\ker(\pi)$ längs $\operatorname{img}(\pi)$ haben wir

$$[\sigma]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}, \quad [\sigma']_{BB} = \begin{pmatrix} -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

IV.6.19. Beispiel. Wir betrachten den reellen Vektorraum der glatten Funktionen, $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Die Ableitung definiert eine lineare Abbildung

$$C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f \mapsto f',$$

denn $(f+g)' = f' + g'$ und $(\lambda f)' = \lambda f'$, für alle $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Nach Beispiel III.2.22 sind die beiden Funktionen $\sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ linear unabhängig, spannen also einen 2-dimensionalen Teilraum $W := \langle \sin, \cos \rangle \subseteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ auf. Da $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$, schränkt sich die Ableitung zu einer linearen Abbildung $D \colon W \to W$, $D(f) := f'$, ein. Für die Matrix von D bezüglich der geordneten Basis $B = (\sin, \cos)$ von W erhalten wir

$$[D]_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit (IV.24) folgt daraus etwa

$$[D \circ D]_{BB} = [D]_{BB}[D]_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

was genau $(D \circ D)(\sin) = \sin'' = -\sin$ und $(D \circ D)(\cos) = \cos'' = -\cos$ entspricht.

IV.6.20. Beispiel. Betrachte den $(n+1)$-dimensionalen Vektorraum $V = \mathbb{R}[z]_{\leq n}$ mit geordneter Basis $B = (1, z, z^2, z^3, \dots, z^n)$, siehe Beispiel III.3.10. Die Ableitung definiert eine lineare Abbildung $D \colon W \to W$, $D(p) := p'$, denn es gilt $(p+q)' = p' + q'$ und $(\lambda p)' = \lambda p'$, für alle $p, q \in \mathbb{R}[z]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Da $D(z^k) = kz^{k-1}$, ist die Matrix von D bezüglich der Basis B durch

$$[D]_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R}).$$

gegeben. Sezten wir $n = 3$ und betrachten die lineare Abbildung

$$P\colon \mathbb{R}[z]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[z]_{\leq 3}, \qquad P(p) := 4p + 3p' + 2p'' = (4\,\mathrm{id} + 3D + 2D^2)(p),$$

dann erhalten wir mit den Rechenreglen aus Satz IV.6.15 sofort

$$\begin{aligned} [P]_{BB} &= 4I_n + 3[D]_{BB} + 2([D]_{BB})^2 \\ &= 4\begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&3\\0&0&0&0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4&3&4&0\\0&4&6&12\\0&0&4&9\\0&0&0&4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da diese Matrix invertierbar ist, gibt es also zu jedem Polynom $q \in \mathbb{R}[z]_{\leq 3}$ genau ein Polynom $p \in \mathbb{R}[z]_{\leq 3}$ für das $4p + 3p' + 2p'' = q$ gilt. Durch Inversion der Matrix $[P]_{BB}$ ließe sich dieses Polynom p auch sofort berechnen.

Seien nun $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n)$ zwei geordnete Basen von V. Unter der *Matrix zum Basiswechsel von B nach $\tilde{B}$* verstehen wir die Matrix

$$T_{\tilde{B}B} := [\mathrm{id}_V]_{\tilde{B}B} \in M_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

Nach Definition stimmt der j-te Spaltenvektor von $T_{\tilde{B}B}$ mit $[b_j]_{\tilde{B}}$ überein. Für den Eintrag in der i-ten Zeile der j-ten Spalte gilt daher

$$(T_{\tilde{B}B})_{ij} = ([b_j]_{\tilde{B}})_i = \tilde{b}_i^*(b_j), \qquad 1 \leq i, j \leq n,$$

wobei $\tilde{B}^* = (\tilde{b}_1^*, \dots, \tilde{b}_n^*)$ die zu $\tilde{B}$ duale Basis bezeichnet.

