Einführung in die lineare Algebra und Geometrie

Wintersemester 2011/12

Stefan Haller

Inhaltsverzeichnis

Dies ist ein Vorlesungsskriptum zu einer Lehrveranstaltung, die ich im Wintersemester 2011/12 an der Universität Wien gehalten habe. Es steht unter

`http://www.mat.univie.ac.at/~stefan/LA.html`

zur Verfügung.

Wien, am 29. Jänner 2012

I. Einleitung

Die lineare Algebra beschäftigt sich mit dem Studium linearer Abbildungen zwischen Vektorräumen und ist somit auch das geeignete Werkzeug um lineare Gleichungssysteme zu untersuchen. Lösbarkeitsfragen zu linearen Gleichungssystemen haben sehr einfache qualitative Antworten. Selbst große lineare Gleichungssysteme können effizient mit Computerunterstützung gelöst werden, diese Algorithmen haben mittlerweile eine Unzahl an konkreten Anwendungen gefunden. Lineare Gleichungssysteme sind aber auch von theoretischem Interesse. Etwa lassen sich interessantere, d.h. nicht-lineare Gleichungen oft erfolgreich durch lineare approximieren und die Lösbarkeit der linearen Approximation erlaubt manchmal Rückschlüsse auf das ursprüngliche, nicht-lineare Problem.

In dieser Einleitung wollen wir einige der Resultate der folgenden Kapitel anhand eines konkreten Beispiels illustrieren.

I.1. Ein lineares Gleichungssystem. Betrachte folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} x_1 & -x_2 & -9x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +3x_7 & = & y_1 \\ 2x_1 & -x_2 & -9x_3 & +9x_4 & +3x_5 & +7x_6 & +11x_7 & = & y_2 \\ -x_1 & +3x_2 & +27x_3 & +13x_4 & +2x_5 & +9x_6 & +9x_7 & = & y_3 \\ x_1 & -2x_2 & -18x_3 & -6x_4 & +2x_5 & -4x_6 & +2x_7 & = & y_4 \\ 2x_1 & +x_2 & +9x_3 & +23x_4 & +8x_5 & +17x_6 & +27x_7 & = & y_5 \end{array} \tag{I.1}$$

Für welche reelle Zahlen y_1, y_2, y_3, y_4 und y_5 besitzt dieses Gleichungssystem eine Lösung, d.h. existieren reelle Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 und x_7, die allen fünf Gleichungen genügen? Wieviele solche Lösungen gibt es, und wie lassen sie sich finden?

Wir wollen den rechnerischen Aspekt auf später verschieben und zunächst erläutern, was sich mit den Methoden der linearen Algebra über dieses Gleichungssystem sagen lässt, ohne überhaupt zu rechnen zu beginnen. Um die Notation zu vereinfachen definieren wir mit Hilfe der linken Seite von (I.1) eine Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$,

$$\psi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 - x_2 - 9x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7 \\ 2x_1 - x_2 - 9x_3 + 9x_4 + 3x_5 + 7x_6 + 11x_7 \\ -x_1 + 3x_2 + 27x_3 + 13x_4 + 2x_5 + 9x_6 + 9x_7 \\ x_1 - 2x_2 - 18x_3 - 6x_4 + 2x_5 - 4x_6 + 2x_7 \\ 2x_1 + x_2 + 9x_3 + 23x_4 + 8x_5 + 17x_6 + 27x_7 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssystem (I.1) lässt sich damit in kompakter Form schreiben,

$$\psi(x) = y \tag{I.2}$$

wobei $y \in \mathbb{R}^5$ und $x \in \mathbb{R}^7$. Die Linearität der Gleichungen spiegelt sich in folgender Eigenschaft der Abbildung ψ wider,

$$\psi(x + \tilde{x}) = \psi(x) + \psi(\tilde{x}) \quad \text{und} \quad \psi(\lambda x) = \lambda\psi(x), \tag{I.3}$$

für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^7$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Solche Abbildungen werden wir später als *lineare Abbildungen* bezeichnen, vgl. Übungsaufgabe 1.

Wir betrachten zunächst den Fall $y = 0$, und stellen folgende Frage: Wie lässt sich die Lösungsmenge des Gleichungssystems $\psi(x) = 0$ beschreiben? Dieses Gleichungssystem, $\psi(x) = 0$, wird das assozierte *homogene Gleichungssystem* genannt, wir bezeichnen seine Lösungsmenge mit

$$L := \{x \in \mathbb{R}^7 : \psi(x) = 0\}.$$

Die Menge L besteht daher aus allen Vektoren $x \in \mathbb{R}^7$, deren Komponenten $x_1, \dots, x_7$ folgendes Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} x_1 & -x_2 & -9x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +3x_7 & = & 0 \\ 2x_1 & -x_2 & -9x_3 & +9x_4 & +3x_5 & +7x_6 & +11x_7 & = & 0 \\ -x_1 & +3x_2 & +27x_3 & +13x_4 & +2x_5 & +9x_6 & +9x_7 & = & 0 \\ x_1 & -2x_2 & -18x_3 & -6x_4 & +2x_5 & -4x_6 & +2x_7 & = & 0 \\ 2x_1 & +x_2 & +9x_3 & +23x_4 & +8x_5 & +17x_6 & +27x_7 & = & 0 \end{array} \tag{I.4}$$

Da offensichtlich $\psi(0) = 0$ gilt, besitzt das homogene Gleichungssystem wenigstens die *triviale Lösung* $x = 0$, die Lösungsmenge ist daher nicht leer, es gilt $0 \in L$. Darüber hinaus hat L folgende Eigenschaft: Sind x und $\tilde{x}$ aus L, dann liegt auch ihre Summe $x+\tilde{x}$ in L, und für jede reelle Zahl λ gilt auch $\lambda x \in L$. Dies folgt sofort aus der Linearität von ψ, siehe (I.3) und Übungsaufgabe 2. Teilmengen mit dieser Eigenschaft werden wir später als *Teilräume* bezeichnen.

Nach den Resultaten in Kapitel IV besitzen Teilräume stets Basen, d.h. es existieren Vektoren $b_1, \dots, b_l \in L$, sodass sich jedes Element $x \in L$ in der Form

$$x = s_1 b_1 + \cdots + s_l b_l$$

schreiben lässt mit eindeutig bestimmten Skalaren $s_1, \dots, s_l \in \mathbb{R}$. Der Lösungsraum L kann daher durch l reelle Zahlen parametrisieren. Genauer, ist die Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{R}^l \xrightarrow{\cong} L, \qquad \phi\begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_l \end{pmatrix} = s_1 b_1 + \cdots + s_l b_l \tag{I.5}$$

eine Bijektion. Manchmal wird dies auch als eine *Parameterdarstellung* von L bezeichnet. Die Surjektivität von ϕ bedeutet gerade, dass wir so alle Lösungen von (I.4) erhalten, d.h.

$$L = \bigl\{s_1 b_1 + \cdots + s_l b_l \bigm| s_1, \dots, s_l \in \mathbb{R}\bigr\},$$

und die Injektivität besagt, dass die Parametrisierung ϕ jede Lösung nur einmal liefert. Beachte, dass auch die Parametrisierung ϕ linear ist, denn es gilt offensichtlich $\phi(s + \tilde{s}) = \phi(s) + \phi(\tilde{s})$ und $\phi(\lambda s) = \lambda\phi(s)$, für alle $s, \tilde{s} \in \mathbb{R}^l$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, vgl. Übugsaufgabe 1. Dies bedeutet, dass Addition und Skalarmultiplikation in L genau der üblichen Addition und Skalarmultiplikation in $\mathbb{R}^l$ entsprechen, d.h. ϕ respektiert die lineare Struktur. Wir werden solche Abbildungen später als *lineare Isomorphismen* bezeichnen.

Im Allgemeinen wird L viele verschiedene Basen besitzen, nach den Ergebnissen in Kapitel IV ist die Anzahl der Basisvektoren jedoch immer dieselbe. Diese Zahl l wird als *Dimension* des Teilraums bezeichnet, wir schreiben

$$\dim(L) = l.$$

Da L ein Teilraum von $\mathbb{R}^7$ ist, muss jedenfalls $0 \leq l \leq 7$ gelten, wie wir später sehen werden. Das *Gauß'sche Eliminationsverfahren* liefert einen effizienten Algorithmus zur Bestimmung einer Basis $b_1, \dots, b_l$ von L, wir werden dies unten an unserem Beispiel ausführen, vgl. (I.14).

Die Parameterdarstellung ist gut geeignet (alle) Lösungen des Gleichungssystems anzugeben. Soll umgekehrt überprüft werden ob ein gegebenes $x \in \mathbb{R}^7$ das Gleichungssystem (I.4) erfüllt, dann lässt sich dies durch direktes Einsetzen in die Gleichungen sofort beantworten. Dabei stellt sich allerdings die Frage, ob es wirklich notwendig ist alle Gleichungen zu überprüfen oder ob vielleicht weniger Gleichungen ausreichen. In unserem Beispiel (I.4) gilt etwa: Elf mal die erste Gleichung minus drei mal die zweite plus drei mal die dritte ergibt genau die fünfte Gleichung. Die letzte Gleichung ist daher überflüssig, sie ist eine Konsequenz der vorangehenden. Auch die vierte Gleichung lässt sich übrigens durch geschicktes Kombinieren aus den ersten drei Gleichungen herleiten, auch sie ist redundant. Es stellt sich nun heraus, dass es stets möglich ist L durch ein homogenes lineares Gleichngssystem mit $7 - l$ vielen Gleichungen zu beschreiben. Nebenbei, zumindest ein solches Gleichungssystem lässt sich stets durch Weglassen geeigneter Gleichungen in (I.4) erhalten. Wieviele und welche wegzulassen sind ist jedoch ohne Rechnung nicht klar. Wir werden unten ein möglichst einfaches Gleichungssystem für L angeben, siehe (I.13).

Nun da wir die Lösungen des homogenen Systems (I.4) zumindest qualitativ gut verstehen, stellen wir folgende naheliegende Frage: Für welche y besitzt das Gleichungssystem (I.1) wenigstens eine Lösung, bzw. wie lässt sich die Menge dieser y, d.h. das Bild der Abbildung ψ,

$$W := \psi(\mathbb{R}^7) = \big\{ y \in \mathbb{R}^5 \;\big|\; \exists x \in \mathbb{R}^7 : \psi(x) = y \big\},$$

gut beschreiben? Offensichtlich gilt $0 \in W$, denn $\psi(0) = 0$. Aus (I.3) folgt sofort, dass W einen Teilraum von $\mathbb{R}^5$ bildet, d.h. sind $y, \tilde{y} \in W$, dann gilt auch $y + \tilde{y} \in W$ und $\lambda y \in W$, für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, vgl. Übungsaufgabe 2. Nach den oben erwähnten Resultaten besitzt W daher eine Basis, d.h. es existieren Vektoren $w_1, \dots, w_k \in W$, sodass sich jedes $y \in W$ auf eindeutige Weise in der Form

$$y = t_1 w_1 + \dots + t_k w_k$$

schreiben lässt, für geeignete Skalare $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$. Auch W lässt sich daher in linearer Weise parametrisieren,

$$\mathbb{R}^k \xrightarrow{\cong} W, \qquad \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{pmatrix} \mapsto t_1 w_1 + \cdots + t_k w_k, \tag{I.6}$$

ist eine Bijektion, d.h. ein linearer Isomorphismus. Inbesondere gilt

$$W = \bigl\{ t_1 w_1 + \cdots + t_k w_k \bigm| t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R} \bigr\}.$$

Soll umgekehrt von einem gegebenen $y \in \mathbb{R}^5$ überprüft werden, ob es in W liegt, dann wäre ein Gleichungssystem für W besser geeignet. Analog zu L, lässt sich W durch ein homogenes Gleichungssystem mit $5 - k$ vielen Gleichungen in den Variablen $y_1, \dots, y_5$ beschreiben. Wir werden unten ein möglichst einfaches solches Gleichungssytem angeben, siehe (I.10), und auch eine Basis $w_1, \dots, w_k$ von W explizit bestimmen, vgl. (I.11). Nebenbei, wenigstens eine der vielen Basen von W lässt sich gewinnen, indem wir die Koeffizienten des Gleichungssystems (I.4) als Vektoren in $\mathbb{R}^5$ auffassen, d.h. die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -9 \\ -9 \\ 27 \\ -18 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 13 \\ -6 \\ 23 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 9 \\ -4 \\ 17 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 9 \\ 2 \\ 27 \end{pmatrix},$$

betrachten und geeignete davon auswählen. Wieviele und welche dies sein sollen ist jedoch nicht ganz offensichtlich.

Wir haben oben die Anzahl der Basisvektoren von W mit k bezeichnet, d.h.

$$\dim(W) = k.$$

Da W ein Teilraum von $\mathbb{R}^5$ ist, muss jedenfalls $0 \leq k \leq 5$ gelten. Interessanter Weise sind die Dimensionen von L und W nicht unabhängig voneinander. Nach einer *Dimensionsformel* in Kapitel IV muss stets

$$l + k = \dim(L) + \dim(W) = \dim(\mathbb{R}^7) = 7 \tag{I.7}$$

gelten. Insbesondere folgt $l = 7 - k \geq 7 - 5 = 2$, d.h.

$$l = \dim(L) \geq 2.$$

Es sind daher mindestens zwei reelle Parameter notwendig, um den Lösungsraum L in linearer Weise zu parametrisieren.

Wir wenden uns nun dem ursprünglichen Gleichungssystem (I.1) zu. Zu gegebenem $y \in W$ fragen wir: Wie lässt sich die Lösungsmenge des Systems $\psi(x) = y$ gut beschreiben? Wir geben auch ihr einen Namen,

$$L_y := \{x \in \mathbb{R}^7 \mid \psi(x) = y\}.$$

Da $y \in W$ gibt es zumindest eine Lösung $\xi_y \in L_y$, d.h. $\psi(\xi_y) = y$. Aus der Linearität von ψ, siehe (I.3), folgt nun sofort, dass wir alle Lösungen des Systems $\psi(x) = y$ erhalten, in dem wir zu der *speziellen Lösung* ξ_y die Lösungen des homogenen Systems addieren, d.h.

$$L_y = \{\xi_y + x \mid \psi(x) = 0\} = \xi_y + L.$$

Die Lösungsmenge L_y ensteht daher aus L durch Verschieben um ξ_y. Somit lässt sich auch L_y parametrisieren,

$$\phi_y \colon \mathbb{R}^l \xrightarrow{\cong} L_y, \qquad \phi_y \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_l \end{pmatrix} = \xi_y + s_1 b_1 + \cdots + s_l b_l, \tag{I.8}$$

ist eine Bijektion, siehe Übungsaufgabe 6.

Beachte, dass L_y im Allgemeinen keinen Teilraum bildet, denn jeder Teilraum muss den Nullvektor enthalten, aber i.A. wird $0 \notin L_y$ gelten. Auch die Parametrisierung ϕ_y ist i.A. nicht linear.[1] Allerdings ist sie *affin,* d.h. es gilt

$$\phi_y\bigl(\lambda s + (1-\lambda)\tilde{s}\bigr) = \lambda\phi_y(s) + (1-\lambda)\phi_y(\tilde{s}),$$

für alle $s, \tilde{s} \in \mathbb{R}^l$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Parametrisierung ϕ_y respektiert daher *Konvexkombinationen.*

Sind $y, \tilde{y} \in W$ und $\xi_y \in L_y$ sowie $\xi_{\tilde{y}} \in L_{\tilde{y}}$ spezielle Lösungen, d.h. $\psi(\xi_y) = y$ und $\psi(\xi_{\tilde{y}}) = \tilde{y}$, dann gilt auch $\psi(\xi_y + \xi_{\tilde{y}}) = y + \tilde{y}$ und $\psi(\lambda\xi_y) = \lambda y$, siehe (I.3), d.h. $\xi_y + \xi_{\tilde{y}}$ ist eine spezielle Lösung des Gleichungssystems $\psi(x) = y + \tilde{y}$ und $\lambda\xi_y$ ist eine spezielle Lösung von $\psi(x) = \lambda y$. Tatsächlich existiert stets eine lineare Abbilung $\xi \colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^7$, sodass $\psi(\xi(y)) = y$, für alle $y \in W$. In anderen Worten, es ist stets möglich, die speziellen Lösungen so zu wählen, dass

$$\xi_{y+\tilde{y}} = \xi_y + \xi_{\tilde{y}} \quad \text{und} \quad \xi_{\lambda y} = \lambda\xi_y$$

gilt, für alle $y, \tilde{y} \in W$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir werden unten soeine Abbildung ξ für das Gleichungssystem (I.1) angeben, siehe (I.9).

Schließlich wollen wir das Gleichungssystem (I.1) auch explizit lösen und schreiben es dazu nochmals an:

$$\begin{array}{rrrrrrrcccccc}
x_1 & -x_2 & -9x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +3x_7 & = & y_1 & & & & \\
2x_1 & -x_2 & -9x_3 & +9x_4 & +3x_5 & +7x_6 & +11x_7 & = & & y_2 & & & \\
-x_1 & +3x_2 & +27x_3 & +13x_4 & +2x_5 & +9x_6 & +9x_7 & = & & & y_3 & & \\
x_1 & -2x_2 & -18x_3 & -6x_4 & +2x_5 & -4x_6 & +2x_7 & = & & & & y_4 & \\
2x_1 & +x_2 & +9x_3 & +23x_4 & +8x_5 & +17x_6 & +27x_7 & = & & & & & y_5
\end{array}$$

[1] In der Analysis werden Funktionen der Form $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, als linear bezeichnet. Diese Abbildungen sind nur dann linear im Sinn der linearen Algebra, wenn $b = 0$ gilt, andernfalls ist ja $f(x + \tilde{x}) = a(x + \tilde{x}) + b \neq ax + b + a\tilde{x} + b = f(x) + f(\tilde{x})$. In der linearen Algebra werden solche Funktionen affin geannt.

Addieren wir die erste Gleichung (-2)-mal zur zweiten, 1-mal zur dritten, (-1)-mal zur vierten und (-2)-mal zur fünften Gleichung, so erhalten wir das äquivalente Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrcrrrrr}
x_1 & -x_2 & -9x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +3x_7 & = & y_1 & & & & \\
 & x_2 & +9x_3 & +7x_4 & +x_5 & +5x_6 & +5x_7 & = & -2y_1 & +y_2 & & & \\
 & 2x_2 & +18x_3 & +14x_4 & +3x_5 & +10x_6 & +12x_7 & = & y_1 & & +y_3 & & \\
 & -x_2 & -9x_3 & -7x_4 & +x_5 & -5x_6 & -x_7 & = & -y_1 & & & +y_4 & \\
 & 3x_2 & +27x_3 & +21x_4 & +6x_5 & +15x_6 & +21x_7 & = & -2y_1 & & & & +y_5
\end{array}$$

Beachte, dass diese sogenannten *Zeilenumformungen* rückgängig gemacht werden können, die beiden Systeme sind daher wirklich äquivalent.