IV.6.21. Korollar (Basiswechsel). *Seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$. Weiters seien B und $\tilde{B}$ zwei geordnete Basen von V und C und $\tilde{C}$ zwei geordnete Basen von W. Die Basiswechselmatrizen sind stets invertierbar mit Inverser*

$$T_{\tilde{B}B}^{-1} = T_{B\tilde{B}} \tag{IV.28}$$

Für jedes $v \in V$ gilt

$$[v]_{\tilde{B}} = T_{\tilde{B}B}[v]_B, \tag{IV.29}$$

wir erhalten also die Koordinaten von v bezüglich der Basis $\tilde{B}$ durch Multiplikation mit der Matrix $T_{\tilde{B}B}$ aus den Koordinaten bezüglich B. Für jede Abbildung $\varphi\colon V \to W$ gilt

$$[\varphi]_{\tilde{C}\tilde{B}} = T_{\tilde{C}C}[\varphi]_{CB}T_{B\tilde{B}}. \tag{IV.30}$$

Für die Basiswechselmatrix der dualen Basen gilt

$$T_{B^*\tilde{B}^*} = T^t_{\tilde{B}B}. \tag{IV.31}$$

Beweis. Da die identische Abbildung id_V offensichtlich invertierbar ist, muss auch $T_{\tilde{B}B} = [\mathrm{id}_V]_{\tilde{B}B}$ invertierbar sein und mit (IV.25) erhalten wir

$$T^{-1}_{\tilde{B}B} = [\mathrm{id}_V]^{-1}_{\tilde{B}B} = [\mathrm{id}_V^{-1}]_{B\tilde{B}} = [\mathrm{id}_V]_{B\tilde{B}} = T_{B\tilde{B}},$$

also (IV.28). Gleichung (IV.29) folgt aus (IV.22), denn

$$[v]_{\tilde{B}} = [\mathrm{id}_V(v)]_{\tilde{B}} = [\mathrm{id}_V]_{\tilde{B}B}[v]_B = T_{\tilde{B}B}[v]_B.$$

Aus (IV.24) folgt

$$[\varphi]_{\tilde{C}\tilde{B}} = [\mathrm{id}_W \circ\varphi \circ \mathrm{id}_V]_{\tilde{B}\tilde{C}} = [\mathrm{id}_W]_{\tilde{C}C}[\varphi]_{CB}[\mathrm{id}_V]_{B\tilde{B}} = T_{\tilde{C}C}[\varphi]_{CB}T_{B\tilde{B}},$$

also (IV.30). Schließlich erhalten wir aus (IV.27) auch

$$T_{B^*\tilde{B}^*} = [\mathrm{id}_{V^*}]_{B^*\tilde{B}^*} = [\mathrm{id}^*_V]_{B^*\tilde{B}^*} = [\mathrm{id}_V]^t_{\tilde{B}B},$$

womit auch (IV.31) gezeigt wäre. □

IV.6.22. Bemerkung. Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ und bezeichne $E = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$. Dann gilt offenbar

$$T_{EB} = (b_1|\cdots|b_n),$$

und mit Korollar IV.6.21 erhalten wir erneut, vgl. Bemerkung IV.6.10,

$$[x]_B = T_{BE}[x]_E = T^{-1}_{EB}x = (b_1|\cdots|b_n)^{-1}x$$

für jedes $x \in \mathbb{K}^n$, denn $[x]_E = x$. Für die duale Basis gilt $[b^*_i]_{B^*} = e_i$, also

$$([b^*_j]_{E^*})^t = \big(T_{E^*B^*}[b^*_j]_{B^*}\big)^t = \big(T^t_{BE}e_i\big)^t = e^t_iT_{BE} = e^t_i(b_1|\cdots|b_n)^{-1},$$

d.h. die Matrix die dem linearen Funktional $b^*_i\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ entspricht, $b^*_i = \psi_{a_i}$, $a_i \in M_{1\times n}(\mathbb{K})$, ist gerade die i-te Zeile von $(b_1|\cdots|b_n)^{-1}$. Auch dies haben wir weiter oben schon festgehalten, vgl. Bemerkung IV.6.3. Ist $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\varphi(x) = Ax$, dann gilt offenbar $[\varphi]_{EE} = A$, vgl. Bemerkung IV.6.16. Ist $C = (c_1, \dots, c_n)$ eine weitere Basis von $\mathbb{K}^n$ so erhalten wir mittels Korollar IV.6.21

$$[\varphi]_{CB} = T^{-1}_{EC}[\varphi]_{EE}T_{EB} = (c_1|\cdots|c_n)^{-1}A(b_1|\cdots|b_n).$$