Addieren wir nun die zweite Gleichung (-2)-mal zur dritten, 1-mal zur vierten und (-3)-mal zur fünften Gleichung, so erhalten wir das äquivalente Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrcrrrrr}
x_1 & -x_2 & -9x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +3x_7 & = & y_1 & & & & \\
 & x_2 & +9x_3 & +7x_4 & +x_5 & +5x_6 & +5x_7 & = & -2y_1 & +y_2 & & & \\
 & & & & x_5 & & +2x_7 & = & 5y_1 & -2y_2 & +y_3 & & \\
 & & & & 2x_5 & & +4x_7 & = & -3y_1 & +y_2 & & +y_4 & \\
 & & & & 3x_5 & & +6x_7 & = & 4y_1 & -3y_2 & & & +y_5
\end{array}$$

Addieren wir die dritte Gleichung (-2)-mal zur vierten und (-3)-mal zur fünften Gleichung, so erhalten wir das äquivalente Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrcrrrrr}
x_1 & -x_2 & -9x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & +3x_7 & = & y_1 & & & & \\
 & x_2 & +9x_3 & +7x_4 & +x_5 & +5x_6 & +5x_7 & = & -2y_1 & +y_2 & & & \\
 & & & & x_5 & & +2x_7 & = & 5y_1 & -2y_2 & +y_3 & & \\
 & & & & & & 0 & = & -13y_1 & +5y_2 & -2y_3 & +y_4 & \\
 & & & & & & 0 & = & -11y_1 & +3y_2 & -3y_3 & & +y_5
\end{array}$$

Subtrahieren wir die dritte Gleichung 1-mal von der ersten und 1-mal von der zweiten erhalten wir das äquivalente Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrcrrrrr}
x_1 & -x_2 & -9x_3 & +x_4 & & +x_6 & +x_7 & = & -4y_1 & +2y_2 & -y_3 & & \\
 & x_2 & +9x_3 & +7x_4 & & +5x_6 & +3x_7 & = & -7y_1 & +3y_2 & -y_3 & & \\
 & & & & x_5 & & +2x_7 & = & 5y_1 & -2y_2 & +y_3 & & \\
 & & & & & & 0 & = & -13y_1 & +5y_2 & -2y_3 & +y_4 & \\
 & & & & & & 0 & = & -11y_1 & +3y_2 & -3y_3 & & +y_5
\end{array}$$

Addieren wir schließlich die zweite Gleichung zur ersten so erhalten wir das äquivalente Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrrrcrrrrr}
x_1 & & & +8x_4 & & +6x_6 & +4x_7 & = & -11y_1 & +5y_2 & -2y_3 & & \\
 & x_2 & +9x_3 & +7x_4 & & +5x_6 & +3x_7 & = & -7y_1 & +3y_2 & -y_3 & & \\
 & & & & x_5 & & +2x_7 & = & 5y_1 & -2y_2 & +y_3 & & \\
 & & & & & & 0 & = & -13y_1 & +5y_2 & -2y_3 & +y_4 & \\
 & & & & & & 0 & = & -11y_1 & +3y_2 & -3y_3 & & +y_5
\end{array}$$

Ist nun y ein Vektor in $\mathbb{R}^5$, dessen Komponenten den letzten beiden Gleichungen genügen, dann besitzt das gesamte Gleichungssystem eine Lösung, wir können uns nämlich x_3, x_4, x_6 und x_7 beliebig vorgeben, die anderen Komponenten x_1, x_2 und x_5 sind dann durch die ersten drei Gleichungen eindeutig bestimmt. Wählen wir etwa $x_3 = x_4 = x_6 = x_7 = 0$, erhalten wir die spezielle Lösung

$$\xi_y = \begin{pmatrix} -11y_1 + 5y_2 - 2y_3 \\ -7y_1 + 3y_2 - y_3 \\ 0 \\ 0 \\ 5y_1 - 2y_2 + y_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y_1 \begin{pmatrix} -11 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{I.9}$$

Der Teilraum jener $y \in \mathbb{R}^5$, für die das Gleichungssystem eine Lösung besitzt ist daher durch die letzten beiden Gleichungen beschrieben, d.h.

$$W = \left\{ y \in \mathbb{R}^5 \;\middle|\; \begin{array}{ccccccc} -13y_1 & +5y_2 & -2y_3 & +y_4 & & = & 0 \\ -11y_1 & +3y_2 & -3y_3 & & +y_5 & = & 0 \end{array} \right\}. \tag{I.10}$$

Wollen wir Vektoren y in W finden, so können wir uns die Komponenten y_1, y_2 und y_3 beliebig vorgeben, die beiden Gleichungen in (I.10) bestimmen dann die restlichen Komponenten y_4 und y_5 eindeutig. Etwa sind

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{I.11}$$

aus W, und jedes Element von $y \in W$ lässt sich in der Form

$$y = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ 13t_1 - 5t_2 + 2t_3 \\ 11t_1 - 3t_2 + 3t_3 \end{pmatrix} \tag{I.12}$$

schreiben, wobei die Skalare $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt sind. Dies bedeutet gerade, dass die Vektoren w_1, w_2 und w_3 eine Basis von W bilden, es gilt daher

$$\dim(W) = k = 3.$$

Die lineare Parametrisierung $\mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} W$ ist durch (I.12) gegeben, vgl. (I.6).

Für den Lösungsraum des assozierten homogenen Gleichungssystems gilt

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^7 \;\middle|\; \begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & +8x_4 & & +6x_6 & +4x_7 & = & 0 \\ & x_2 & +9x_3 & +7x_4 & & +5x_6 & +3x_7 & = & 0 \\ & & & & x_5 & & +2x_7 & = & 0 \end{array} \right\}. \tag{I.13}$$

Wollen wir Vektoren in L finden, können wir uns die Komponenten x_7, x_6, x_4 und x_3 beliebig vorgeben, die restlichen Komponenten sind dann durch die drei Gleichungen bestimmt. So erhalten wir die folgenden Elemente von L

$$b_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{I.14}$$

Jedes $x \in L$ lässt sich damit in der Form

$$x = s_1 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4s_1 - 6s_2 - 8s_s \\ -3s_1 - 5s_2 - 7s_3 - 9s_4 \\ s_4 \\ s_3 \\ -2s_1 \\ s_2 \\ s_1 \end{pmatrix}$$

schreiben, für eindeutig bestimmte Skalare $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{R}$. Dies ist also die gesuchte Parametrisierung $\phi\colon \mathbb{R}^4 \to L$, siehe (I.5). Die Vektoren b_1, b_2, b_3, b_4 bilden daher eine Basis von L, es ist somit

$$\dim(L) = l = 4.$$

Beachte, dass tatsächlich $k + l = 7$ gilt, vgl. (I.7).

Damit ist das Gleichungssystem (I.1) vollständig gelöst. Die Beschreibung (I.10) von W sagt uns für welche $y \in \mathbb{R}^5$ Lösungen existieren. Ist $y \in W$, d.h. existiert wenigstens eine Lösung, dann lassen sich alle Lösungen x von (I.1) in der Form

$$x = \begin{pmatrix} -11y_1 + 5y_2 - 2y_3 \\ -7y_1 + 3y_2 - y_3 \\ 0 \\ 0 \\ 5y_1 - 2y_2 + y_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

schreiben, wobei die Skalare $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt sind. Dies ist also die gesuchte Parametrisierung $\phi_y\colon \mathbb{R}^4 \to L_y$, vgl. (I.8).

I.2. Geometrische Interpretation. Nach Wahl eines *kartesischen Koordinatensystems* lassen sich Punkte der *Euklidischen Ebene* mit Elementen von $\mathbb{R}^2$ identifizieren. Der Koordinatenursprung entspricht dabei dem Vektor $0 \in \mathbb{R}^2$. Diese Identifizierung erlaubt es geometrische Konstruktionen und Probleme in algebraische zu übersetzen. Etwa lässt sich jede Gerade g der Ebene durch eine lineare Gleichung beschreiben, d.h. es existieren $0 \neq (a, b) \in \mathbb{R}^2$ und $c \in \mathbb{R}$, sodass

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c \right\}.$$

Der Schnitt von zwei Geraden entspricht daher der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen in den Unbekannten x und y. Das geometrische Problem den Schnitt zweier Geraden zu bestimmen führt daher auf ein algebraisches Problem, nämlich ein lineares Gleichungssystem, das sich mit den Methoden der linearen Algebra (sehr leicht) lösen lässt.

Darüber hinaus lassen sich einige interessante *geometrische Transformationen* mit linearer Algebra studieren. Ist etwa $\lambda > 0$, dann enspricht die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

einer beim Koordinatenursprung zentrierten *Streckung* um den Faktor λ. Für fixes $\left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^2$ entspricht die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix},$$

einer *Translation.* Die Abbildung

$$\rho_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \rho_\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cos\alpha - y \sin\alpha \\ x \sin\alpha + y \cos\alpha \end{pmatrix},$$

beschreibt eine beim Koordinatenursprung zentrierte *Drehung* um den Winkel α. Beachte, dass diese Abbildungen ρ linear ist, d.h. es gilt

$$\rho_\alpha \left(\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) + \left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{smallmatrix} \right) \right) = \rho_\alpha \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) + \rho_\alpha \left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{smallmatrix} \right) \quad \text{und} \quad \rho_\alpha \left(\lambda \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right) \right) = \lambda\, \rho_\alpha \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right),$$

für beliebige $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{R}^2$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Abbildung

$$\sigma \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \sigma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix},$$

entspricht offensichtlich einer *Spiegelung* an der x-Achse. Also beschreibt

$$\sigma_\alpha = \rho_\alpha \circ \sigma \circ \rho_\alpha^{-1} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cos(2\alpha) + y \sin(2\alpha) \\ x \sin(2\alpha) - y \cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

eine Spiegelung an der Geraden durch den Koordinatenursprung, die mit der x-Achse den Winkel α einschließt. Auch σ_α ist eine lineare Abbildung. Schließlich sei noch erwähnt, dass *Orthogonalprojektionen* auf Geraden durch den Koordinatenursprung ebenfalls durch lineare Abbildungen beschrieben werden können.

Analog lassen sich Punkte des 3-dimensionalen *Euklidischen Raums* nach Wahl eines kartesischen Koordinatensystems mit Elementen von $\mathbb{R}^3$ identifizieren. Jede Ebene ε im Raum entspricht dabei der Lösungsmenge einer linearen

Gleichung, d.h. es existieren $0 \neq (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ und $d \in \mathbb{R}$, sodass

$$\varepsilon = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) : ax + by + cz = d \right\}.$$

Der Durchschnitt zweier Ebenen entspricht somit der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen in den Unbekannten x, y, z und lässt sich daher mit den Methoden der linearen Algebra (sehr leicht) bestimmen. Auch können interessante geometrische Transformationen des Euklidischen Raums wie Spiegelungen, Rotationen, Orthogonalprojektionen, u.s.w. durch lineare Abbildungen beschrieben werden.

Wie wir oben gesehen haben, besitzt die lineare Algebra zweifellos Anwendungen in der Euklidischen Geometrie. Wahrscheinlich wichtiger ist jedoch folgender Aspekt. Gleichungssysteme in zwei oder drei Variablen haben geometrische Interpretationen, für die wir eine sehr ausgeprägte Intuition besitzen. Diese Intuition hilft uns, die bei größeren Gleichungssystemen auftretenden Phänomene besser zu begreifen. Wir wollen das noch an einem Beispiel erläutern, und betrachten ein homogenes Gleichungssystem in drei Variablen x, y und z,

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \end{aligned}$$

mit Koeffizienten $0 \neq (a_1, b_1, c_1) \in \mathbb{R}^3$ und $0 \neq (a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^3$. Die geometrische Interpretation der Lösungsmenge als Durchschnitt zweier Ebenen zusammen mit unserer geometrischen Intuition lässt uns vermuten, dass dann wohl eine ganze Gerade in der Lösungsmenge des Systems enthalten sein muss. Dies ist tatsächlich der Fall, formal lässt sich dies aus der weiter oben erwähnten Dimensionsformel herleiten. Allgemeiner folgt aus dieser Dimensionsformel: Jedes homogene Gleichungssystem mit m Gleichungen in n Variablen, wobei $n \geq m$, hat einen mindestens $(n-m)$-dimensionalen Lösungsraum. Wir können dieses algebraische Resultat zu einem gewissen Grad geometrisch begreifen.

II. Vektorräume und lineare Abbildungen

Gleichungssysteme mit komplexen oder rationalen Koeffizienten lassen sich genau wie reelle Gleichungssysteme lösen. Wichtig dabei ist nur, dass die Koeffizienten in einem Körper liegen. Alle diese Fälle können bequem gleichzeitig behandelt werden. Wir beginnen dieses Kapitel daher mit der Definition von Vektorräumen über beliebigen Körpern $\mathbb{K}$. Die für uns hier wichtigsten Beispiele werden $\mathbb{K}^n$ und Teilräume davon sein. Anschließend werden wir lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen einführen und einige einfache Eigenschaften herleiten. Lineare Abbildungen von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ lassen sich effizient durch Matrizen beschreiben, wir werden diesen Zusammenhang in Abschnitt II.4 eingehend diskutieren. In Abschnitt II.5 werden wir besprechen, wie Vektorräume als Summe von Teilräumen zerlegt werden können, und was dies mit (speziellen) Lösungen linearer Gleichungssysteme zu tun hat. Im letzten Abschnitt II.6 werden wir mit den Quotientenräumen die ersten Vektorräumen kennen lernen, die nicht in offensichtlicher Weise als Teilräume von Funktionenräumen auftreten.

II.1. Vektorräume. Wir erinnern uns an den Begriff eines Körpers. Eine Menge $\mathbb{K}$ zusammen mit zwei Verknüpfungen $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{+} \mathbb{K}$ und $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{K}$ wird Körper genannt, falls die folgenden sogenannten *Körperaxiome* gelten:

(K1) $\forall \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K} : (\lambda + \mu) + \nu = \lambda + (\mu + \nu)$
(K2) $\exists 0 \in \mathbb{K}\, \forall \mu \in \mathbb{K} : \mu + 0 = 0$
(K3) $\forall \mu \in \mathbb{K}\, \exists (-\mu) \in \mathbb{K} : \mu + (-\mu) = 0$
(K4) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \lambda + \mu = \mu + \lambda$
(K5) $\forall \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K} : (\lambda\mu)\nu = \lambda(\mu\nu)$
(K6) $\exists 1 \in \mathbb{K} : 1 \neq 0 \wedge \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda 1 = \lambda$
(K7) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\, \exists \lambda^{-1} \in \mathbb{K} : \lambda\lambda^{-1} = 1$
(K8) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} : \lambda\mu = \mu\lambda$
(K9) $\forall \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K} : \lambda(\mu + \nu) = \lambda\mu + \lambda\nu$

Ist $\mathbb{K}$ ein Körper, dann bildet $\mathbb{K}$ bezüglich der *Addition* eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 0. Darüber hinaus ist auch $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ bezüglich der *Multiplikation* eine abelsche Gruppe mit neutralem Element 1. Das Distributivgesetz (K9) garantiert eine gewisse Verträglichkeit zwischen Addition und Multiplikation. Einfache Konsequenzen aus den Körperaxiomen, wie z.B. $\forall \lambda \in \mathbb{K} : 0\lambda = 0$, die Eindeutigkeit der beiden neutralen Elemente 0 und 1, oder die Nullteilerfreiheit, werden wir im Folgenden als bekannt voraussetzen, siehe etwa [**7**, Kapitel 5]. Auch werden wir üblichen Konventionen folgen und schreiben etwa $\lambda\mu\nu$ statt $(\lambda\mu)\nu = \lambda(\mu\nu)$ und manchmal $\frac{\lambda}{\mu}$ für $\lambda\mu^{-1}$.

Als wichtige Beispiele von Körpern sind jedenfalls $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}_p$ zu nennen, wobei p eine Primzahl bezeichnet. Beachte, dass $\mathbb{Z}_p$ nur aus endlich vielen Elementen besteht. Der kleinste Körper, $\mathbb{Z}_2$, besteht überhaupt nur aus 0 und 1.

Ist $\mathbb{K}$ ein Körper, dann existiert ein eindeutiger Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{K}$, der $1 \in \mathbb{Z}$ auf $1 \in \mathbb{K}$ abbildet. Jede ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ können wir daher auch als Element von $\mathbb{K}$ auffassen, etwa gilt $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 1 + 1$, u.s.w. Beachte jedoch, dass in manchen Körpern und für manche $n \in \mathbb{N}$ sehr wohl $n = 0 \in \mathbb{K}$ gelten kann, etwa haben wir im Körper $\mathbb{Z}_2$ die Relation $2 = 1 + 1 = 0$.

II.1.1. Definition (Vektorraum). Unter einem *Vektorraum* über einem Körper $\mathbb{K}$ verstehen wir eine Menge V zusammen mit zwei Verknüpfungen,

$$V \times V \xrightarrow{+} V \quad \text{und} \quad \mathbb{K} \times V \xrightarrow{\cdot} V,$$

die folgenden acht Axiomen, den sogenannten *Vektorraumaxiomen,* genügen:

(V1) $\forall u, v, w \in V : (u + v) + w = u + (v + w)$
(V2) $\exists 0 \in V \, \forall v \in V : v + 0 = v$
(V3) $\forall v \in V \, \exists (-v) \in V : v + (-v) = 0$
(V4) $\forall v, w \in V : v + w = w + v$
(V5) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \, \forall v \in V : \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$
(V6) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \, \forall v, w \in V : \lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
(V7) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \, \forall v \in V : (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
(V8) $\forall v \in V : 1v = v$

Die beiden Verknüpfungen werden als *(Vektor-)Addition* bzw. *Skalarmultiplikation* bezeichnet. Elemente eines Vektorraums werden *Vektoren* genannt. Ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ wird oft auch als $\mathbb{K}$-Vektorraum bezeichnet. Ist der Grundkörper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so sprechen wir von einem *reellen Vektorraum,* im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ von einem *komplexen Vektorraum.*

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Aufgrund von Axiom (V1) können wir bei mehrfachen Summen auf die Klammersetzung verzichten und schreiben meist $u + v + w$, $v_1 + \cdots + v_n$ oder $\sum_{i=1}^n v_i$.

Nach Axiom (V2) existiert $0 \in V$, sodass $v + 0 = v$ für jedes $v \in V$. Der Vektor 0 ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt, ist nämlich $o \in V$ ein weiteres Element mit $v + o = v$ für alle $v \in V$, so erhalten wir mit Hilfe von Axiom (V4) sofort $0 = 0 + o = o + 0 = o$. Dieses additiv neutrale Element 0 wird *Nullvektor* genannt. Nach Axiom (V4) gilt jedes $v \in V$ auch $v + 0 = v = 0 + v$.

Nach Axiom (V3) existiert zu jedem $v \in V$ ein Element $-v \in V$, sodass $v + (-v) = 0$. Dieser Vektor $-v$ ist eindeutig bestimmt, ist nämlich $v' \in V$ ein weiteres Element mit $v + v' = 0$, dann folgt mit Hilfe von Axiom (V4) sofort $v' = v' + 0 = v' + (v + (-v)) = (v' + v) + (-v) = (v + v') + (-v) = 0 + (-v) = -v$. Nach Axiom (V4) gilt für beliebiges $v \in V$ auch $v + (-v) = 0 = (-v) + v$. Weiters ist $-0 = 0$, denn $0 + 0 = 0$. Für $v, w \in V$ haben wir $-(v + w) = (-v) + (-w)$, denn $(v + w) + ((-v) + (-w)) = (v + (-v)) + (w + (-w)) = 0 + 0 = 0$. Beachte auch $-(-v) = v$.

In jedem Vektorraum gilt die Kürzungsregel

$$\forall u, v, w \in V : u + v = w + v \Rightarrow u = w,$$

denn aus $u + v = w + v$ folgt $u = u + 0 = u + (v + (-v)) = (u + v) + (-v) = (w + v) + (-v) = w + (v + (-v)) = w + 0 = w$.

Bis jetzt haben wir nur die Axiome (V1) bis (V4) verwendet, die in den vorangehenden Absätzen besprochenen Eigenschaften gelten daher in allgemeinen abelschen Gruppen, siehe [**7**, Abschnitt 5.2]. Wir widmen uns nun dem Zusammenspiel von Addition und Skalarmultiplikation.

Für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\lambda 0 = 0,$$

denn aus Axiom (V6) folgt $0 + \lambda 0 = \lambda 0 = \lambda(0+0) = \lambda 0 + \lambda 0$ und wegen oben erwähnter Kürzungsregel daher $0 = \lambda 0$.

Für jedes $v \in V$ gilt

$$0v = 0,$$

denn aus Axiom (V7) erhalten wir $0 + 0v = 0v = (0+0)v = 0v + 0v$ und wegen der Kürzungsregel oben daher $0 = 0v$.

Es gilt auch folgende Umkehrung der vorangehenden beiden Aussagen:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}\, \forall v \in V : \lambda v = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ oder } v = 0.$$

Ist nämlich $\lambda v = 0$ und $\lambda \neq 0$, dann erhalten wir mit Hilfe der Axiome (V5) und (V8) sofort $v = 1v = (\lambda^{-1}\lambda)v = \lambda^{-1}(\lambda v) = \lambda^{-1}0 = 0$.

Für beliebiges $v \in V$ gilt

$$-v = (-1)v,$$

denn nach (V7) und (V8) ist $v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 + (-1))v = 0v = 0$.

Schließlich haben wir auch

$$\lambda(-v) = -(\lambda v) = (-\lambda v),$$

für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in$V, denn mit Hilfe von Axiom (V5) folgt $\lambda(-v) = \lambda((-1)v) = (\lambda(-1))v = (-\lambda)v = ((-1)\lambda)v = (-1)(\lambda v) = -\lambda v$.

Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir von nun an $v - w$ für $v + (-w)$. Auch verzichten wir bei Skalarmultiplikationen oft auf Klammersetzung und schreiben meist $\lambda\mu v$ statt $\lambda(\mu v) = (\lambda\nu)v$, falls $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und $v \in V$, vgl. Axiom (V5). Nach obigen Bemerkungen ist dies mit den vertrauten Rechenregeln verträglich.

II.1.2. Beispiel. Wir können jeden Körper $\mathbb{K}$ als $\mathbb{K}$-Vektorraum auffassen.

II.1.3. Beispiel. Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Auf der Menge aller n-Tupel von Elementen aus $\mathbb{K}$,

$$\mathbb{K}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\},$$

definieren wir Addition, $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \xrightarrow{+} \mathbb{K}^n$, und Skalarmultiplikation, $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cdot} \mathbb{K}^n$, komponentenweise, d.h. durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{K}$. Mit diesen Operationen wird $\mathbb{K}^n$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{K}$, die Vektorraumaxiome folgen sofort aus den entsprechenden Körperaxiomen, siehe Übungsaufgabe 11 oder [**7**, Kapitel 7]. Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ ein reeller Vektorraum und $\mathbb{C}^n$ ein komplexer Vektorraum. Etwa gilt in $\mathbb{C}^3$,

$$\begin{pmatrix} 1+2\mathbf{i} \\ 3-4\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6\mathbf{i} \\ 2-\mathbf{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2\mathbf{i} \\ 3+2\mathbf{i} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (2+\mathbf{i}) \begin{pmatrix} 4+3\mathbf{i} \\ -2\mathbf{i} \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+10\mathbf{i} \\ 2-4\mathbf{i} \\ 14+7\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

II.1.4. Bemerkung. Die Wahl eines *kartesischen Koordinatensystems* ermöglicht es Elemente von $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ mit Punkten der *Gerade,* der *Ebene* bzw. des *Raums* zu identifizieren, siehe [**7**, Kapitel 7]. In diesem Bild besitzen die Vektorraumoperationen geometrische Interpretationen. Skalarmultiplikation mit $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, d.h. die Abbildung $x \mapsto \lambda x$, entspricht einer *Streckung* um den Faktor λ, zentriert beim Ursprung des Koordinatensystems. Für fixes y entspricht die Abbildung $x \mapsto x + y$ einer *Translation* um y.

II.1.5. Beispiel. Über jedem Körper $\mathbb{K}$ gibt es einen Vektorraum der nur aus einem Element, dem Nullvektor, besteht. Wir bezeichnen diesen *triviale Vektorraum* mit $\{0\}$, $\mathbb{K}^0$ oder 0.

II.1.6. Beispiel (Funktionenräume). Es sei X eine Menge und V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Es bezeichne $F(X,V) = V^X$ die Menge aller Abbildungen $X \to V$. Die Summe zweier Abbildungen $f, g \in F(X,V)$ wird punktweise definiert, d.h.

$$f + g\colon X \to V, \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x).$$

Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $f \in F(X,V)$ definieren wir analog

$$\lambda f\colon X \to V, \quad (\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

Mit diesen Operationen wird $F(X,V)$ zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum. Etwa haben wir für $f, g, h \in F(X,V)$ und $x \in X$

$$\begin{aligned} \big((f+g)+h\big)(x) &= (f+g)(x) + h(x) = \big(f(x) + g(x)\big) + h(x) \\ &= f(x) + \big(g(x) + h(x)\big) = f(x) + (g+h)(x) = \big(f + (g+h)\big)(x). \end{aligned}$$

Da dies für alle $x \in X$ gilt, erhalten wir $(f+g)+h = f+(g+h)$, also genügt $F(X,V)$ dem Vektorraumaxiom (V1). Auch Axiom (V2) ist erfüllt, die konstante Nullfunktion, $0\colon X \to V$, $0(x) := 0$, ist neutrales Element der Addition, denn für jedes $f \in F(X,V)$ und $x \in X$ gilt $(f+0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x) + 0 = f(x)$, also $f + 0 = f$. Das additive Inverse von $f \in F(X, V)$ ist durch $-f\colon X \to V$, $(-f)(x) := -f(x)$, gegeben, denn für jedes $x \in X$ gilt $(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0$, also $f + (-f) = 0$. Damit ist auch Axiom (V3) für $F(X, V)$ verifiziert. Für $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g \in F(X, V)$ und $x \in X$ haben wir

$$\big(\lambda(f+g)\big)(x) = \lambda(f+g)(x) = \lambda\big(f(x) + g(x)\big)$$
$$= \lambda f(x) + \lambda g(x) = (\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) = (\lambda f + \lambda g)(x).$$

Da dies für alle $x \in X$ gilt, erhalten wir $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$, d.h. $F(X, V)$ genügt Axiom (V6). Völlig ananlog lassen sich die verbleibenden Vektorraumaxiome überprüfen, siehe Übungsaufgabe 13.

Wählen wir speziell $V = \mathbb{K}$, so sehen wir, dass $F(X; \mathbb{K})$, d.h. die Menge aller $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen auf X, bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bilden. Etwa bilden die reellwertigen Funktionen auf einem Intervall, $F([a, b], \mathbb{R})$, einen reellen Vektorraum. Für $X = \mathbb{N}$ ist $F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ die Menge aller Folgen in $\mathbb{R}$, diese bilden daher bezüglich gliedweiser Addition und Skalarmultiplikation ebenfalls einen Vektorraum.

II.1.7. Bemerkung (Funktionen als Algebra). $\mathbb{K}$-wertige Funktionen können auch in naheliegender Weise multipliziert werden, für $f, g \in F(X, \mathbb{K})$ wird ihr Produkt $fg \in F(X, \mathbb{K})$ punktweise, d.h. durch

$$fg\colon X \to \mathbb{K}, \qquad (fg)(x) := f(x)g(x),$$

definiert, $x \in X$. Diese Verknüpfung ist assoziativ und kommutativ, d.h. es gilt $f(gh) = (fg)h$ sowie $fg = gf$ für beliebige $f, g, h \in F(X, \mathbb{K})$. Die konstante Einsfunktion, $1 \in F(X, \mathbb{K})$, ist neutrales Element bezüglich der Multiplikation, d.h. für alle $f \in F(X, \mathbb{K})$ gilt $1f = f = f1$. Die Multiplikation ist mit der Vektorraumstruktur verträglich, es gilt $f(g_1 + g_2) = fg_1 + fg_2$, $(f_1 + f_2)g = f_1g + f_2g$ und $f(\lambda g) = \lambda(fg) = (\lambda f)g$, für beliebige $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 \in F(X; \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dies bedeutet gerade, dass $F(X, \mathbb{K})$ eine kommutative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins[2] bildet, vgl. Übungsaufgabe 14.

II.1.8. Beispiel (Polynome). Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Unter einem *Polynom mit Koeffizienten in* $\mathbb{K}$ verstehen wir einen formalen Ausdruck der Form

$$p_0 + p_1z + p_2z^2 + p_3z^3 + \cdots$$

wobei die Koeffizienten $p_i \in \mathbb{K}$ fast alle verschwinden, d.h. alle bis auf endlich viele p_i gleich 0 sind. Zwei Polynome werden als gleich betrachtet, wenn alle ihre

[2]Unter einer $\mathbb{K}$-Algebra verstehen wir einen $\mathbb{K}$-Vektorraum A zusammen mit einer Verknüpfung $A \times A \to A$, der sogenannten Multiplikation, sodass $a(b_1 + b_2) = ab_1 + ab_2$, $a(\lambda b) = \lambda(ab)$, $(a_1 + a_2)b = a_1b + a_2b$ und $(\lambda a)b = \lambda(ab)$, für alle $a, a_1, a_2, b, b_2, b_2 \in A$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Die Algebra wird assoziativ genannt, wenn $a(bc) = (ab)c$ für alle $a, b, c \in A$ gilt. Ein Element $e \in A$ mit $ae = a = ea$ für alle $a \in A$, wird Einselement von A genannt. Dieses neutrale Element der Multiplikation ist dann eindeutig bestimmt und wir sprechen von einer assoziativen Algebra mit Eins. Gilt darüber hinaus $ab = ba$ für alle $a, b \in A$, dann wird A kommutativ gennant.

Koeffizienten überein stimmen. Die Menge aller Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ bezeichnen wir mit $\mathbb{K}[z]$. Sind $p, q \in \mathbb{K}[z]$ zwei Polynome, $p = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$ und $q = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots$, so wird ihre Summe koeffizientenweise definiert,

$$p + q := (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)z + (p_2 + q_2)z^2 + (p_3 + q_3)z^3 + \cdots$$

Offensichtlich ist dann $p + q$ wieder ein Polynom, d.h. $p + q \in \mathbb{K}[z]$. Analog definieren wir Skalarmultiplikation mit $\lambda \in \mathbb{K}$ durch

$$\lambda p := (\lambda p_0) + (\lambda p_1)z + (\lambda p_2)z^2 + (\lambda p_3)z^3 + \cdots$$

und erhalten ein Polynom $\lambda p \in \mathbb{K}[z]$. Mit diesen Verknüpfungen wird $\mathbb{K}[z]$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{K}$. Dabei ist das Nullpolynom, $0 := 0 + 0z + 0z^2 + \cdots$, das additiv neutrale Element, d.h. $0 + p = p = p + 0$ für alle $p \in \mathbb{K}[z]$. Meist werden bei Polynomen nur jene Potenzen von z angeschrieben, deren Koeffizienten verschieden von 0 sind. Etwa sind $p = 2 - z + 4z^2 - 7z^5$ und $q = z - z^3$ zwei reelle Polynome für die $p + q = 2 + 4z^2 - z^3 - 7z^5$ und $7q = 7z - 7z^3$ gilt.

II.1.9. Bemerkung (Polynome als Algebra). Auch Polynome können multipliziert werden. Sind $p = \sum_i p_i z^i = p_0 + p_1 z + p_3 z^2 + \cdots$ und $q = \sum_j q_j z^j = q_0 + q_1 z + q_2 z^2 + \cdots$ zwei Polynome in $\mathbb{K}[z]$, so wird ihr Produkt $pq \in \mathbb{K}[z]$ durch

$$pq = p_0 p_0 + \bigl(p_0 q_1 + p_1 q_0\bigr)z + \bigl(p_0 q_2 + p_1 q_1 + p_2 q_0\bigr)z^2 + \cdots + \Bigl(\sum_{i+j=k} p_i q_j\Bigr)z^k$$

d.h. durch *formales Ausmultiplizieren* definiert. Etwa ist das Produkt der Polynome $p = 2 + 3z + 4z^2$ und $q = 1 + z - z^2$ gleich $pq = 2 + 5z + 5z^2 + z^3 - 4z^4$. Die Multiplikation von Polynomen ist assoziativ, d.h. für $p, q, r \in \mathbb{K}[z]$ gilt $p(qr) = (pq)r$, denn

$$\begin{aligned}
p(qr) &= \Bigl(\sum_i p_i z^i\Bigr)\Bigl(\Bigl(\sum_j q_j z^j\Bigr)\Bigl(\sum_k r_k z^k\Bigr)\Bigr) \\
&= \Bigl(\sum_i p_i z^i\Bigr)\Bigl(\sum_l \Bigl(\sum_{j+k=l} q_j r_k\Bigr) z^l\Bigr) \\
&= \sum_m \Bigl(\sum_{i+l=m} p_i \sum_{j+k=l} q_j r_k\Bigr) z^m = \sum_m \Bigl(\sum_{i+j+k=m} p_i q_j r_k\Bigr) z^m
\end{aligned}$$

und dies stimmt mit dem Polynom

$$\begin{aligned}
(pq)r &= \Bigl(\Bigl(\sum_i p_i z^i\Bigr)\Bigl(\sum_j q_j z^j\Bigr)\Bigr)\Bigl(\sum_k r_k z^k\Bigr) \\
&= \Bigl(\Bigl(\sum_{i+j=l} p_i q_j\Bigr) z^l\Bigr)\Bigl(\sum_k r_k z^k\Bigr) \\
&= \sum_m \Bigl(\sum_{l+k=m} \Bigl(\sum_{i+j=l} p_i q_j\Bigr) r_k\Bigr) z^m = \sum_m \Bigl(\sum_{i+j+k=m} p_i q_j r_k\Bigr) z^m
\end{aligned}$$

überein. Für $p, q \in \mathbb{K}[z]$ gilt auch $pq = qp$, d.h. die Multiplikation von Polynomen ist kommutativ. Das Einspolynom, $1 = 1 + 0z + 0z^2 + \cdots$ ist neutrales Element der Multiplikation, d.h. $1p = p = p1$ für alle $p \in \mathbb{K}[z]$. Schließlich ist die Multiplikation von Polynomen auch mit der Vektorraumstruktur auf $\mathbb{K}[z]$ verträglich, es gilt $r(p+q) = rp + rq$, $(p+q)r = pr + qr$ sowie $p(\lambda q) = \lambda(pq) = (\lambda p)q$, für beliebige Polynome $p, q, r \in \mathbb{K}[z]$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dies bedeutet gerade, dass $\mathbb{K}[z]$ eine kommutative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins bildet, vgl. Übungsaufagbe 15.

II.2. Teilräume. Suchen wir nach Teilmengen eines Vektorraums, die selbst einen Vektorraum bilden, werden auf den Begriff des Teilraums geführt.

II.2.1. Definition (Teilraum). Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine nicht leere Teilmenge $W \subseteq V$ wird *Teilraum* von V genannt, wenn sie abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation ist. In anderen Worten, eine nicht leere Teilmenge $W \subseteq V$ ist genau dann Teilraum von V, wenn sie folgenden beiden Bedingungen genügt:

(a) $\forall w_1, w_2 \in W : w_1 + w_2 \in W$
(b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}\, \forall w \in W : \lambda w \in W$

II.2.2. Bemerkung. Ist W ein Teilraum von V, dann gilt $0 \in W$. Nach Definition ist W nämlich nicht leer, also existiert $w \in W$. Aus (b) folgt daher $0w \in W$. Da $0w = 0$, erhalten wir somit auch $0 \in W$.

II.2.3. Bemerkung. Ist W ein Teilraum von V und $w \in W$, dann gilt auch $-w \in W$. Nach (b) gilt nämlich $(-1)w \in W$, und da $(-1)w = -w$ folgt $-w \in W$.

Ist W ein Teilraum von V, dann schränken sich Addition und Skalarmultiplikation in V zu Abbildungen $W \times W \xrightarrow{+} W$ und $\mathbb{K} \times W \xrightarrow{\cdot} W$ ein. Dadurch wird W selbst zu einem Vektorraum. Die Gültigkeit der Axiome (V1) und (V4) – (V8) für V impliziert sofort, dass diese Axiome auch für W gelten. Nach Bemerkung II.2.2 ist auch (V2) für W erfüllt. Nach Bemerkung II.2.3 genügt W schließlich auch Axiome (V3). Wir halten dies in folgender Proposition fest.

II.2.4. Proposition (Teilräume als Vektorräume). *Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und W ein Teilraum von V. Dann bildet W bezüglich der eingeschränkten Verknüpfungen selbst einen $\mathbb{K}$-Vektorraum.*

II.2.5. Bemerkung. $\{0\}$ und V sind stets Teilräume von V.

II.2.6. Proposition (Durchschnitt von Teilräumen). *Ist W_i, $i \in I$, eine Familie von Teilräumen eines Vektorraums V, so bildet auch deren Durchschnitt, $\bigcap_{i \in I} W_i$, einen Teilraum von V.*

Beweis. Zunächst ist der Durchschnitt jedenfalls nicht leer, denn nach Bemerkung II.2.2 gilt $0 \in \bigcap_{i\in I} W_i$. Um die Abgeschlossenheit unter der Addition zu überprüfen seien nun $w, w' \in \bigcap_{i\in I} W_i$. Für jedes $i \in I$ gilt daher $w, w' \in W_i$. Da W_i einen Teilraum bildet folgt $w + w' \in W_i$. Somit ist $w + w' \in \bigcap_{i\in I} W_i$, und der Durchschnitt daher abgeschlossen unter Addition. Um die Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation zu zeigen seien nun $\lambda \in \mathbb{K}$ und $w \in \bigcap_{i\in I} W_i$. Für jedes $i \in I$ gilt daher $w \in W_i$. Da W_i einen Teilraum bildet folgt $\lambda w \in W_i$. Somit ist $\lambda w \in \bigcap_{i\in I} W_i$ und der Durchschnitt daher auch abgeschlossen unter Skalarmultiplikation. $\square$

II.2.7. Beispiel. Sind $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in \mathbb{K}$, dann bildet die Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &=& 0 \\ &\vdots& \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &=& 0 \end{array} \right\}$$

einen Teilraum von $\mathbb{K}^n$. Die Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems ist daher stets ein Teilraum. Wir werden später sehen, dass sich jeder Teilraum von $\mathbb{K}^n$ in dieser Form darstellen lässt, für geeignete $m \in \mathbb{N}_0$ und $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Auch

$$\left\{ x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K} \right\},$$

d.h. die Teilmenge aller Vektoren $y \in \mathbb{K}^m$, für die das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &=& y_1 \\ &\vdots& \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &=& y_m \end{array}$$

wenigstens eine Lösung besitzt, bildet einen Teilraum von $\mathbb{K}^m$. Wir werden später sehen, dass sich jeder Teilraum von $\mathbb{K}^m$ in dieser Form beschreiben lässt, für geeignete $n \in \mathbb{N}_0$ und $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

II.2.8. Beispiel (Teilräume von $\mathbb{K}$). Der Vektorraum $\mathbb{K} = \mathbb{K}^1$ besitzt außer den beiden trivialen Teilräumen $\{0\}$ und $\mathbb{K}$ keine weiteren Teilräume. Ist nämlich $W \subseteq \mathbb{K}$ ein Teilraum und $W \neq \{0\}$, dann existiert $w \in W$ mit $0 \neq w$, also $\lambda = (\lambda w^{-1})w \in W$ für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$, und daher $W = \mathbb{K}$.

II.2.9. Beispiel (Teilräume von $\mathbb{K}^2$). Neben den trivialen Teilräumen $\{0\}$ und $\mathbb{K}^2$ bildet auch jede Teilmenge der Form

$$\langle a \rangle = \left\{ \lambda \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{K} \right\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; a_2x_1 - a_1x_2 = 0 \right\},$$

wobei $0 \neq a = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^2$, einen Teilraum von $\mathbb{K}^2$. Wir wollen uns nun überlegen, dass dies schon alle Teilräume von $\mathbb{K}^2$ sind. Sei dazu $W \subseteq \mathbb{K}^2$ ein beliebiger Teilraum und $\{0\} \neq W$. Dann existiert $0 \neq a \in W$ und wegen der Abgeschlossenheit von W unter Skalarmultiplikation erhalten wir $\langle a \rangle \subseteq W$. Ist $\langle a \rangle \neq W$, dann existiert also $b \in W \setminus \langle a \rangle$. Wir bezeichnen die Koordinaten von a und b mit $a = \left(\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right)$ und $b = \left(\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \end{smallmatrix}\right)$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{K}$. Aus $a \neq 0$ und $b \notin W$ folgt $d := a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Da W abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation ist, erhalten wir für jeden Vektor $\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{K}^2$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{x_1 b_2 - x_2 b_1}{d} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \frac{x_2 a_1 - x_1 a_2}{d} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in W,$$

und somit $W = \mathbb{K}^2$. Insbesondere hat $\mathbb{R}^2$ neben den beiden trivialen Teilräumen $\{0\}$ und $\mathbb{R}^2$ nur Teilräume der Form $\{\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ wobei $0 \neq a \in \mathbb{R}^2$. Nach Wahl eines kartesischen Koordinatensystems entsprechen letztere genau den Geraden durch den Ursprung des Koordinatensystems.

II.2.10. Beispiel (Teilräume von $\mathbb{K}^3$). Neben den trivalen Teilräumen $\{0\}$ und $\mathbb{K}^3$ besitzt der Vektorraum $\mathbb{K}^3$ auch Teilräume der Form $\langle v \rangle = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$, $v \in \mathbb{K}^3$, sowie

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) \in \mathbb{K}^3 \,\middle|\, ax + by + cz = 0 \right\},$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{K}$. Wir werden später sehen, dass sich jeder Teilraum von $\mathbb{K}^3$ so beschreiben lässt. Insbesondere hat $\mathbb{R}^3$ nur Teilräume dieser Gestalt. Nach Wahl eines kartesischen Koordinatensystems entsprechen die nicht-trivialen Fälle genau den Geraden bzw. Ebenen durch den Ursprung des Koordinatensystems.

II.2.11. Beispiel. Die Teilmenge $\{\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{K}^2 : x_1 x_2 = 0\}$ von $\mathbb{K}^2$ ist zwar abgeschlossen unter Skalarmultiplikation bildet jedoch keinen Teilraum. Auch die Teilmenge $\{\binom{x_1}{x_2} \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}$ bildet keinen Teilraum von $\mathbb{R}^2$, obwohl sie abgeschlossen unter Addition ist. Dasselbe gilt für $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Fassen wir $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auf, dann ist auch $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{C}^n$. Obwohl diese Teilmenge abgeschlossen unter Addition ist, bildet sie keinen Teilraum des komplexen Vektorraums $\mathbb{C}^n$, für $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ gilt nämlich $\mathbf{i}x \notin \mathbb{R}^n$.