IV.6.23. Beispiel. Betrachte die beiden geordneten Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad E = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

von $\mathbb{R}^3$. Offensichtlich gilt dann

$$T_{EB} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

Nach (IV.28) folgt

$$T_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & 5 & -2 \\ -6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies erlaubt es nun die Koordinaten eines Vektors in $\mathbb{R}^3$ bzüglich der Basis B zu bestimmen. Betrachten wir etwa $x = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 9 \\ 13 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$, dann gilt $[x]_E = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 9 \\ 13 \end{smallmatrix}\right)$ also

$$[x]_B = T_{BE}[x]_E = \begin{pmatrix} -9 & 5 & -2 \\ -6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

d.h. $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 9 \\ 13 \end{smallmatrix}\right) = 1\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + 2\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + 3\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$. Betrachte wir die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -7x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ 13x_2 - 6x_3 \\ 12x_2 - 5x_1 \end{pmatrix},$$

dann gilt offenbar

$$[\varphi]_{EE} = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -2 \\ 0 & 13 & -6 \\ 0 & 12 & -5 \end{pmatrix}.$$

Mit (IV.30) können wir nun auch die Matrix von φ bezüglich B berechnen,

$$\begin{aligned} [\varphi]_{BB} &= T_{BE}[\varphi]_{EE}T_{EB} \\ &= \begin{pmatrix} -9 & 5 & -2 \\ -6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 4 & -2 \\ 0 & 13 & -6 \\ 0 & 12 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir verstehen dadurch die Abbildung φ besser, es handelt sich um eine Spiegelung am Teilraum $\left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$ längs des Teilraums $\left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

IV.6.24. Beispiel. Wir wollen eine lineare Abbildung $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bestimmen, die die Punkte auf der Geraden $\langle\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)\rangle$ unverändern lässt und auf Punkten der Gerade $\langle\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)\rangle$ durch Multiplikation mit -1 wirkt. Beachte, dass die beiden Vektoren $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden. Nach Proposition III.3.2 gibt es also eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ für die $\sigma\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $\sigma\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) = -\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$ gilt. Für ihre Matrix bezüglich der Basis $B = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right))$ gilt offenbar $[\sigma]_{BB} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Bezeichnet $E = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$ die Standardbasis dann gilt $T_{EB} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ und daher $T_{BE} = T_{EB}^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, siehe (IV.25). Mit (IV.24) folgt

$$[\sigma]_{EE} = T_{EB}[\sigma]_{BB}T_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 6 \\ -20 & 11 \end{pmatrix}$$

die gesuchte Abbildung ist daher durch $\sigma\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) := \left(\begin{smallmatrix} -11x_1 + 6x_2 \\ -20x_1 + 11x_2 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben.

IV.6.25. Beispiel. Betrachte die beiden geordneten Basen

$$B = (1, z, z^2, z^3) \qquad \text{und} \qquad \tilde{B} = \big(1, z+1, (z+1)^2, (z+1)^3\big)$$

des Vektorraums $\mathbb{K}[z]_{\leq 3}$. Dann gilt

$$T_{B\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_{\tilde{B}B} = T_{B\tilde{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ist etwa $p = 3 + z - 7z^2 + 9z^3$, dann folgt

$$[p]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \text{also} \quad [p]_{\tilde{B}} = T_{\tilde{B}B}[p]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 42 \\ -34 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Gleichung bedeutet gerade $p = -14 + 42(z+1) - 34(z+1)^2 + 9(z+1)^3$.

Wir beenden diesen Abschnitt mit folgender Anwendung:

IV.6.26. Satz. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ paarweise verschieden und $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann existiert ein eindeutiges Polynom $p \in \mathbb{K}[z]_{\leq n}$, sodass $p(x_i) = y_i$ für alle $i = 0, \dots, n$. Insbesondere besitzt jedes nicht-triviale Polynom n-ten Grades, $0 \neq p \in \mathbb{K}[z]_{\leq n}$, höchstens n verschiedene Nullstellen in $\mathbb{K}$. Darüber hinaus ist die sogenannte* Vandermonde-Matrix*,*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{K}),$$

invertierbar.