II.2.12. Beispiel (Vektorräume von Funktionen aus der Analysis). Die Menge der reellwertigen stetigen Funktionen auf einem Intervall, $C([a,b],\mathbb{R})$, bildet einen Teilraum von $F([a,b],\mathbb{R})$, denn Summen und skalare Vielfache stetiger Funktionen sind wieder stetig. Ebenso ist die Menge der beschränkten Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$ ein Teilraum von $F([a,b],\mathbb{R})$. Auch die (Riemann-)integrierbaren Funktionen $[a,b] \to \mathbb{R}$ bilden einen Teilraum von $F([a,b],\mathbb{R})$. Genauso bilden die differenzierbaren Abbildungen $(a,b) \to \mathbb{R}$ einen Teilraum von $F((a,b),\mathbb{R})$. Analog ist die Menge aller k mal stetig differenzierbaren Funktionen, $C^k((a,b),\mathbb{R})$, ein Teilraum von $F((a,b),\mathbb{R})$. Auch die Menge aller glatten Funktionen $C^\infty((a,b),\mathbb{R}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k((a,b),\mathbb{R})$ ist ein Teilraum von $F((a,b),\mathbb{R})$, vgl. Proposition II.2.6. Nach Proposition II.2.4 sind dies daher alles Vektorräume bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation von Funktionen.

II.2.13. Beispiel (Vektorräume von Folgen aus der Analysis). Die Menge der konvergenten Folgen bildet einen Teilraum von $F(\mathbb{N},\mathbb{R})$, denn Summen und skalare Vielfache konvergenter Folgen sind wieder konvergent. Auch die Menge der beschränkten Folgen ist ein Teilraum von $F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Ebenso bilden die summierbaren Folgen (Reihen) einen Teilraum von $F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Gleiches gilt für die Menge der absolut summierbaren Folgen oder die Menge der quadratsummierbaren Folgen.

II.2.14. Beispiel. Es bezeichne $X \subseteq \mathbb{R}$ ein um Null symmetrisches Intervall, etwa $X = (-a, a)$ mit $0 < a \leq \infty$. Dann bildet die Menge der *geraden Funktionen,*

$$G := \{f \colon X \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = f(x)\},$$

einen Teilraum von $F(X, \mathbb{R})$. Für $f, g \in G$ und $x \in X$ gilt nämlich $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$, also $f + g \in G$, und analog $\lambda f \in G$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$. Auch die Menge der *ungeraden Funktionen,*

$$U := \{f \colon X \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)\},$$

bildet einen Teilraum von $F(X, \mathbb{R})$. Für den Durchschnitt gilt $G \cap U = \{0\}$, d.h. die einzige zugleich gerade und ungerade Funktion ist die konstante Nullfunktion. Ist nämlich $f \in G \cap U$ und $x \in X$, dann folgt $f(x) = f(-x) = -f(x)$, also $2f(x) = 0$ und somit $f(x) = 0$, d.h. $f = 0$.

II.2.15. Beispiel. Für jede Menge X, ist $\{f \colon X \to \mathbb{R} \mid \forall x \in X : f(x) \geq 0\}$ zwar abgeschlossen unter Addition, bildet jedoch keinen Teilraum von $F(X, \mathbb{R})$. Dasselbe gilt für die Teilmenge $F(X, \mathbb{Z}) \subseteq F(X, \mathbb{R})$, d.h. die Menge der Funktionen mit ganzzahligen Werten. Auch ist $F(X; \mathbb{R})$ kein Teilraum von $F(X; \mathbb{C})$, denn für $0 \neq f \in F(X; \mathbb{R})$ gilt $\mathbf{i}f \notin F(X; \mathbb{R})$.

II.3. Lineare Abbildungen. Lineare Abbildungen sind Abbildungen zwischen Vektorräumen, die mit der Vektorraumstruktur, d.h. Addition und Skalarmultiplikation, verträglich sind.

II.3.1. Definition (Lineare Abbildungen). Eine Abbildung zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, $\varphi \colon V \to W$, wird *linear* genannt, wenn sie die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:
(a) $\forall v_1, v_2 \in V : \varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$
(b) $\forall \lambda \in \mathbb{K}\, \forall v \in V : \varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$

Die Menge aller linearen Abbildungen von V nach W wird mit $L(V, W)$ bezeichnet. Eine lineare Abbildung $V \to V$ wird auch *Endomorphismus* genannt. Die Menge aller Endomorphismen von V werden wir mit $\operatorname{end}(V)$ bezeichnen.

II.3.2. Bemerkung. Für jede lineare Abbildung $\varphi \colon V \to W$ gilt $\varphi(0) = 0$. Aus der Linearität erhalten wir nämlich $\varphi(0) = \varphi(0 + 0) = \varphi(0) + \varphi(0)$ und Addition von $-\varphi(0)$ auf beiden Seiten liefert die gewünschte Gleichung, $0 = \varphi(0)$.

II.3.3. Proposition (Komposition linearer Abbildungen). *Sind V, W und U drei $\mathbb{K}$-Vektorräume dann gilt:*
(a) Die identische Abbildung $\mathrm{id}_V \colon V \to V$, $\mathrm{id}_V(v) := v$, ist linear.
(b) Für je zwei lineare Abbildungen $\varphi \colon V \to W$ und $\psi : W \to U$ ist auch die Komposition $\psi \circ \varphi : V \to U$ linear.

(c) *Ist $\varphi : V \to W$ eine bijektive lineare Abbildung, dann ist auch die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : W \to V$ linear.*

Beweis. Behauptung (a) ist trivial. Ad (b): Sind $v_1, v_2 \in V$ so gilt:

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)(v_1 + v_2) = \psi(\varphi(v_1 + v_2)) &= \psi\big(\varphi(v_1) + \varphi(v_2)\big)\\ &= \psi(\varphi(v_1)) + \psi(\varphi(v_2)) = (\psi \circ \varphi)(v_1) + (\psi \circ \varphi)(v_2)\end{aligned}$$

Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ erhalten wir analog $(\psi \circ \varphi)(\lambda v) = \psi(\varphi(\lambda v)) = \psi(\lambda\varphi(v)) = \lambda\psi(\varphi(v)) = \lambda(\psi \circ \varphi)(v)$. Dies zeigt, dass die Komposition $\psi \circ \varphi$ linear ist. Um (c) zu verifizieren sei nun $\varphi : V \to W$ eine lineare Bijektion mit Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : W \to V$. Sind $w_1, w_2 \in W$ so gilt:

$$\begin{aligned}&\varphi^{-1}(w_1 + w_2)\\ &\qquad = \varphi^{-1}\big(\varphi(\varphi^{-1}(w_1)) + \varphi(\varphi^{-1}(w_2))\big) && \text{denn } \forall w \in W : w = \varphi(\varphi^{-1}(w))\\ &\qquad = \varphi^{-1}\big(\varphi\big(\varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2)\big)\big) && \text{Linearität von } \varphi\\ &\qquad = \varphi^{-1}(w_1) + \varphi^{-1}(w_2) && \text{denn } \forall v \in V : \varphi^{-1}(\varphi(v)) = v\end{aligned}$$

Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $w \in W$ erhalten wir analog $\varphi^{-1}(\lambda w) = \varphi^{-1}\big(\lambda\varphi(\varphi^{-1}(w))\big) = \varphi^{-1}\big(\varphi(\lambda\varphi^{-1}(w))\big) = \lambda\varphi^{-1}(w)$. Dies zeigt, dass die Umkehrabbildung φ^{-1} linear ist. $\square$

II.3.4. Beispiel. Sind $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in \mathbb{K}$, dann ist die durch

$$\psi\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n\\ \vdots\\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{pmatrix}$$

definierte Abbildung $\psi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ linear, vgl. Übungsaufgabe 1. Wir werden später sehen, dass jede lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ von dieser Form ist, vgl. Satz II.4.4 unten.

II.3.5. Beispiel (Inklusionen). Für jeden Teilraum W eines Vektorraums V ist die *kanonische Inklusionsabbildung,* $W \to V$, $w \mapsto w$, offensichtlich linear. Die Verknüpfungen auf W wurden genau so definiert, dass diese Inklusionsabbildung linear wird.

II.3.6. Beispiel (Koordinatenprojektionen). Für jedes $i = 1, \ldots, n$ ist die Abbildung $p_i : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $p_i(x) := x_i$, die einem Vektor seine i-te Koordinate zuordnet, linear. Sie wird als i-te *Koordinatenprojektion* bezeichnet.

II.3.7. Beispiel (Polynome als Funktionen). Ist $p = p_0 + p_1z + p_2z^2 + \cdots$ ein Polynom in $\mathbb{K}[z]$ und $x \in \mathbb{K}$, so können wir x in p einsetzen und erhalten eine Zahl $p(x) \in \mathbb{K}$,

$$p(x) := p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots$$

wobei die rechte Seite eine endliche Summe in $\mathbb{K}$ darstellt. Jedes Polynom $p \in \mathbb{K}[z]$ liefert daher eine Funktion $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $x \mapsto p(x)$. Wir erhalten somit eine Abbildung

$\phi\colon \mathbb{K}[z] \to F(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, die einem Polynom $p \in \mathbb{K}[z]$ die Funktion $x \mapsto p(x)$ zuordnet. Diese Abbildung ist linear d.h. es gilt $\phi(p+q) = \phi(p)+\phi(q)$ sowie $\phi(\lambda p) = \lambda\phi(p)$, für beliebige $p, q \in \mathbb{K}[z]$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. In anderen Worten, für jedes $x \in \mathbb{K}$ ist

$$(p + q)(x) = p(x) + q(x) \quad \text{und} \quad (\lambda p)(x) = \lambda p(x).$$

Darüber hinaus gilt auch $\phi(pq) = \phi(p)\phi(q)$, d.h. für jedes $x \in \mathbb{K}$ haben wir

$$(pq)(x) = p(x)q(x).$$

Die Abbildung $\phi\colon \mathbb{K}[z] \to F(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ ist daher sogar ein Homomorphismus von Algebren, d.h. eine lineare Abbildung die auch mit der Multiplikation verträglich ist, vgl. Beispiel II.1.7 und Beispiel II.1.9. Übungsaufgabe 42 behandelt eine Verallgemeinerung dieses Beispiels.

II.3.8. Beispiel. Sei V ein Vektorraum und X eine Menge. Für jedes $x \in X$ ist die Abbildung $\mathrm{ev}_x\colon F(X, V) \to V$, $\mathrm{ev}_x(f) := f(x)$, linear. Für jede Teilmenge $A \subseteq X$ ist auch die Abbildung $F(X, V) \to F(A, V)$, $f \mapsto f|_A$, linear. Allgemeiner ist für jede Abbildung $g : Y \to X$ die Zuordnung $F(X, V) \to F(Y, V)$, $f \mapsto f \circ g$, eine lineare Abbildung, vgl. Übungsaufgabe 24.

II.3.9. Beispiel (Lineare Abbildungen aus der Analysis). Es seien $a < b$ zwei reelle Zahlen. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ liefert die Ableitung eine lineare Abbildung,

$$C^k((a, b), \mathbb{R}) \to C^{k-1}((a, b), \mathbb{R}), \quad f \mapsto f',$$

denn $(f + g)' = f' + g'$ und $(\lambda f)' = \lambda f'$ für alle $f, g \in C^k((a, b), \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Auch das Integral liefert eine lineare Abbildung,

$$C([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_a^b f(x)\, dx,$$

denn es gilt $\int_a^b (f + g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx$ und $\int_a^b (\lambda f)(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$ für alle $f, g \in C([a, b], \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Bezeichnet $F_{\mathrm{conv}}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \subseteq F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ den Teilraum der konvergenten Folgen, dann ist die Abbildung

$$F_{\mathrm{conv}}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n,$$

linear, denn es gilt $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$ und $\lim_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n$ für je zwei konvergente Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

II.3.10. Definition (Isomorphismen). Eine Bijektion zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, $\varphi\colon V \to W$, wird *(linearer) Isomorphismus* genannt, wenn $\varphi\colon V \to W$ und ihre Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\colon W \to V$ beide linear sind. Existiert ein Isomorphismus zwischen V und W, dann werden V und W *isomorph* genannt und wir schreiben $V \cong W$.

II.3.11. Bemerkung. Nach Proposition II.3.3(c) ist jede lineare Bijektion schon ein Isomorphismus, die Umkehrabbildung ist dann automatisch linear.

Sind zwei Vektorräume isomorph, $V \cong W$, dann können sie vom Standpunkt der linearen Algebra als im Wesentlichen gleich betrachtet werden. Bis auf Umbenennung der Elemente mit Hilfe eines Isomorphismus $V \cong W$, entsprechen die Vektorraumoperationen in V ja genau den Vektorraumoperationen in W.

Für jeden Vektorraum V ist die identische Abbildung, $\mathrm{id}_V \colon V \to V$, ein Isomorphismus, $\mathrm{id}_V^{-1} = \mathrm{id}_V$, es gilt daher $V \cong V$. Ist $\varphi \colon V \to W$ ein Isomorphismus, dann ist auch die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} \colon W \to V$ ein Isomorphismus, $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$, aus $V \cong W$ folgt daher stets $W \cong V$. Sind $\varphi \colon V \to W$ und $\psi \colon W \to U$ zwei Isomorphismen, dann ist auch deren Komposition $\psi \circ \varphi \colon V \to U$ ein Isomorphismus. Die letzte Behauptung folgt aus Proposition II.3.3(b) und der Formel für die Umkehrabbildung einer Komposition, $(\psi \circ \varphi)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$. Mit $V \cong W$ und $W \cong U$ gilt daher auch $V \cong U$.

Die Menge aller invertierbaren linearen Abbildungen $V \to V$ wird mit $\mathrm{GL}(V)$ bezeichnet. Aus dem vorangehenden Absatz folgt sofort, dass $\mathrm{GL}(V)$ bezüglich der Komposition von Abbildungen eine Gruppe bildet. Sie wird die *allgemeine lineare Gruppe* genannt. Diese Gruppe ist i.A. nicht abelsch, d.h. für $\varphi, \psi \in \mathrm{GL}(V)$ gilt i.A. $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$, vgl. Übungsaufgabe 25.

II.3.12. Beispiel. Betrachte den Teilraum

$$W := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3 : x + 2y + 3z = 0 \right\}$$

von $\mathbb{K}^3$. Dann ist die Abbildung

$$\mathbb{K}^2 \xrightarrow{\cong} W, \quad \left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ \mu \end{smallmatrix}\right) \mapsto \lambda \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + \mu \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -2\lambda - 3\mu \\ \lambda \\ \mu \end{smallmatrix}\right)$$

eine lineare Bijektion, also ein Isomorphismus. Es gilt daher $W \cong \mathbb{K}^2$. Wir werden später sehen, dass jeder Teilraum von $\mathbb{K}^n$ isomorph zu $\mathbb{K}^m$ ist, für ein eindeutig bestimmtes $m \in \mathbb{N}_0$, für das auch $0 \leq m \leq n$ gelten muss.

II.3.13. Beispiel. Sind $m < n$ zwei natürliche Zahlen, dann bildet

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x_{m+1} & = & 0 \\ & \vdots & \\ x_n & = & 0 \end{array} \right\}$$

einen Teilraum von $\mathbb{K}^n$, der im Wesentlichen mit $\mathbb{K}^m$ übereinstimmt. Genauer ist $\varphi \colon \mathbb{K}^m \to W$, $\varphi(x) := \left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, eine lineare Bijektion, also ein Isomorphismus.

II.3.14. Beispiel. Für $0 \neq x \in \mathbb{K}^n$ bildet $W := \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{K}\}$ einen Teilraum von $\mathbb{K}^n$, der zu $\mathbb{K}$ isomorph ist. Die Abbildung $\varphi \colon \mathbb{K} \to W$, $\lambda \mapsto \lambda x$, ist eine lineare Bijektion, also ein Isomorphismus, vgl. Bemerkung II.3.11.

II.3.15. Beispiel. Vektoren aus $\mathbb{K}^n$ können mit Funktionen $\{1, \dots, n\} \to \mathbb{K}$ identifiziert werden, indem die i-te Komponente eines Vektors als Funktionswert bei i interpretiert wird. Dabei entspricht die Komponentenweise Addition von Vektoren in $\mathbb{K}^n$ genau der punktweisen Addition von Funktionen, und analog für die Skalarmultiplikation. Dies lässt sich wie folgt präzisieren. Die offensichtlich bijektive Abbildung,

$$\phi : F(\{1,\dots,n\},\mathbb{K}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n, \qquad \phi(f) := \begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix},$$

ist ein linearer Isomorphismus, denn für $f, g \in F(\{1,\dots,n\},\mathbb{K})$ gilt

$$\phi(f+g) = \begin{pmatrix} (f+g)(1) \\ \vdots \\ (f+g)(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1)+g(1) \\ \vdots \\ f(n)+g(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(1) \\ \vdots \\ g(n) \end{pmatrix} = \phi(f)+\phi(g)$$

und analog auch $\phi(\lambda f) = \lambda\phi(f)$, für alle $\lambda \in \mathbb{K}$. Nach Bemerkung II.3.11 ist die Umkehrabbildung automatisch linear.

II.3.16. Beispiel. Es bezeichne $F_0(\mathbb{N}_0;\mathbb{K}) \subseteq F(\mathbb{N}_0,\mathbb{K})$ den Teilraum aller Folgen, deren Folgenglieder fast alle gleich 0 sind. Ordnen wir einem Polynom die Folge seiner Koeffizienten zu, so erhalten wir einen linearen Isomorphismus

$$\mathbb{K}[z] \cong F_0(\mathbb{N}_0;\mathbb{K}), \quad p = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots \quad \leftrightarrow \quad (p_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$$

Analog erhalten wir einen Isomorphismus $\mathbb{K}[z]_{\leq n} \cong \mathbb{K}^{n+1}$, wobei $\mathbb{K}[z]_{\leq n}$ den Teilraum aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich n bezeichnet.

II.3.17. Beispiel. Die Vektorräume $\mathbb{K} = \mathbb{K}^1$ und $\mathbb{K}^2$ sind nicht isomorph, denn eine lineare Abbildung $\mathbb{K} \to \mathbb{K}^2$ kann niemals surjektiv sein. Um dies einzusehen, sei $\varphi\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}^2$ linear. Wir bezeichnen die beiden Komponenten von $\varphi(1)$ mit x_1 und x_2, d.h. $\varphi(1) = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$. Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt dann wegen der Linearität $\varphi(\lambda) = \lambda\varphi(1) = \lambda\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{smallmatrix}\right)$. Liegt der Vektor $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ im Bild von φ, dann existiert $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $\varphi(\lambda) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und aus der Formel oben folgt $\left(\begin{smallmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, somit $x_1 \neq 0$ und $x_2 = 0$. Liegt $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ im Bild von φ, dann folgt analog $x_1 = 0$ und $x_2 \neq 0$. Liegen beide Vektoren, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, im Bild von φ erhalten wir einen Widerspruch. Die Abbildung φ kann daher nicht surjektiv sein. Damit ist $\mathbb{K} \ncong \mathbb{K}^2$ gezeigt. Wir werden später sehen, dass $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ genau dann isomorph sind, wenn $n = m$ gilt.

II.3.18. Proposition. *Sind V und W zwei Vektorräume über $\mathbb{K}$, dann ist die Menge aller linearen Abbildungen, $L(V,W)$, ein Teilraum von $F(V,W)$. Insbesondere bildet $L(V,W)$ bezüglich punktweiser Addition und Sakalarmultiplikation,*

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(v) := \varphi_1(v) + \varphi_2(v) \quad \textit{und} \quad (\lambda\varphi)(v) := \lambda\varphi(v)$$

einen $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in L(V,W)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in V$. Die Vektorraumstruktur ist in folgendem Sinn mit der Komposition linearer Abbildungen verträglich: Für beliebige $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in L(V,W)$, $\psi, \psi_1, \psi_2 \in L(W,U)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

(a) $(\psi_1 + \psi_2) \circ \varphi = \psi_1 \circ \varphi + \psi_2 \circ \varphi$ und $(\lambda\psi) \circ \varphi = \lambda(\psi \circ \varphi)$, sowie
(b) $\psi \circ (\varphi_1 + \varphi_2) = \psi \circ \varphi_1 + \psi \circ \varphi_2$ und $\psi \circ (\lambda\varphi) = \lambda(\psi \circ \varphi)$.

Beweis. Zunächst ist $L(V,W)$ nicht leer, denn die konstante Nullabbildung $0\colon V \to W$, $0(v) := 0$, ist offensichtlich linear. Um die Abgeschlossenheit unter Addition zu zeigen, seien nun $\varphi_1\colon V \to W$ und $\varphi_2\colon V \to W$ zwei lineare Abbildungen. Für beliebige $v_1, v_2 \in V$ gilt dann:

$$\begin{aligned}(\varphi_1+\varphi_2)(v_1+v_2) &= \varphi_1(v_1+v_2)+\varphi_2(v_1+v_2)\\ &= \big(\varphi_1(v_1)+\varphi_1(v_2)\big)+\big(\varphi_2(v_1)+\varphi_2(v_2)\big)\\ &= \big(\varphi_1(v_1)+\varphi_2(v_1)\big)+\big(\varphi_1(v_2)+\varphi_2(v_2)\big)\\ &= (\varphi_1+\varphi_2)(v_1)+(\varphi_1+\varphi_2)(v_2),\end{aligned}$$

Analog erhalten wir für jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ und jedes $v \in V$ auch $(\varphi_1+\varphi_2)(\lambda v) = \varphi_1(\lambda v)+\varphi_2(\lambda v) = \lambda\varphi_1(v)+\lambda\varphi_2(v) = \lambda(\varphi_1(v)+\varphi_2(v)) = \lambda(\varphi_1+\varphi_2)(v)$. Dies zeigt, dass auch die Summe $\varphi_1+\varphi_2$ eine lineare Abbildung ist, $L(V,W)$ ist daher abgeschlossen unter Addition. Für die Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation sei nun $\varphi\colon V \to W$ linear und $\lambda \in \mathbb{K}$. Für beliebige $v_1, v_2 \in V$ gilt dann:

$$\begin{aligned}(\lambda\varphi)(v_1+v_2) = \lambda\varphi(v_1+v_2) &= \lambda\big(\varphi(v_1)+\varphi(v_2)\big)\\ &= \lambda\varphi(v_1)+\lambda\varphi(v_2) = (\lambda\varphi)(v_1)+(\lambda\varphi)(v_2).\end{aligned}$$

Für $\mu \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ erhalten wir analog $(\lambda\varphi)(\mu v) = \lambda\varphi(\mu v) = \lambda(\mu\varphi(v)) = (\lambda\mu)\varphi(v) = (\mu\lambda)\varphi(v) = \mu(\lambda\varphi(v)) = \mu(\lambda\varphi)(v)$. Somit ist $\lambda\varphi$ linear, und $L(V,W)$ daher abgeschlossen unter Skalarmultiplikation. Dies zeigt, dass $L(V,W)$ einen Teilraum von $F(V,W)$ bildet.

Ad (a): Für $\varphi \in L(V,W)$, $\psi_1, \psi_2 \in L(W,U)$ und $v \in V$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\big((\psi_1+\psi_2)\circ\varphi\big)(v) = (\psi_1+\psi_2)(\varphi(v)) &= \psi_1(\varphi(v))+\psi_2(\varphi(v))\\ &= (\psi_1\circ\varphi)(v)+(\psi_2\circ\varphi)(v) = \big(\psi_1\circ\varphi+\psi_2\circ\varphi\big)(v).\end{aligned}$$

Da dies für beliebige $v \in V$ gilt, folgt $(\psi_1+\psi_2)\circ\varphi = \psi_1\circ\varphi+\psi_2\circ\varphi$. Analog ist $((\lambda\psi)\circ\varphi)(v) = (\lambda\psi)(\varphi(v)) = \lambda\psi(\varphi(v)) = \lambda(\psi\circ\varphi)(v) = (\lambda(\psi\circ\varphi))(v)$, also $(\lambda\psi)\circ\varphi = \lambda(\psi\circ\varphi)$, für alle $\varphi \in L(V,W)$, $\psi \in L(V,W)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Ad (b): Für $\varphi_1, \varphi_2 \in L(V,W)$, $\psi \in L(W,U)$ und $v \in V$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\big(\psi\circ(\varphi_1+\varphi_2)\big)(v) &= \psi\big((\varphi_1+\varphi_2)(v)\big)\\ &= \psi\big(\varphi_1(v)+\varphi_2(v)\big)\\ &= \psi(\varphi_1(v))+\psi(\varphi_2(v))\\ &= (\psi\circ\varphi_1)(v)+(\psi\circ\varphi_2)(v)\\ &= \big(\psi\circ\varphi_1+\psi\circ\varphi_2\big)(v),\end{aligned}$$

also $\psi\circ(\varphi_1+\varphi_2) = \psi\circ\varphi_1+\psi\circ\varphi_2$. Analog gilt $(\psi\circ(\lambda\varphi))(v) = \psi((\lambda\varphi)(v)) = \psi(\lambda\varphi(v)) = \lambda\psi(\varphi(v)) = \lambda(\psi\circ\varphi)(v) = (\lambda(\psi\circ\varphi))(v)$, also $\psi\circ(\lambda\varphi) = \lambda(\psi\circ\varphi)$, für alle $\varphi \in L(V,W)$, $\psi \in L(W,U)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. $\square$

II.3.19. Bemerkung. Nach Proposition II.3.18 oben bildet $\operatorname{end}(V)$ eine assoziative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins. Diese Algebra ist i.A. nicht kommutativ. Betrachten wir etwa die beiden linearen Abbildungen $\varphi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $\varphi\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) := \left(\begin{smallmatrix} x_2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, und $\psi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2$, $\psi\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) := \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ x_1 \end{smallmatrix}\right)$, dann gilt $(\varphi \circ \psi)\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, sowie $(\psi \circ \varphi)\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$, also $(\varphi \circ \psi)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = (\psi \circ \varphi)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, und daher $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$.

II.3.20. Proposition. *Ist $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung, dann gilt:*

(a) Für jeden Teilraum W' von W ist auch $\varphi^{-1}(W')$ Teilraum von V.
(b) Für jeden Teilraum V' von V ist auch $\varphi(V')$ Teilraum von W.

Beweis. Ad (a): Zunächst ist $\varphi^{-1}(W')$ nicht leer, denn aus $\varphi(0) = 0 \in W'$ folgt $0 \in \varphi^{-1}(W')$. Für $v_1, v_2 \in \varphi^{-1}(W')$ folgt $\varphi(v_1), \varphi(v_2) \in W'$, also $\varphi(v_1+v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) \in W'$ und somit $v_1 + v_2 \in \varphi^{-1}(W')$. Dies zeigt, dass $\varphi^{-1}(W')$ abgeschlossen unter Addition ist. Sind nun $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in \varphi^{-1}(W')$, dann folgt $\varphi(v) \in W'$, also $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v) \in W'$ und daher $\lambda v \in \varphi^{-1}(W')$. Dies zeigt, dass $\varphi^{-1}(W')$ auch abgeschlossen unter Skalarmultiplikation ist.

Ad (b): Zunächst ist $\varphi(V')$ nicht leer, denn $0 = \varphi(0) \in \varphi(V')$. Seien nun $w_1, w_2 \in \varphi(V')$. Es existieren daher $v_1, v_2 \in V'$ mit $\varphi(v_1) = w_1$ und $\varphi(v_2) = w_2$. Wir erhalten $w_1+w_2 = \varphi(v_1)+\varphi(v_2) = \varphi(v_1+v_2) \in \varphi(V')$, denn $v_1+v_2 \in V'$. Dies zeigt, dass $\varphi(V')$ abgeschlossen unter Addition ist. Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ und $w \in \varphi(V')$, dann existiert $v \in V'$ mit $\varphi(v) = w$ und wir erhalten $\lambda w = \lambda\varphi(v) = \varphi(\lambda v) \in \varphi(V')$, denn $\lambda v \in V'$. Somit ist $\varphi(V')$ auch abgeschlossen unter Skalarmultiplikation. □

II.3.21. Definition (Kern und Bild). Unter dem *Kern* einer linearen Abbildung $\varphi\colon V \to W$ verstehen wir den Teilraum

$$\ker(\varphi) := \varphi^{-1}(0) = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \subseteq V.$$

Unter dem *Bild* von φ verstehen wir den Teilraum

$$\operatorname{img}(\varphi) := \varphi(V) = \{\varphi(v) \mid v \in V\} \subseteq W.$$

Nach Proposition II.3.20 sind beides tatsächlich Teilräume.

Wir beenden diesen Abschnitt mit folgendem einfachen Resultat, das oft verwendet wird um die Injektivität linearer Abbildungen zu überprüfen.

II.3.22. Proposition. *Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ ist genau dann injektiv wenn sie trivialen Kern hat, d.h. genau dann wenn $\ker(\varphi) = \{0\}$ gilt.*

Beweis. Ist φ injektiv, dann besteht $\ker(\varphi) = \varphi^{-1}(0)$ aus höchstens einem Element, und da $\varphi(0) = 0$, folgt $\ker(\varphi) = \{0\}$. Dies zeigt die eine Implikation. Sei nun umgekehrt $\ker(\varphi) = \{0\}$. Um zu zeigen, dass φ injektiv ist betrachten wir $v_1, v_2 \in V$ mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Aus der Linearität von φ erhalten wir $\varphi(v_2 - v_1) = \varphi(v_2) - \varphi(v_1) = 0$, also $v_2 - v_1 \in \ker(\varphi)$, somit $v_2 - v_1 = 0$ und daher $v_1 = v_2$. Damit ist auch die umgekehrte Implikation gezeigt. □

II.4. Matrizen. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Wir wollen in diesem Abschnitt lineare Abbildungen $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit Hilfe von Matrizen beschreiben. Unter einer $(m \times n)$-*Matrix* über einem Körper $\mathbb{K}$ verstehen wir ein rechteckiges Schema der Form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mit Eintragungen $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen über $\mathbb{K}$ bezeichnen wir mit $M_{m \times n}(\mathbb{K})$. Die Summe zweier $(m \times n)$-Matrizen wird elementweise, d.h. durch

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

definiert. Beachte, dass die Summe zweier Matrizen nur dann definiert ist, wenn sie gleiche Zeilen- und Spaltenzahl haben. Auch die Skalarmultiplikation mit $\lambda \in \mathbb{K}$ ist elementweise definiert, d.h.

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

Mit diesen Operationen wird $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ zu einem Vektorraum über $\mathbb{K}$. Fassen die Eintragungen einer $(m \times n)$-Matrix in einem Spaltenvektor mit mn vielen Komponenten zusammen, so erhalten wir einen Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Vektorräumen,

$$M_{m \times n}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{mn}.$$

II.4.1. Beispiel. Etwa ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 & 3/5 \\ 4/5 & 1 & 6/5 \\ 7/5 & 8/5 & 9/5 \end{pmatrix}.$$

Unter dem *Produkt* einer $(m \times n)$-Matrix mit einer $(n \times l)$-Matrix verstehen wir die $(m \times l)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nl} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{kl} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk} b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{mk} b_{kl} \end{pmatrix}$$

Beachte, dass das Matrizenprodukt nur definiert ist, wenn die Spaltenzahl der linken Matrix mit der Zeilenzahl der rechten Matrix übereinstimmt. Die Bedeutung dieses Produkts wird in Satz II.4.4 unten klar werden. Unter der $(n \times n)$-Einheitsmatrix, $I_n \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, verstehen wir die Matrix

$$I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Diagonaleinträge gleich 1 und alle anderen Eintragungen gleich 0 sind. Die Einheitsmatrizen sind neutrale Element der Matrizenmultiplikation.

II.4.2. Beispiel. Etwa ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \\ 9 & 7 \\ 11 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Um eine kompaktere Schreibweise zur Verfügung zu haben, bezeichnen wir den Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte einer Matrix A mit A_{ij}. Für $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n\times l}(\mathbb{K})$ gilt daher nach Definition des Matrizenprodukts

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}, \qquad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le l.$$

Addition und Skalarmultiplikation lassen sich damit wie folgt schreiben,

$$(A + A')_{ij} = A_{ij} + A'_{ij} \qquad (\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij}, \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n,$$

wobei $A, A' \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Für die Einheitsmatrix erhalten wir

$$(I_n)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases} \tag{II.1}$$

Das Symbol δ_{ij} wird *Kronecker-Symbol* genannt.

II.4.3. Proposition (Rechenreglen für Matrizen). *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für Matrizen $A, A' \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $B, B' \in M_{n\times l}(\mathbb{K})$, $C \in M_{l\times k}(\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:*

(a) $(AB)C = A(BC)$
(b) $I_m A = A = A I_n$
(c) $(A + A')B = AB + A'B$ *und* $(\lambda A)B = \lambda(AB)$
(d) $A(B + B') = AB + AB'$ *und* $A(\lambda B) = \lambda(AB)$

Beweis. Ad (a): Für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq k$ gilt

$$\begin{aligned}\big((AB)C\big)_{ij} &= \sum_{s=1}^{l}(AB)_{is}C_{sj} = \sum_{s=1}^{l}\Big(\sum_{t=1}^{n}A_{it}B_{ts}\Big)C_{sj} = \sum_{s=1}^{l}\sum_{t=1}^{n}A_{it}B_{ts}C_{sj}\\ &= \sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{l}A_{it}B_{ts}C_{sj} = \sum_{t=1}^{n}A_{it}\sum_{s=1}^{l}B_{ts}C_{sj} = \sum_{t=1}^{n}A_{it}(BC)_{tj} = \big(A(BC)\big)_{ij}\end{aligned}$$

also $(AB)C = A(BC)$. Ad (b): Für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ gilt wegen (II.1)

$$(I_mA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(I_m)_{ik}A_{kj} = A_{ij},$$

also $I_mA = A$. Analog lässt sich $AI_n = A$ zeigen. Ad (c): Für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq l$ gilt

$$\begin{aligned}\big((A+A')B\big)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}(A+A')_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(A_{ik}+A'_{ik})B_{kj}\\ &= \sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{n}A'_{ik}B_{kj} = (AB)_{ij} + (A'B)_{ij} = (AB+A'B)_{ij}\end{aligned}$$

also $(A+A')B = AB + A'B$. Analog haben wir $((\lambda A)B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(\lambda A)_{ik}B_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\lambda A_{ik}B_{kj} = \lambda\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj} = \lambda(AB)_{ij} = (\lambda(AB))_{ij}$, also $(\lambda A)B = \lambda(AB)$. Die letzte Behauptung (d) lässt sich analog beweisen. □

II.4.4. Satz. *Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n, m \in \mathbb{N}$. Jede Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ definiert eine lineare Abbildung $\psi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi_A(x) := Ax$, und jede lineare Abbildung $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ ist von dieser Form für eine eindeutig bestimmte Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Dabei stimmt der i-te Spaltenvektor von A mit dem Bild des i-ten Einheitsvektors, $\psi_A(e_i) \in \mathbb{K}^m$, überein. Diese Zuordnung,*

$$M_{m\times n}(\mathbb{K}) \cong L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), \quad A \leftrightarrow \psi_A,$$

ist ein linearer Isomorphismus, es gilt daher

$$\psi_{A+A'} = \psi_A + \psi_{A'} \qquad \textit{und} \qquad \psi_{\lambda A} = \lambda\psi_A,$$

für beliebige $A, A' \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Weiters haben wir

$$\psi_{AB} = \psi_A \circ \psi_B \qquad \textit{sowie} \qquad \psi_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n},$$

für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n\times k}(\mathbb{K})$.

Beweis. Die Abbildung ψ_A ist linear, denn nach Proposition II.4.3(d) gilt $\psi_A(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = \psi_A(x) + \psi_A(y)$ und $\psi_A(\lambda x) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda\psi_A(x)$, wobei $x, y \in \mathbb{K}^n$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Offensichtlich ist $\psi_A(e_i) = Ae_i$ gerade der i-te Spaltenvektor von A. Die Matrix A ist also durch die lineare Abbildung ψ_A eindeutig bestimmt, die Zuordnung $M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $A \mapsto \psi_A$ ist daher injektiv.

Wir werden nun zeigen, dass diese Zuordnung auch surjektiv ist. Sei dazu $\varphi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ eine beliebige lineare Abbildung. Es bezeichne $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ jene Matrix deren i-ter Spaltenvektoren mit $\varphi(e_i) \in \mathbb{K}^m$ überein stimmt. Es gilt daher $\psi_A(e_i) = \varphi(e_i)$, für jedes $i = 1, \dots, n$. Ist nun $x \in \mathbb{K}^n$ mit Komponenten $x_i \in \mathbb{K}$, dann gilt offensichtlich $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$. Aus der Linearität von φ und ψ_A folgt daher

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) &= x_1\varphi(e_1) + \cdots + x_n\varphi(e_n)\\ &= x_1\psi_A(e_1) + \cdots + x_n\psi_A(e_n) = \psi_A(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = \psi_A(x).\end{aligned}$$

Da dies für jeden Vektor $x \in \mathbb{K}^n$ gilt, erhalten wir $\varphi = \psi_A$. Dies zeigt, dass die Zuordnung $M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $A \mapsto \psi_A$, auch surjektiv ist.

Aus Proposition II.4.3(c) erhalten wir $\psi_{A+A'}(x) = (A + A')x = Ax + A'x = \psi_A(x) + \psi_{A'}(x) = (\psi_A + \psi_{A'})(x)$, für jedes $x \in \mathbb{K}^n$, also $\psi_{A+A'} = \psi_A + \psi_{A'}$. Analog lässt sich $\psi_{\lambda A} = \lambda\psi_A$ nachrechnen. Somit ist $M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, $A \mapsto \psi_A$, eine lineare Bijektion, also ein Isomorphismus, siehe Bemerkung II.3.11.

Aus Proposition II.4.3(a) erhalten wir auch $\psi_{AB}(x) = (AB)x = A(Bx) = \psi_A(Bx) = \psi_A(\psi_B(x)) = (\psi_A \circ \psi_B)(x)$, für jedes $x \in \mathbb{K}^k$, also $\psi_{AB} = \psi_A \circ \psi_B$. Analog folgt aus Proposition II.4.3(b) sofort $\psi_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$. □

II.4.5. Bemerkung. Nach Proposition II.4.3 bilden die quadratischen Matrizen, $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, eine assoziative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins. Nach Satz II.4.4 ist der lineare Isomorphismus $M_{n\times n}(\mathbb{K}) \cong \mathrm{end}(\mathbb{K}^n)$, $A \leftrightarrow \psi_A$, sogar ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren. Die Algebra $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist i.A. nicht kommutativ, etwa gilt $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, vgl. Bemerkung II.3.19. Im Fall $n = 1$ erhalten wir den Grundkörper, $M_{1\times 1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}$.

Eine quadratische Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ wird *invertierbar* genannt, wenn eine Matrix $A' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ existiert, sodass $AA' = I_n = A'A$. In diesem Fall ist die Matrix A' eindeutig bestimmt, denn aus $AA'' = I_n = A''A$ folgt mit Proposition II.4.3 $A'' = I_nA'' = (A'A)A'' = A'(AA'') = A'I_n = A'$. Diese eindeutig bestimmte Matrix wird *Inverse* von A genannt und von nun an mit A^{-1} bezeichnet, für eine invertierbare Matrix A gilt daher

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

Mit A ist offensichtlich auch A^{-1} invertierbar,

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Sind $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ zwei invertierbare Matrizen, dann ist auch AB invertierbar mit Inverser

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1},$$

denn $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ und analog erhalten wir $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I_n$.

Die Menge aller invertierbaren $(n\times n)$-Matrizen über $\mathbb{K}$ wird mit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ bezeichnet. Nach dem vorangehenden Absatz bildet $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ mit dem Matrizenprodukt eine Gruppe. Diese Gruppe ist i.A. nicht abelsch. Zum Beispiel sind die beiden Matrizen $A=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ und $B=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$ invertierbar, $A^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $B^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\-1&1\end{smallmatrix}\right)$, aber $AB=\left(\begin{smallmatrix}2&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&2\end{smallmatrix}\right)=BA$.

II.4.6. Korollar. *Eine Matrix $A\in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn die lineare Abbildung, $\psi_A\colon\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$, $\psi_A(x)=Ax$, invertierbar ist und in diesem Fall gilt $\psi_A^{-1}=\psi_{A^{-1}}$. Der Isomorphismus aus Satz II.4.4 schränkt sich daher zu einem Gruppenisomorhismus $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})\cong\mathrm{GL}(\mathbb{K}^n)$, $A\leftrightarrow\psi_A$, ein.*

Beweis. Ist $A\in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ invertierbar, dann folgt $\psi_A\circ\psi_{A^{-1}}=\psi_{AA^{-1}}=\psi_{I_n}=\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$ und analog $\psi_{A^{-1}}\circ\psi_A=\psi_{A^{-1}A}=\psi_{I_n}=\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$. Somit ist $\psi_A\colon\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$ eine invertierbare lineare Abbildung mit Umkehrabbildung $\psi_A^{-1}=\psi_{A^{-1}}$. Sei nun umgekehrt $A\in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, sodass $\psi_A\colon\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$ invertierbar ist. Nach Satz II.4.4 existiert daher $B\in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ mit $\psi_A\circ\psi_B=\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}=\psi_B\circ\psi_A$. Wir erhalten $\psi_{AB}=\psi_A\circ\psi_B=\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}=\psi_{I_n}$ und analog $\psi_{BA}=\psi_B\circ\psi_A=\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}=\psi_{I_n}$. Aus Satz II.4.4 folgt somit $AB=I_n=BA$, also ist die Matrix A invertierbar. □

II.4.7. Beispiel. Eine (1×1)-Matrix $A=(a)\in M_{1\times1}(\mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn $a\neq 0$. In diesem Fall gilt $A^{-1}=(a^{-1})$.