Beweis. Für das Polynom

$$p := \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i(z-x_0)(z-x_1)\cdots(z-x_{i-1})(z-x_{i+1})\cdots(z-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \in \mathbb{K}[z]_{\leq n}$$

gilt offensichtlich $p(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$. Die lineare Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{K}[z]_{\leq n} \to \mathbb{K}^{n+1}, \quad \phi(p) := \begin{pmatrix} p(x_0) \\ p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix},$$

ist also surjektiv. Nach Korollar IV.2.11 ist ϕ daher ein Isomorphismus, denn $\dim(\mathbb{K}[z]_{\leq n}) = n + 1 = \dim(\mathbb{K}^{n+1})$. Die Injektivität von ϕ bedeutet aber gerade, dass das Polynom p durch seine Werte $p(x_0), \dots, p(x_n)$ eindeutig bestimmt ist.

Bezeichnet $E = (e_0, \dots, e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^{n+1}$ und $B = (1, z, z^2, \dots, z^n)$ die Basis der Monome in $\mathbb{K}[z]_{\leq n}$, dann gilt offenbar

$$[\phi]_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{K}).$$

Da ϕ invertierbar ist, muss also auch die Vandermonde-Matrix invertierbar sein, siehe Satz IV.6.15. □

Aus dem vorangehenden Satz erhalten wir sofort:

IV.6.27. KOROLLAR. *Ist $\mathbb{K}$ ein Körper mit unendlich vielen Elementen, dann ist die Abbildung $\mathbb{K}[z] \to F(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, die einem Polynom p die Polynomfunktion $x \mapsto p(x)$, $x \in \mathbb{K}$, zuordnet injektiv. In diesem Fall ist ein Polynom also völlig durch die entsprechende Polynomfunktion bestimmt.*

IV.6.28. BEMERKUNG. Für endliche Körper $\mathbb{K}$ bleibt das vorangehende Resultat nicht richtig. In diesem Fall ist nämlich $F(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ endlich-dimensional, aber $\dim(\mathbb{K}[z]) = \infty$, es kann daher keine injektive Abbildung $\mathbb{K}[z] \to F(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ geben.

Die Tatsache, dass ein nicht-triviales Polynom n-ten Grades, $0 \neq p \in \mathbb{K}[z]_{\leq n}$, höchstens n verschiedene Nullstellen haben kann lässt sich auch auf andere Art beweisen. Ist nämlich $x_0 \in \mathbb{K}$ Nullstelle von p, dann liefert Polynomdivision ein nicht-triviales Polynom $0 \neq q \in \mathbb{K}[z]_{\leq n-1}$, sodass $p = (z - x_0)q$. Ist $x_1 \in \mathbb{K}$ eine weitere Nullstelle von p und $x_0 \neq x_1$, dann muss x_1 eine Nullstelle von q sein und wir können einen weiteren Linearfaktor abspalten. Da der Grad des Polynoms q strikt kleiner als der Grad von p ist, folgt daraus, dass p höchstens n verschiedene Nullstellen haben kann.

Literatur

[1] A. Cap, Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie. Skriptum zur gleichnamigen Vorlesung aus dem Sommeremester 2011. Erhältlich unter `http://www.mat.univie.ac.at/~cap/files/Linalg.pdf`

[2] W. H. Greub, *Linear algebra.* Third edition. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **97**. Springer-Verlag, New York, 1967.

[3] K. Jänich, *Lineare Algebra.* Springer Verlag, 2008.

[4] K. Jänich, *Topologie.* Springer Verlag, Berlin–Heidelberg, 1990.

[5] S. Lang, *Linear algebra.* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1987.

[6] S. Roman, *Advanced linear algebra.* Graduate Texts in Mathematics **135**, Springer, New York, 2008.

[7] H. Schichl und R. Steinbauer, *Einführung in das mathematische Arbeiten.* Springer Verlag, 2009.

[8] G. Strang, *Linear algebra and its applications.* Academic Press, New York–London, 1980.