II.4.8. Beispiel. Eine (2×2)-Matrix $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in M_{2\times2}(\mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn $ad-bc\neq 0$. In diesem Fall gilt

$$A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}.\tag{II.2}$$

Ist nämlich $ad-bc\neq0$ dann gilt

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}da-bc&db-bd\\-ca+ac&-cb+ad\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$$

und

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}ad-bc&-ab+ba\\cd-dc&-cb+da\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2,$$

also ist A invertierbar mit Inverser (II.2). Sei nun umgekehrt $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ invertierbar mit Inverser $A^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{smallmatrix}\right)$. Da

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2=AA^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a'&b'\\c'&d'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa'+bc'&ab'+bd'\\ca'+dc'&cb'+dd'\end{pmatrix},$$

erhalten wir $aa'+bc'=1$, $ab'+bd'=0$, $ca'+dc'=0$ und $cb'+dd'=1$. Daraus folgt $(ad-bc)(a'd'-b'c')=(aa'+bc')(cb'+dd')=1\cdot1=1$, also muss $ad-bc\neq0$ gelten.

II.4.9. Beispiel. Wir wollen die Umkehrabbildung der linearen Abbildung $\varphi\colon\mathbb{K}^2\to\mathbb{K}^2$, $\varphi\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x_1+2x_2\\3x_1+5x_2\end{smallmatrix}\right)$, bestimmen, sofern diese existiert. Offensichtlich gilt $\varphi\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) = A\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)$ mit $A = \left(\begin{smallmatrix}1&2\\3&5\end{smallmatrix}\right)$. Nach Beispiel II.4.8 ist A invertierbar mit Inverser $A^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}-5&2\\3&-1\end{smallmatrix}\right)$. Nach Korollar II.4.6 ist daher auch φ invertierbar mit Umkehrabbildung $\varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\end{smallmatrix}\right) = A^{-1}\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-5&2\\3&-1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}-5y_1+2y_2\\3y_1-y_2\end{smallmatrix}\right)$.

Wir wollen an dieser Stelle noch einfache Eigenschaften einer weiteren Operationen mit Matrizen zusammenstellen, deren Bedeutung aber erst später klar werden wird. Unter der *Transponierten* einer Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ verstehen wir jene Matrix $A^t \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, die wir durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhalten,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad A^t := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

In anderen Worten, $(A^t)_{ij} = A_{ji}$.

II.4.10. Beispiel. Etwa gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

II.4.11. Proposition (Eigenschaften der Transponierten). *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n, m \in \mathbb{N}$. Dann ist die Abbildung $M_{m\times n}(\mathbb{K}) \to M_{n\times m}(\mathbb{K})$, $A \mapsto A^t$, linear, d.h. für alle $A, \tilde{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt*

$$(A+\tilde{A})^t = A^t + \tilde{A}^t \qquad \textit{sowie} \qquad (\lambda A)^t = \lambda A^t.$$

Darüber hinaus haben wir stets

$$(AB)^t = B^t A^t, \qquad (A^t)^t = A \qquad \textit{und} \qquad I_n^t = I_n,$$

für beliebige $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n\times l}(\mathbb{K})$. Eine quadratische Matrix $C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre Transponierte invertierbar ist und in diesem Fall gilt

$$(C^t)^{-1} = (C^{-1})^t.$$

Beweis. Es gilt $(A+\tilde{A})^t = A^t + \tilde{A}^t$, denn $((A+\tilde{A})^t)_{ij} = (A+\tilde{A})_{ji} = A_{ji} + \tilde{A}_{ji} = (A^t)_{ij} + (\tilde{A}^t)_{ij} = (A^t + \tilde{A}^t)_{ij}$. Analog lässt sich $(\lambda A)^t = \lambda A^t$ zeigen, $((\lambda A)^t)_{ij} = (\lambda A)_{ji} = \lambda A_{ji} = \lambda (A^t)_{ij} = (\lambda A^t)_{ij}$. Schließlich gilt auch $(AB)^t = B^t A^t$, denn $((AB)^t)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^n A_{jk} B_{ki} = \sum_{k=1}^n B_{ki} A_{jk} = \sum_{k=1}^n (B^t)_{ik} (A^t)_{kj} = (B^t A^t)_{ij}$. Für einen invertierbare quadratische Matrix C folgt $C^t (C^{-1})^t = (C^{-1} C)^t = I_n^t = I_n$ und analog $(C^{-1})^t C^t = (CC^{-1})^t = I_n^t = I_n$, also ist auch C^t invertierbar mit Inverser $(C^t)^{-1} = (C^{-1})^t$. Die restlichen Behauptungen sind trivial. □

II.4.12. Beispiel. Die *symmetrischen Matrizen*, $\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) : A^t = A\}$, bilden einen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, denn diese Teilmenge stimmt offensichtlich mit dem Kern der linearen Abbildung $M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $A \mapsto A^t - A$, überein. Auch die *schiefsymmetrischen Matrizen,* $\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) : A^t = -A\}$, bilden einen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, denn dies ist genau der Kern der linearen Abbildung $M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $A \mapsto A^t + A$.

II.4.13. Bemerkung (Matrizen und Gleichungssysteme). Wir wollen uns nun überlegen wie sich Fragen zur Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems mit Matrizen bzw. linearen Abbildungen formulieren lassen. Unter der *Koeffizientenmatriz* eines linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= y_m \end{aligned}$$

verstehen wir die Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ mit Eintragungen $A_{ij} := a_{ij}$. Das Gleichungssystem lässt sich damit in kompakter Form schreiben,

$$Ax = y$$

wobei $x \in \mathbb{K}^n$ und $y \in \mathbb{K}^m$. Die mit A assozierte lineare Abbildung

$$\psi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad \psi_A(x) = Ax,$$

liefert die linke Seite des Gleichungssystems,

$$\psi_A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Das Bild der linearen Abbildung ψ_A stimmt daher mit dem Teilraum aller $y \in \mathbb{K}^m$ überein, für die das Gleichungssystem $Ax = y$ lösbar ist,

$$\operatorname{img}(\psi_A) = \big\{y \in \mathbb{K}^m \,\big|\, \exists x \in \mathbb{K}^n : Ax = y\big\}.$$

Die lineare Abbildung ψ_A ist also genau dann surjektiv, wenn das Gleichungssystem $Ax = y$ für jedes $y \in \mathbb{K}^m$ mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ hat.

Die Abbildung ψ_A ist genau dann injektiv, wenn das Gleichungssystem $Ax = y$ für jedes $y \in \mathbb{K}^m$ höchstens eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ besitzt. Nach Proposition II.3.22 ist dies genau dann der Fall, wenn ψ_A trivialen Kern hat, d.h. wenn $\ker(\psi_A) = \{0\}$ gilt. Dies wiederum bedeutet gerade, dass das Gleichungssystem $Ax = 0$ nur die triviale Lösung $x = 0$ besitzt. Die lineare Abbildung ψ_A ist genau dann bijektiv, wenn das Gleichungssystem $Ax = y$ für jedes $y \in \mathbb{K}^m$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ hat. Wir werden später sehen, dass dies nur im Fall $n = m$ möglich ist. Die linearen Isomorphismen $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ entsprechen daher genau den eindeutig lösbaren Gleichungsystemen bzw. den invertierbaren Matrizen.

Das Gleichungssystem

$$Ax = 0$$

wird als das mit $Ax = y$ assozierte *homogene Gleichungssystem* bezeichnet. Seine Lösungsmenge stimmt mit dem Kern von ψ_A, d.h. dem Teilraum

$$\ker(\psi_A) = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$$

überein. Ist $\xi \in \mathbb{K}^n$ eine Lösung des linearen Gleichungssystems, d.h. $A\xi = y$, dann gilt

$$\{x \in \mathbb{K}^n : Ax = y\} = \{\xi + x : Ax = 0\} = \xi + \ker(\psi_A),$$

wir erhalten daher alle Lösungen von $Ax = y$ indem wir zu einer speziellen Lösung ξ, d.h. $A\xi = y$, alle Lösungen des homogenen Systems $Ax = 0$ addieren.

II.5. Summen und Komplemente. Sind W_1 und W_2 zwei Teilräume eines Vektorraums V, dann bildet deren Vereinigung, $W_1 \cup W_2$, i.A. keinen Teilraum von V, vgl. Übungsaufgabe 19. Wir werden nun den kleinsten Teilraum von V betrachten, der $W_1 \cup W_2$ enthält.

II.5.1. Definition (Summe von Teilräumen). Sind W_1 und W_2 zwei Teilräume eines Vektorraums V, so wird

$$W_1 + W_2 := \{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1,\, w_2 \in W_2\}$$

die *Summe* der Teilräume W_1 und W_2 genannt.

II.5.2. Proposition. *Sind W_1 und W_2 zwei Teilräume eines Vektorraums V, dann ist $W_1 + W_2$ der kleinste Teilraum von V, der $W_1 \cup W_2$ enthält. D.h. $W_1 + W_2$ ist ein Teilraum von V, es gilt $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$ und für jeden weiteren Teilraum W von V mit $W_1 \cup W_2 \subseteq W$ gilt schon $W_1 + W_2 \subseteq W$.*

Beweis. Da $0 \in W_2$ gilt $W_1 \subseteq W_1 + W_2$, denn jedes $w_1 \in W_1$ lässt sich in der Form $w_1 = w_1 + 0$ schreiben. Analog haben wir auch $W_2 \subseteq W_1 + W_2$. Zusammen erhalten wir $W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$. Insbesondere ist $W_1 + W_2$ nicht leer. Um die Abgeschlossenheit unter Addition zu zeigen betrachten wir zwei Elemente $w, w' \in W_1 + W_2$. Nach Definition der Summe existieren daher $w_1, w_1' \in W_1$ und $w_2, w_2' \in W_2$ mit $w = w_1 + w_2$ und $w' = w_1' + w_2'$. Da W_1 und W_2 Teilräume sind, folgt

$$w + w' = (w_1 + w_2) + (w_1' + w_2') = \underbrace{(w_1 + w_1')}_{\in W_1} + \underbrace{(w_2 + w_2')}_{\in W_2},$$

also liegt auch $w+w'$ in W_1+W_2. Somit ist W_1+W_2 abgeschlossen unter Addition. Seien nun $\lambda \in \mathbb{K}$ und $w \in W_1 + W_2$. Es existieren daher $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$ mit $w = w_1 + w_2$. Aufgrund von $\lambda w = \lambda(w_1 + w_2) = \lambda w_1 + \lambda w_2$ liegt also auch λw in $W_1 + W_2$. Somit ist $W_1 + W_2$ auch abgeschlossen unter Skalarmultiplikation und daher ein Teilraum von V. Die Minimalität von $W_1 + W_2$ ist offensichtlich, jeder Teilraum der W_1 und W_2 enthält muss auch alle Vektoren der Form $w_1 + w_2$ mit $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ enthalten. $\square$

II.5.3. Bemerkung. Sind W, W_1, W_2 und W_3 Teilräume eines Vektorraums V, dann gelten offensichtlich die Relationen $W_1+W_2 = W_2+W_1$, $W_1+(W_2+W_3) = (W_1+W_2)+W_3$, und $W+\{0\} = W$. Weiters gilt $W_1+W_2 = W_2$ genau dann, wenn $W_1 \subseteq W_2$, vgl. Übungsaufgabe 46.

Nach Definition der Summe lässt sich jedes Element $v \in W_1+W_2$ in der Form $v = w_1+w_2$ schreiben, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$. Wie das folgende Beispiel zeigt ist diese Darstellung i.A. jedoch nicht eindeutig.

II.5.4. Beispiel. Betrachte folgende beiden Teilräume von $\mathbb{K}^3$,

$$W_1 = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3 : x_1 = 0\right\} \quad \text{und} \quad W_2 = \left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3 : x_2 = 0\right\}.$$

Offensichtlich gilt $\mathbb{K}^3 = W_1+W_2$, denn jeder Vektor lässt sich in der Form $\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}x_1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ schreiben, wobei der erste Summand in W_1 und der zweite in W_2 liegt. Allerdings ist diese Darstellung nicht eindeutig, $\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}0\\x_2\\x_3-1\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}x_1\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$ ist eine andere Zerlegung mit den selben Eigenschaften.

II.5.5. Proposition. *Sind W_1 und W_2 zwei Teilräume eines Vektorraums V, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $W_1+W_2 = V$ *und* $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.
(b) Jedes $v \in V$ lässt sich auf eindeutige Weise in der Form $v = w_1+w_2$ schreiben, für gewisse $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$.
(c) Zu je zwei linearen Abbildungen $\varphi_1\colon W_1 \to U$ und $\varphi_2\colon W_2 \to U$ existiert genau eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to U$, sodass $\varphi|_{W_1} = \varphi_1$ und $\varphi|_{W_2} = \varphi_2$.

Beweis. Ad (a)⇒(b): Da $V = W_1+W_2$ lässt sich jedes $v \in V$ in der Form $v = w_1+w_2$ für gewisse $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$ schreiben. Sei nun $v = w_1'+w_2'$ eine weiter solche Darstellung, d.h. $w_1' \in W_1$ und $w_2' \in W_2$. Es folgt $w_1+w_2 = v = w_1'+w_2'$ und daher

$$w_1 - w_1' = w_2' - w_2.$$

Beachte, dass die linke Seite dieser Gleichung in W_1 und die rechte Seite in W_2 liegt. Beide Seiten liegen daher in $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Wir erhalten also $w_1 - w_1' = 0$ und $w_2' - w_2 = 0$, d.h. $w_1 = w_1'$ und $w_2 = w_2'$. Somit sind w_1 und w_2 in der Darstellung $v = w_1+w_2$ eindeutig bestimmt.

Ad (b)⇒(c): Seien also $\varphi_1\colon W_1 \to U$ und $\varphi_2\colon W_2 \to U$ zwei lineare Abbildungen. Wir definieren eine Abbildung $\varphi\colon V \to U$ durch $\varphi(v) := \varphi_1(w_1)+\varphi_2(w_2)$, wobei $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$ jene eindeutig bestimmten Vektoren bezeichnen, für die $v = w_1+w_2$ gilt. Offensichtlich gilt $\varphi|_{W_1} = \varphi_1$ und $\varphi|_{W_2} = \varphi_2$. Wir zeigen nun, dass φ linear ist. Sei dazu $v' \in V$ und $v' = w_1'+w_2'$ die eindeutige Zerlegung mit $w_1' \in W_1$ und $w_2' \in W_2$. Für die Zerlegung der Summe, $v+v'$, ergibt sich

$v + v' = (w_1 + w_1') + (w_2 + w_2')$, wobei $w_1 + w_1' \in W_1$ und $w_2 + w_2' \in W_2$. Es folgt

$$\begin{aligned}\varphi(v + v') &= \varphi_1(w_1 + w_1') + \varphi_2(w_2 + w_2')\\ &= \big(\varphi_1(w_1) + \varphi_1(w_1')\big) + \big(\varphi_2(w_2) + \varphi_2(w_2')\big)\\ &= \big(\varphi_1(w_1) + \varphi_2(w_2)\big) + \big(\varphi_1(w_1') + \varphi_2(w_2')\big)\\ &= \varphi(v) + \varphi(v').\end{aligned}$$

Ist $\lambda \in \mathbb{K}$, so gilt $\lambda v = \lambda w_1 + \lambda w_2$ mit $\lambda w_1 \in W_1$ und $\lambda w_2 \in W_2$ und daher $\varphi(\lambda v) = \varphi_1(\lambda w_1) + \varphi_2(\lambda w_2) = \lambda\varphi_1(w_1) + \lambda\varphi_2(w_2) = \lambda\big(\varphi_1(w_1) + \lambda\varphi_2(w_2)\big) = \lambda\varphi(v)$. Dies zeigt, dass φ tatsächlich eine lineare Abbildung darstellt. Die Eindeutigkeit von φ ist offensichtlich, jedes $v \in V$ lässt sich ja in der Form $v = w_1 + w_2$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$, schreiben, für ein lineares $\varphi\colon V \to U$ mit $\varphi|_{W_1} = \varphi_1$ und $\varphi|_{W_2} = \varphi_2$ folgt daher $\varphi(v) = \varphi(w_1 + w_2) = \varphi(w_1) + \varphi(w_2) = \varphi|_{W_1}(w_1) + \varphi|_{W_2}(w_2) = \varphi_1(w_1) + \varphi_2(w_2)$.

Ad (c)⇒(a): Nach Voraussetzung existiert eine lineare Abbldung $\pi_1\colon V \to W_1$ mit $\pi_1|_{W_1} = \mathrm{id}_{W_1}$ und $\pi_1|_{W_2} = 0$. Daraus erhalten wir sofort $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, denn für $v \in W_1 \cap W_2$ folgt $v = \pi_1(v) = 0$. Es existiert aber auch eine lineare Abbildung $\pi_2\colon V \to W_2$ mit $\pi_2|_{W_1} = 0$ und $\pi_2|_{W_2} = \mathrm{id}_{W_2}$. Fassen wir π_1 und π_2 als lineare Abbildungen $\pi_1\colon V \to V$ und $\pi_2\colon V \to V$ auf, dann gilt für ihre Summe, $\pi_1 + \pi_2\colon V \to V$ nun $(\pi_1 + \pi_2)|_{W_1} = \mathrm{id}_V|_{W_1}$ und $(\pi_1 + \pi_2)|_{W_2} = \mathrm{id}_V|_{W_2}$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in (c) folgt daher $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{id}_V$. Für jedes $v \in V$ erhalten wir somit $v = \mathrm{id}_V(v) = \pi_1(v) + \pi_2(v)$ mit $\pi_1(v) \in W_1$ und $\pi_2(v) \in W_2$, also $V = W_1 + W_2$. □

II.5.6. Definition (Innere direkte Summe und Komplement). Zwei Teilräume W_1 und W_2 eines Vektorraums V heißen *komplementär,* falls $W_1 + W_2 = V$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ gilt. In diesem Fall sagen wir V ist die *(innere) direkte Summe* von W_1 und W_2 und notieren dies durch $V = W_1 \oplus W_2$. Auch wird W_2 als *ein Komplement* von W_1 in V bezeichnet. Die nach Proposition II.5.5 eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\pi_1\colon V \to W_1$ mit $\pi_1|_{W_1} = \mathrm{id}_{W_1}$ und $\pi_1|_{W_2} = 0$ wird als *Projektion auf* W_1 *längs* W_2 bezeichnet. Mit vertauschten Rollen wird auch W_1 ein Komplement von W_2 in V genannt. Die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\pi_2\colon V \to W_2$ mit $\pi_2|_{W_2} = \mathrm{id}_{W_2}$ und $\pi_2|_{W_2} = 0$ wird als Projektion auf W_2 längs W_1 bezeichnet. Auch wird $\pi_2 = \mathrm{id}_V - \pi_1$ die zu π_1 *komplementäre Projektion* genannt.

Seien W_1 und W_2 zwei komplementäre Teilräume eines Vektorraums V, d.h. $W_1 \oplus W_2 = V$, und $\pi_1\colon V \to W_1$ sowie $\pi_2\colon V \to W_2$ die damit assozierten Projektionen. Ist $v \in V$ und $v = w_1 + w_2$ die eindeutige Zerlegung mit $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$, dann gilt $\pi_1(v) = \pi_1(w_1 + w_2) = \pi_1(w_1) + \pi_1(w_2) = w_1 + 0 = w_1$ und analog $\pi_2(v) = w_2$. Die beiden Projektionen liefern uns also für jedes $v \in V$ die eindeutige Zerlegung $v = w_1 + w_2$ mit $w_1 = \pi_1(v) \in W_1$ und $w_2 = \pi_2(v) \in W_2$. Fassen wir diese Projektionen als lineare Abbildungen $\pi_1, \pi_2\colon V \to V$ auf, dann folgt $\pi_1 \circ \pi_1 = \pi_1$, $\pi_2 \circ \pi_2 = \pi_2$, $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{id}_V$ und $\pi_1 \circ \pi_2 = 0 = \pi_2 \circ \pi_1$.

II.5.7. Definition (Projektor). Unter einem Projektor verstehen wir eine lineare Abbildung $\pi\colon V \to V$ für die $\pi \circ \pi = \pi$ gilt.

II.5.8. Proposition. *Ist $\pi\colon V \to V$ ein Projektor, dann gilt*
$$V = \operatorname{img}(\pi) \oplus \ker(\pi)$$
und π stimmt mit der Projektion auf $\operatorname{img}(\pi)$ *längs* $\ker(\pi)$ *überein. Auch $\pi' := \mathrm{id}_V - \pi$ ist ein Projektor, er stimmt mit der komplementären Projektion auf* $\ker(\pi)$ *längs* $\operatorname{img}(\pi)$ *überein. Weiters haben wir* $\operatorname{img}(\pi) = \{v \in V : \pi(v) = v\} = \ker(\pi')$, $\operatorname{img}(\pi') = \{v \in V : \pi'(v) = v\} = \ker(\pi)$ *und es gelten die Formeln*
$$\pi \circ \pi = \pi, \quad \pi' \circ \pi' = \pi', \quad \pi + \pi' = \mathrm{id}_V \quad \textit{sowie} \quad \pi \circ \pi' = 0 = \pi' \circ \pi.$$

Beweis. Zunächst ist auch $\pi' = \mathrm{id}_V - \pi\colon V \to V$ ein Projektor, denn
$$\begin{aligned}\pi' \circ \pi' &= (\mathrm{id}_V - \pi) \circ (\mathrm{id}_V - \pi)\\ &= \mathrm{id}_V \circ \mathrm{id}_V - \pi \circ \mathrm{id}_V - \mathrm{id}_V \circ \pi + \pi \circ \pi\\ &= \mathrm{id}_V - \pi - \pi + \pi\\ &= \mathrm{id}_V - \pi = \pi'.\end{aligned}$$
Auch erhalten wir sofort $\pi \circ \pi' = \pi \circ (\mathrm{id}_V - \pi) = \pi \circ \mathrm{id}_V - \pi \circ \pi = \pi - \pi = 0$ und analog $\pi' \circ \pi = 0$. Die Relationen $\operatorname{img}(\pi) \supseteq \{v \in V : \pi(v) = v\} = \ker(\pi')$ sind offensichtlich. Ist $v \in \operatorname{img}(\pi)$, dann existiert $w \in V$ mit $v = \pi(w)$ und wir erhalten $\pi(v) = \pi(\pi(w)) = (\pi \circ \pi)(w) = \pi(w) = v$. Dies zeigt $\operatorname{img}(\pi) \subseteq \{v \in V : \pi(v) = v\}$, es gilt daher $\operatorname{img}(\pi) = \{v \in V : \pi(v) = v\} = \ker(\pi')$. Wenden wir dies auf den Projektor π' an, erhalten wir auch $\operatorname{img}(\pi') = \{v \in V : \pi'(v) = v\} = \ker(\pi)$. Daraus folgt nun $\operatorname{img}(\pi) \cap \ker(\pi) = \{0\}$, denn für $v \in \operatorname{img}(\pi) \cap \ker(\pi)$ gilt $v = \pi(v) = 0$. Schließlich läst sich jedes $v \in V$ in der Form $v = \pi(v) + \pi'(v)$ schreiben, wobei $\pi(v) \in \operatorname{img}(\pi)$ und $\pi'(v) \in \operatorname{img}(\pi') = \ker(\pi)$. Dies zeigt $V = \operatorname{img}(\pi) + \ker(\pi)$, also $V = \operatorname{img}(\pi) \oplus \ker(\pi)$. □

II.5.9. Bemerkung (Spiegelungen). Sei $V = W_+ \oplus W_-$. Nach Proposition II.5.5 existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\sigma\colon V \to V$, sodass $\sigma(v) = v$ für alle $v \in W_+$, und $\sigma(v) = -v$ für alle $v \in W_-$. Diese Abbildung σ wird *Spiegelung an W_+ längs W_-* genannt. Beachte $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_V$. Die komplementäre Spiegelung an W_- längs W_+ ist durch $-\sigma$ gegeben. Bezeichnen $\pi_+\colon V \to V$ und $\pi_-\colon V \to V$ die mit der Zerlegung $V = W_- \oplus W_+$ assozierten Projektoren, dann gilt $\sigma = \pi_+ - \pi_-$. Ist $2 \neq 0 \in \mathbb{K}$, dann lassen sich auch die Projektionen durch die Spiegelungen ausdrücken, $\pi_+ = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_V + \sigma)$ sowie $\pi_- = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_V - \sigma)$, siehe auch Übungsaufgabe 50.

II.5.10. Beispiel. Betrachte die beiden Teilräume von $\mathbb{R}^3$,
$$E := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right) : 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \right\} \quad \text{und} \quad G := \left\{ \lambda \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{smallmatrix}\right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$
Wir wollen uns nun davon überzeugen, dass $\mathbb{R}^3$ innere direkte Summe von E und G ist, d.h. $\mathbb{R}^3 = E \oplus G$. Zunächst gilt $E \cap G = \{0\}$, denn liegt ein Element

$x = \lambda \left(\begin{smallmatrix}5\\6\\7\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}5\lambda\\6\lambda\\7\lambda\end{smallmatrix}\right)$ aus G auch in E, so folgt $0 = 2 \cdot 5\lambda + 3 \cdot 6\lambda + 4 \cdot 7\lambda = 56\lambda$, also $\lambda = 0$ und damit $x = 0$. Andererseits haben wir auch $E + G = \mathbb{R}^3$, denn jeder Vektor aus $\mathbb{R}^3$ lässt sich in der Form

$$\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right) = \underbrace{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right) - \lambda\left(\begin{smallmatrix}5\\6\\7\end{smallmatrix}\right)}_{\in E} + \underbrace{\lambda\left(\begin{smallmatrix}5\\6\\7\end{smallmatrix}\right)}_{\in G}, \qquad \lambda = \frac{2x_1 + 3x_2 + 4x_3}{56},$$

schreiben, wobei λ so gewählt wurde, dass der erste Summand tatsächlich in E liegt. Dies zeigt $\mathbb{R}^3 = E \oplus G$. Für die Projektion auf G längs E, $\pi_G \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, erhalten wir

$$\pi_G \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \frac{2x_1 + 3x_2 + 4x_3}{56}\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix}10 & 15 & 20\\12 & 18 & 24\\14 & 21 & 28\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Für die Projektion auf E längs G, $\pi_E \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, folgt

$$\pi_E \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \frac{2x_1 + 3x_2 + 4x_3}{56}\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix}46 & -15 & -20\\-12 & 38 & -24\\-14 & -21 & 28\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

Die Spiegelung an E längs G, d.h. $\sigma = \pi_E - \pi_G \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, ist daher durch

$$\sigma\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \frac{1}{56}\begin{pmatrix}36 & -30 & -40\\-24 & 20 & -48\\-28 & -42 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

gegeben, siehe Bemerkung II.5.9 und Übungsaufgabe 48.

II.5.11. Beispiel. Es bezeichne $X \subseteq \mathbb{R}$ ein um Null symmetrisches Intervall, etwa $X = (-a, a)$ mit $0 < a \leq \infty$. Wir wollen nun zeigen, dass $V := F(X, \mathbb{R})$, der Vektorraum aller Funktionen $X \to \mathbb{R}$, innere direkte Summe des Teilraums aller *geraden Funktionen,*

$$G := \bigl\{f \in F(X, \mathbb{R}) \bigm| \forall x \in X : f(-x) = f(x)\bigr\},$$

und des Teilraums aller *ungeraden Funktionen,*

$$U := \bigl\{f \in F(X, \mathbb{R}) \bigm| \forall x \in X : f(-x) = -f(x)\bigr\},$$

ist, d.h. $V = G \oplus U$. In Beispiel II.2.14 haben wir bereits verifiziert, dass G und U Teilräume von $F(X, \mathbb{R})$ bilden, für die $G \cap U = \{0\}$ gilt. Andererseits lässt sich jede Funktion $f \colon X \to \mathbb{R}$ in der Form $f = g + u$ schreiben, wobei $g \colon X \to \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$, $u \colon X \to \mathbb{R}$, $u(x) := \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$, und für diese Summanden gilt $g \in G$ sowie $u \in U$. Dies zeigt $V = G \oplus U$. Für die Projektion auf G längs U, $\pi_G \colon V \to V$, und die Projektion auf U längs G, $\pi_U \colon V \to V$, erhalten wir

$$(\pi_G(f))(x) = \tfrac{1}{2}\bigl(f(x) + f(-x)\bigr) \quad \text{und} \quad (\pi_U(f))(x) = \tfrac{1}{2}\bigl(f(x) - f(-x)\bigr).$$

Die Projektion π_G macht Funktionen gerade und zwar so, dass bereits gerade Funktionen unverändert bleiben und ungerade Funktionen auf 0 abgebildet werden. Analog macht die Projektion π_U Funktionen ungerade, wobei bereits ungerade Funktionen unverändert bleiben und gerade Funktionen auf 0 abgebildet werden. Beachte auch, dass die Spiegelung an G längs U, d.h. $\sigma = \pi_G - \pi_U \colon F(X,\mathbb{R}) \to F(X,\mathbb{R})$, durch $\sigma(f)(x) = f(-x)$ gegeben ist, $x \in X$. Mit Hilfe der Involution $\nu \colon X \to X$, $\nu(x) := -x$, lässt sich dies auch als $\sigma(f) = f \circ \nu$ schreiben.

II.5.12. Beispiel. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper in dem $2 \neq 0$ gilt. In Beispiel II.4.12 haben wir gesehen, dass die symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen Matrizen,

$$W := \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) : A^t = A\} \quad \text{und} \quad W' := \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) : A^t = -A\}$$

jeweils Teilräume von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bilden. Wir wollen nun zeigen, dass $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ direkte Summe dieser Teilräume ist, d.h.

$$M_{n\times n}(\mathbb{K}) = W \oplus W'.$$

Zunächst gilt $W \cap W' = \{0\}$, denn für $A \in W \cap W'$ folgt $A = A^t = -A$, also $2A = 0$ und daher $A = 0$. Andererseits lässt sich jede Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ in der Form

$$A = \tfrac{1}{2}(A + A^t) + \tfrac{1}{2}(A - A^t)$$

schreiben, wobei der erste Summand offensichtlich in W liegt, denn $(\frac{1}{2}(A+A^t))^t = \frac{1}{2}(A^t + A^{tt}) = \frac{1}{2}(A^t + A) = \frac{1}{2}(A + A^t)$, und der zweite Summand in W' liegt, denn $(\frac{1}{2}(A - A^t))^t = \frac{1}{2}(A^t - A^{tt}) = \frac{1}{2}(A^t - A) = -\frac{1}{2}(A - A^t)$. Dies zeigt $M_{n\times n}(\mathbb{K}) = W + W'$, also $M_{n\times n}(\mathbb{K}) = W \oplus W'$. Für die Projektion $\pi \colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to W \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{K})$ auf W längs W' bzw. die Projektion $\pi' \colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to W' \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{K})$ auf W' längs W erhalten wir

$$\pi(A) = \tfrac{1}{2}(A + A^t) \quad \text{und} \quad \pi'(A) = \tfrac{1}{2}(A - A^t).$$

Die Spiegelung an W längs W', d.h. $\sigma = \pi - \pi' \colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to M_{n\times n}(\mathbb{K})$, ist daher durch $\sigma(A) = A^t$ gegeben.

II.5.13. Proposition. *Sei $\varphi \colon V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung und V' ein zu $\ker(\varphi)$ komplementärer Teilraum in V, d.h. $V = \ker(\varphi) \oplus V'$. Dann ist die Einschränkung $\varphi|_{V'} \colon V' \to W$ ein linearer Isomorphismus.*

Beweis. Zunächst ist $\varphi|_{V'}$ injektiv, da $\ker(\varphi|_{V'}) = \{v' \in V' : \varphi(v') = 0\} = \ker(\varphi) \cap V' = \{0\}$, siehe auch Proposition II.3.22. Um auch die Surjektivität von $\varphi|_{V'}$ zu zeigen, sei $w \in W$ beliebig. Wegen der Surjektivität von φ gibt es $v \in V$ mit $\varphi(v) = w$. Da $V = \ker(\varphi) + V'$, existiert $v' \in V'$, sodass $v - v' \in \ker(\varphi)$. Es folgt $w = \varphi(v) = \varphi(v - v' + v') = \varphi(v - v') + \varphi(v') = 0 + \varphi(v') = \varphi(v')$, also $w \in \varphi(V')$. Somit ist $\varphi|_{V'}$ eine lineare Bijektion, also ein Isomorphismus. $\square$

II.5.14. Bemerkung. Betrachte ein linearess Gleichungssystem $Ax = y$, wobei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $x \in \mathbb{K}^n$ und $y \in \mathbb{K}^m$. Weiters bezeichne $\psi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$,

$\psi(x) = Ax$, die damit assozierte lineare Abbildung, und $W := \operatorname{img}(\psi)$ den Teilraum aller $y \in \mathbb{K}^m$, für die das Gleichungssystem $Ax = y$ lösbar ist. Gelingt es einen zu $\ker(\psi)$ komplementären Teilraum V' zu bestimmen, d.h. $\ker(\psi) \oplus V' = V$, dann ist die Einschränkung $\psi|_{V'}\colon V' \to W$ nach Proposition II.5.13 ein Isomorphismus, und ihre Umkehrabbildung, $\xi := \psi|_{V'}^{-1}\colon W \to V' \subseteq V$, liefert dann zu jedem $y \in W$ eine spezielle Lösung $\xi(y) \in \mathbb{K}^n$, die linear von y abhängt.

II.6. Quotientenräume. Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $W \subseteq V$ ein Teilraum. Wir definieren auf V nun eine Relation $\sim$ durch

$$v \sim v' :\Leftrightarrow v' - v \in W.$$

II.6.1. Lemma. *Diese Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf V.*

Beweis. Die Relation ist reflexsiv, denn für jedes $v \in V$ gilt $v - v = 0 \in W$, also $v \sim v$. Die Relation ist symmetrisch, denn aus $v \sim v'$ folgt $v' - v \in W$, somit ist auch $v - v' = -(v' - v) \in W$ und daher $v' \sim v$. Die Relation ist transitiv, denn aus $v \sim v'$ und $v' \sim v''$ erhalten wir $v' - v \in W$ und $v'' - v' \in W$, somit auch $v'' - v = (v'' - v') + (v' - v) \in W$ und daher $v \sim v''$. □

II.6.2. Lemma. *Sind $v, v_1, v_2, v', v_1', v_2', \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt:*
(a) Aus $v_1 \sim v_1'$ und $v_2 \sim v_2'$ folgt $(v_1 + v_2) \sim (v_1' + v_2')$.
(b) Aus $v \sim v'$ folgt $\lambda v \sim \lambda v'$.

Beweis. Ad (a): Gilt $v_1 \sim v_1'$ und $v_2 \sim v_2'$ so folgt $v_1' - v_1 \in W$ und $v_2' - v_2 \in W$, somit auch $(v_1' + v_2') - (v_1 + v_2) = (v_1' - v_1) + (v_2' - v_2) \in W$ und daher $(v_1 + v_2) \sim (v_1' + v_2')$. Ad (b): Aus $v \sim v'$ erhalten wir $v' - v \in W$, somit auch $\lambda v' - \lambda v = \lambda(v' - v) \in W$ und daher $\lambda v \sim \lambda v'$. □

Die Äquivalenzklassen von $\sim$, sind genau die Translate von W. Wir werden die von $v \in V$ repräsentierte Äquivalenzklasse meist mit

$$[v] := \{v' \in V : v \sim v'\} = \{v + w : w \in W\} = v + W$$

bezeichnen. Für die Menge der Äquivalenzklassen schreiben wir V/W. Wir definieren nun auf V/W Addition $V/W \times V/W \xrightarrow{+} V/W$ und Skalarmultiplikation $\mathbb{K} \times V/W \xrightarrow{\cdot} V/W$ durch

$$[v_1] + [v_2] := [v_1 + v_2] \qquad \text{und} \qquad \lambda[v] := [\lambda v],$$

wobei $v, v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. *Beachte, dass diese Operationen nach Lemma II.6.2 tatsächlich wohldefiniert sind!* Wir werden uns nun davon überzeugen, dass V/W dadurch zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum wird.

II.6.3. Satz. *Ist W ein Teilraum eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, dann bildet V/W mit obigen Operationen einen Vektorraum über $\mathbb{K}$. Die kanonische Abbilddung $\pi\colon V \to V/W$, $\pi(v) := [v]$, ist eine lineare Surjektion mit $\ker(\pi) = W$. Zu jeder linearen Abbildung $\varphi\colon V \to U$ mit $\varphi|_W = 0$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\bar\varphi\colon V/W \to U$, sodass $\varphi = \bar\varphi \circ \pi$.*

Beweis. Zunächst sind die Vektorraumaxiome (V1) – (V8) für V/W zu überprüfen. Wir beginnen mit der Assotiativität der Addition:

$$\begin{aligned}\big([v_1]+[v_2]\big)+[v_3] &= [v_1+v_2]+[v_3] = [(v_1+v_2)+v_3]\\ &= [v_1+(v_2+v_3)] = [v_1]+[v_2+v_3] = [v_1]+\big([v_2]+[v_3]\big).\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Addtion auf V/W dem Axiom (V1) genügt. Analog erhalten wir aus Axiom (V2) für V sofort $[v]+[0]=[v+0]=[v]$. Somit ist die Klasse $[0]\in V/W$ neutrales Element der Addition auf V/W, d.h. die Addition auf V/W erfüllt auch Axiom (V2). Ebenso erhalten wir $[v]+[-v]=[v+(-v)]=[0]$, d.h. die Klasse $[-v]\in V/W$ ist das additive Inverse der Klasse $[v]$. Die Addition auf V/W genügt daher auch Axiom (V3). Auch die Kommutativität der Addition auf V/W folgt sofort aus der Kommutativität der Addition in V, $[v_1]+[v_2]=[v_1+v_2]=[v_2+v_1]=[v_2]+[v_1]$, also genügt V/W Axiom (V4). Für $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$ erhalten wir ähnlich $\lambda(\mu[v])=\lambda[\mu v]=[\lambda(\mu v)]=[(\lambda\mu)v]=(\lambda\mu)[v]$, die Skalarmultiplikation in V/W genügt daher dem Axiom (V5). Weiters haben wir:

$$\begin{aligned}\lambda\big([v_1]+[v_2]\big) &= \lambda[v_1+v_2] = [\lambda(v_1+v_2)]\\ &= [\lambda v_1+\lambda v_2] = [\lambda v_1]+[\lambda v_2] = \lambda[v_1]+\lambda[v_2].\end{aligned}$$

In V/W gilt daher das Distributivgesetz (V6). Das andere Distributivgesetz (V7) lässt sich genauso verifizieren, $(\lambda+\mu)[v]=[(\lambda+\mu)v]=[\lambda v+\mu v]=[\lambda v]+[\mu v]=\lambda[v]+\mu[v]$, also genügt V/W auch Axiom (V7). Schließlich ist $1[v]=[1v]=[v]$ und damit ist auch Axiom (V8) erfüllt. Addition und Skalarmultiplikation auf V/W erfüllen somit alle Vektorraumaxiome und bilden daher einen $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Die kanonische Abbildung $\pi\colon V\to V/W$ ist offensichtlich linear, denn es gilt $\pi(v+w)=[v+w]=[v]+[w]=\pi(v)+\pi(w)$ und auch $\pi(\lambda v)=[\lambda v]=\lambda[v]=\lambda\pi(v)$.[3] Die Surjektivität von π ist trivial, jede Äquivalenzklasse besitzt ja mindestens einen Repräsentanten. Für den Kern von π folgt $\ker(\pi)=\pi^{-1}([0])=\{v\in V\mid \pi(v)=[0]\}=\{v\in V\mid [v]=[0]\}=\{v\in V\mid v\sim 0\}=W$.

Sei nun $\varphi\colon V\to U$ eine lineare Abbildung die auf W verschwindet, d.h. $\varphi|_W=0$. Für $v,v'\in V$ mit $v\sim v'$ gilt $v'-v\in W$, also $\varphi(v')-\varphi(v)=\varphi(v'-v)=0$ und somit $\varphi(v)=\varphi(v')$. Daher ist die Abbildung

$$\bar\varphi\colon V/W\to U,\quad \bar\varphi([v]):=\varphi(v),$$

wohldefiniert. Auch ist sie offensichtlich linear, denn $\bar\varphi([v_1]+[v_2])=\bar\varphi([v_1+v_2])=\varphi(v_1+v_2)=\varphi(v_1)+\varphi(v_2)=\bar\varphi([v_1])+\bar\varphi([v_2])$ und $\bar\varphi(\lambda[v])=\bar\varphi([\lambda v])=\varphi(\lambda v)=\lambda\varphi(v)=\lambda\bar\varphi([v])$. Schließlich gilt $(\bar\varphi\circ\pi)(v)=\bar\varphi(\pi(v))=\bar\varphi([v])=\varphi(v)$ und daher $\bar\varphi\circ\pi=\varphi$. Die Eindeutigkeit der Abbildung $\bar\varphi$ folgt sofort aus der Surjektivität von π. □

[3] Die Vektorraumoperationen auf V/W wurden genau so definiert, dass π linear wird.

II.6.4. Definition (Quotientenraum). Der Vektorraum V/W wird *Quotientenraum V nach W* oder *V modulo W* genannt. Die Abbildung $\pi\colon V \to V/W$, $\pi(v) = [v]$, wird als *kanonische Projektion* bezeichnet.

II.6.5. Bemerkung. Es gilt stets $V/\{0\} = V$ und $V/V = \{0\}$. Für einen Teilraum W eines Vektorraums V gilt $V/W = \{0\}$ genau dann, wenn $V = W$.

II.6.6. Korollar. *Jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ induziert einen linearen Isomorphismus*

$$\bar\varphi\colon V/\ker(\varphi) \xrightarrow{\cong} \operatorname{img}(\varphi), \quad \bar\varphi([v]) = \varphi(v).$$

Beweis. Wir fassen φ als surjektive lineare Abbildung $\varphi\colon V \to \operatorname{img}(\varphi)$ auf. Da φ auf $\ker(\varphi)$ verschwindet stellt $\bar\varphi\colon V/\ker(\varphi) \to \operatorname{img}(\varphi)$, $\bar\varphi([v]) = \varphi(v)$, eine wohldefinierte lineare Abbildung dar, siehe Satz II.6.3. Offensichtlich ist $\bar\varphi$ surjektiv. Weiters gilt $\ker(\bar\varphi) = \{[0]\}$, denn aus $\bar\varphi([v]) = 0$ erhalten wir $\varphi(v) = 0$, also $v \in \ker(\varphi)$ und daher $[v] = [0] \in V/\ker(\varphi)$. Nach Proposition II.3.22 ist $\bar\varphi$ daher auch injektiv. Somit ist $\bar\varphi$ eine lineare Bijektion, also ein Isomorphismus, siehe Bemerkung II.3.11. $\square$

II.6.7. Korollar. *Sei W ein Teilraum eines Vektorraums V und W' ein Komplement von W in V, d.h. $V = W \oplus W'$. Dann ist die Einschränkung der kanonischen Projektion, $\pi|_{W'}\colon W' \to V/W$, ein linearer Isomorphismus. Jede Äquivalenzklasse in V/W besitzt daher einen eindeutigen Repräsentanten in W'.*

Beweis. Dies folgt sofort aus Satz II.6.3 und Proposition II.5.13. $\square$

II.6.8. Beispiel. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine Matrix und $L := \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$ der Lösungsraum des assozierten homogenen Gleichungssystems. Weiters sei $\xi \in \mathbb{K}^n$ und $y := A\xi \in \mathbb{K}^m$, also $A\xi = y$. Dann besteht die von ξ repräsentierte Äquivalenzklasse, $[\xi] \in \mathbb{K}^n/L$, genau aus jenen Vektoren, die das selbe Gleichungssystem wie ξ lösen, d.h. $[\xi] = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = y\}$.

II.6.9. Beispiel. Sei $[a, b]$ ein Intervall, und bezeichne $W \subseteq F([a, b], \mathbb{R})$ den Teilraum der konstanten Funktionen. Die von einer Funktion $f \in F([a, b], \mathbb{R})$ repräsentierte Äquivalenzklasse $[f] \in F([a, b], \mathbb{R})/W$ besteht daher aus allen Funktionen, die sich von f nur durch eine additive Konstante unterscheiden. Elemente von $F([a, b], \mathbb{R})/W$ können als Funktionen verstanden werden, die nur bis auf eine additive Konstante definiert sind.

II.6.10. Beispiel (Landau Symbol). Betrachte den Teilraum

$$W := o(1) = \bigl\{ f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \bigm| \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \bigr\}$$

von $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Die von einer Funktion $f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ repräsentierte Äquivalenzklasse $[f] \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R})/W$ besteht daher genau aus jenen Funktionen g, für die $\lim_{x\to\infty}(g(x) - f(x)) = 0$ gilt, d.h. aus allen Funktionen die sich asymptotisch wie f verhalten. Elemente von $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})/W$ können daher als Asymptoten verstanden werden.

III. Basen

Das Konzept der Basis bildet das wesentliche Hilfmittel um die Struktur allgemeiner Vektorräume zu verstehen. Ist ein Vektorraum mit einer Basis ausgestattet, dann kann jeder Vektor in eindeutiger Weise als Linearkombination der Basisvektoren geschrieben werden, Vektoren können somit durch Zahlen, und zwar eine für jeden Basisvektor, beschrieben werden.

Basen werden als linear unabhängige Erzeugendensysteme definiert, wir beginnen dieses Kapitel daher mit zwei Abschnitten, in denen wir die Begriffe *Erzeugendensystem* und *lineare Unabhängigkeit* erläutern. In Abschnitt III.3 werden wir dann zeigen, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt und einige Konsequenzen dieses zentralen Resultats besprechen. Bevor wir im folgenden Kapitel IV näher auf die wichtige Klasse der endlich-dimensionalen Vektorräume eingehen, werden wir in Abschnitt III.4 noch grundlegende Eigenschaften des Dualraums zusammenstellen.

III.1. Erzeugendensysteme. Sei A eine Teilmenge eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Unter einer *Linearkombination* von Elementen in A verstehen wir jeden Ausdruck der Form

$$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n,$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ und $a_1, \dots, a_n \in A$. Auch $n = 0$ ist hier zulässig, wir interpretieren diesen Fall als leere Summe, ihr Wert ist definitionsgemäß gleich 0. Lässt sich ein Vektor $v \in V$ als Linearkombination von Elementen in A schreiben, d.h. existieren $a_i \in A$ und $\lambda_i \in \mathbb{K}$, sodass $v = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$, dann können wir durch geeignetes Zusammenfassen auch erreichen, dass die Elemente $a_1, \dots, a_n$ paarweise verschieden sind, siehe (V7). Somit lässt sich v auch in der Form

$$v = \sum_{a \in A} \lambda_a a$$

schreiben, wobei die Skalare $\lambda_a \in \mathbb{K}$ fast alle verschwinden, d.h. alle bis auf endlich viele gleich 0 sind.

III.1.1. Definition (Lineare Hülle). Ist A eine Teilmenge eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, dann wird die Menge aller Vektoren, die sich als Linearkombinationen von Elementen in A schreiben lassen, d.h.

$$\langle A \rangle := \bigl\{ \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \bigm| \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K},\, a_1, \dots, a_n \in A \bigr\},$$

als *lineare Hülle* oder *lineares Erzeugnis* von A bezeichnet. Auch wird $\langle A \rangle$ der von A *erzeugte* bzw. *aufgespannte Teilraum* genannt. Sind $v_1, \dots, v_n \in V$, dann schreiben wir auch

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle := \langle \{v_1, \dots, v_n\} \rangle = \bigl\{ \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \bigm| \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \bigr\}$$

für den von $\{v_1, \dots, v_n\}$ aufgespannten Teilraum.

III.1.2. Proposition. *Sei A eine Teilmenge eines Vektorraums V. Dann ist $\langle A\rangle$ der kleinste Teilraum von V, der A enthält, d.h. $\langle A\rangle$ bildet einen Teilraum von V, es gilt $A \subseteq \langle A\rangle$ und für jeden weiteren Teilraum W von V mit $A \subseteq W$ gilt schon $\langle A\rangle \subseteq W$. Insbesondere ist*

$$\langle A\rangle = \bigcap_{\substack{W \text{ ist Teilraum von } V\\ \text{und } A \subseteq W}} W$$

wobei der Durchschnitt aller Teilräume von V gemeint ist, die A enthalten.

Beweis. Zunächst ist $\langle A\rangle$ nicht leer, denn $0 \in \langle A\rangle$. Weiters ist $\langle A\rangle$ offensichtlich abgeschlossen unter Addition. Um auch die Abgeschlossenheit unter Skalarmultiplikation zu sehen, sei nun $v \in \langle A\rangle$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Nach Definition der linearen Hülle lässt sich v in der Form $v = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$ schreiben, wobei $a_i \in A$ und $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Es folgt $\lambda v = \lambda(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n) = (\lambda\lambda_1)a_1 + \cdots + (\lambda\lambda_n)a_n$, also ist auch $\lambda v \in \langle A\rangle$. Dies zeigt, dass $\langle A\rangle$ einen Teilraum von V bildet. Da sich jedes $a \in A$ als Linearkombination $a = 1a$ schreiben lässt, gilt auch $A \subseteq \langle A\rangle$. Sei nun W ein Teilraum von V, sodass $A \subseteq W$. Für beliebige $a_1, \ldots, a_n \in A$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ folgt dann $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \in W$, also $\langle A\rangle \subseteq W$. □

III.1.3. Beispiel. Etwa gilt in $\mathbb{R}^3$:

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\rangle = \left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}\lambda\\2\lambda\\3\lambda\end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}\lambda+3\mu\\2\lambda+2\mu\\3\lambda+\mu\end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}\right\rangle = \left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\} = \left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle = \left\{\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \nu\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} : \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}^3$$

III.1.4. Lemma. *Sind A und B Teilmengen eines Vektorraums V dann gilt:*

(a) $\langle\emptyset\rangle = \{0\}$ und $\langle V\rangle = V$.
(b) Ist $A \subseteq B$, dann auch $\langle A\rangle \subseteq \langle B\rangle$.
(c) A ist genau dann Teilraum von V, wenn $A = \langle A\rangle$.
(d) Es ist $B \subseteq \langle A\rangle$ genau dann, wenn $\langle A \cup B\rangle = \langle A\rangle$.
(e) Es gilt $\langle A \cup B\rangle = \langle A\rangle + \langle B\rangle$.
(f) Für jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ gilt $\langle\varphi(A)\rangle = \varphi(\langle A\rangle)$.
(g) Für je zwei lineare Abb. $\varphi, \psi\colon V \to W$ gilt: $\varphi|_A = \psi|_A \Leftrightarrow \varphi|_{\langle A\rangle} = \psi|_{\langle A\rangle}$.

Beweis. Die Behauptungen (a) und (b) sind trivial. Punkt (c) folgt sofort aus Proposition III.1.2. Ad (d): Gilt $\langle A \cup B\rangle = \langle A\rangle$, so folgt $B \subseteq A \cup B \subseteq \langle A \cup B\rangle = \langle A\rangle$, also $B \subseteq \langle A\rangle$. Für die andere Implikation sei nun $B \subseteq \langle A\rangle$. Da auch $A \subseteq \langle A\rangle$ erhalten wir $A \cup B \subseteq \langle A\rangle$ und somit $\langle A \cup B\rangle \subseteq \langle A\rangle$, denn $\langle A \cup B\rangle$ ist der kleinste Teilraum, der $A \cup B$ enthält. Aus $A \subseteq A \cup B$ folgt mit (b) aber auch die umgekehrte Inklusion, $\langle A\rangle \subseteq \langle A \cup B\rangle$, und somit Gleichheit.

Ad (e): Aus (b) erhalten wir zunächst $\langle A\rangle \cup \langle B\rangle \subseteq \langle A \cup B\rangle$, also $\langle A\rangle + \langle B\rangle \subseteq \langle A \cup B\rangle$, denn $\langle A\rangle + \langle B\rangle$ ist der kleinste Teilraum in dem $\langle A\rangle \cup \langle B\rangle$ enthalten ist, vgl. Proposition II.5.2. Andererseits ist $A \cup B \subseteq \langle A\rangle \cup \langle B\rangle \subseteq \langle A\rangle + \langle B\rangle$, es gilt daher auch die umgekehrte Inklusion, $\langle A \cup B\rangle \subseteq \langle A\rangle + \langle B\rangle$, denn $\langle A \cup B\rangle$ ist der kleinste Teilraum, der $A \cup B$ enthält.

Ad (f): Aus $A \subseteq \langle A\rangle$ folgt $\varphi(A) \subseteq \varphi(\langle A\rangle)$. Da $\varphi(\langle A\rangle)$ einen Teilraum bildet erhalten wir $\langle \varphi(A)\rangle \subseteq \varphi(\langle A\rangle)$, denn $\langle \varphi(A)\rangle$ ist der kleinste Teilraum, der $\varphi(A)$ enthält. Es gilt auch die umgekehrte Inklusion, $\varphi(\langle A\rangle) \subseteq \langle \varphi(A)\rangle$, denn jedes $v \in \langle A\rangle$ lässt sich als Linearkombination $v = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$ schreiben, $a_i \in A$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$, also $\varphi(v) = \varphi(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n) = \lambda_1 \varphi(a_1) + \cdots + \lambda_n \varphi(a_n) \in \langle \varphi(A)\rangle$.

Ad (g): Die eine Implikation ist trivial, da $A \subseteq \langle A\rangle$. Für die andere Implikation sei nun $\varphi|_A = \psi|_A$. Der Teilraum $V' := \{v \in V : \varphi(v) = \psi(v)\} = \ker(\varphi - \psi)$ enthält daher A als Teilmenge. Es folgt $\langle A\rangle \subseteq V'$ und daher $\varphi|_{\langle A\rangle} = \psi|_{\langle A\rangle}$. □

III.1.5. Bemerkung. Aus Lemma III.1.4(b) folgt zwar $\langle A \cap B\rangle \subseteq \langle A\rangle \cap \langle B\rangle$, i.A. ist jedoch $\langle A \cap B\rangle \neq \langle A\rangle \cap \langle B\rangle$, siehe Übungsaufgabe 56.

III.1.6. Definition (Erzeugendensystem). Eine Teilmenge E eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V wird *Erzeugendensystem* von V genannt, wenn $\langle E\rangle = V$ gilt. In diesem Fall sagen wir auch *E erzeugt V* oder V wird von E *aufgespannt.* Ein Vektorraum heißt *endlich erzeugt,* wenn er ein endliches Erzeugendensystem besitzt.

III.1.7. Bemerkung. Jeder Vektorraum V besitzt ein Erzeugendensystem, etwa gilt $V = \langle V\rangle$ nach Lemma III.1.4(a).

III.1.8. Bemerkung. Ist E ein Erzeugendensystem eines Vektorraums V und gilt $E \subseteq E' \subseteq V$, dann ist auch E' Erzeugendensystem von V. Mit Lemma III.1.4(b) folgt nämlich $V = \langle E\rangle \subseteq \langle E'\rangle \subseteq V$, also $\langle E'\rangle = V$.

III.1.9. Bemerkung. Ist $\varphi\colon V \to W$ linear und E ein Erzeugendensystem von V, dann bildet $\varphi(E)$ ein Erzeugendensystem des Vektorraums $\operatorname{img}(\varphi)$. Dies folgt sofort aus Lemma III.1.4(f). Insbesondere sind Quotienten endlich erzeugter Vektorräume wieder endlich erzeugt, vgl. Satz II.6.3.

Erzeugendensysteme lassen sich auch mit Hilfe linearer Abbildungen charakterisieren.

III.1.10. Proposition (Erzeugendensysteme). *Für eine Teilmenge E eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) E ist ein Erzeugendensystem von V.
(b) Jedes $v \in V$ lässt sich als Linearkombination $v = \sum_{e\in E} \lambda_e e$ schreiben, für gewisse Skalare $\lambda_e \in \mathbb{K}$, die fast alle verschwinden.
(c) Für je zwei lineare Abbildungen $\varphi, \psi\colon V \to W$ gilt: $\varphi|_E = \psi|_E \Rightarrow \varphi = \psi$.

Beweis. Die Äquivalenz (a)⇔(b) ist trivial. Die Implikation (a)⇒(c) folgt aus Lemma III.1.4(g). Ad (c)⇒(a): Betrachte die kanonische Projektion $\pi\colon V \to V/\langle E\rangle$, siehe Satz II.6.3. Da $\pi|_E = 0$, folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in (c), dass $\pi = 0$ gilt. Zusammen mit der Surjektivität von π erhalten wir $V/\langle E\rangle = \operatorname{img}(\pi) = \operatorname{img}(0) = \{0\}$ und somit $V = \langle E\rangle$, vgl. Bemerkung II.6.5. □

III.1.11. Beispiel. Die Teilmenge $\{\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3\\7\end{smallmatrix}\right)\}$ bildet ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$, denn jedes Element von $\mathbb{R}^2$ lässt sich als Linearkombination dieser Vektoren schreiben,

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (7x-3y)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + (2x+y)\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}.$$

III.1.12. Beispiel. Die Menge $\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}$ bildet ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$, denn jedes Element von $\mathbb{R}^3$ lässt sich als Linearkombination dieser Vektoren schreiben,

$$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = (x-2y+z)\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) + (y-2z)\left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right) + z\left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right).$$

III.1.13. Beispiel. Die Menge $\left\{\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{i}\\1+\mathbf{i}\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1-\mathbf{i}\\-3\mathbf{i}\end{smallmatrix}\right)\right\}$ bildet ein Erzeugendensystem von $\mathbb{C}^2$, denn jedes Element von $\mathbb{C}^2$ lässt sich als Linearkombination dieser Vektoren schreiben,

$$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix} = \bigl(-3\mathbf{i}z_1 - (1-\mathbf{i})z_2\bigr)\begin{pmatrix}\mathbf{i}\\1+\mathbf{i}\end{pmatrix} + \bigl(-(1+\mathbf{i})z_1 + \mathbf{i}z_2\bigr)\begin{pmatrix}1-\mathbf{i}\\-3\mathbf{i}\end{pmatrix}.$$

III.1.14. Beispiel. Der Vektorraum $\mathbb{K}^n$ ist endlich erzeugt, die Menge der sogenannten *Einheitsvektoren,* $\{e_1, \dots, e_n\}$,

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

bildet ein Erzeugendensystem von $\mathbb{K}^n$. Jedes $x \in \mathbb{K}^n$ lässt sich nämlich als Linearkombination $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ schreiben, wobei x_i die i-te Komponente von x bezeichnet.

III.1.15. Beispiel. Die Menge der Matrizen $\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$ bildet ein Erzeugendensystem von $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$, denn jedes Element von $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ lässt sich als Linearkombination dieser Matrizen schreiben,

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

III.1.16. Beispiel. Die Menge der Monome $\{1, z, z^2, z^3, \dots\}$ bildet ein Erzeugendensystem des Vektorraums der Polynome, $\mathbb{K}[z]$. Die Menge der Monome $\{1, z, z^2, \dots, z^n\}$ bildet ein Erzeugendensystem von $\mathbb{K}[z]_{\leq n}$.

Wir beenden diesen Abschnitt mit folgender Charakterisierung surjektiver linearer Abbildungen mittels Erzeugendensystemen.

III.1.17. Proposition (Surjektive lineare Abbildungen). *Für eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) φ ist surjektiv.
(b) Für jedes Erzeugendensystem E von V ist $\varphi(E)$ Erzeugendensystem von W.
(c) Es gibt eine Teilmenge $A \subseteq V$, sodass $\varphi(A)$ Erzeugendensystem von W ist.

Beweis. Die Impliktion (a)⇒(b) folgt aus Bemerkung III.1.9. Die Implikation (b)⇒(c) ist offensichtlich, denn jeder Vektorraum besitzt ein Erzeugendensystem. Ad (c)⇒(a): Nach Voraussetzung existiert eine Teilmenge $A \subseteq V$, sodass $\langle\varphi(A)\rangle = W$. Aus Lemma III.1.4(f) folgt daher $\varphi(\langle A\rangle) = \langle\varphi(A)\rangle = W$, also ist φ surjektiv. □

III.1.18. Bemerkung. Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ eine Matrix und $\psi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi(x) := Ax$, die damit assoziierte lineare Abbildung. Dann bildet die Menge der Spaltenvektoren von A, d.h.

$$\left\{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1}\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn}\end{pmatrix}\right\} = \big\{\psi(e_1), \dots, \psi(e_n)\big\} \subseteq \mathbb{K}^m$$

ein Erzeugendensystem von $\operatorname{img}(\psi)$, wobei $e_1, \dots, e_n$ die Einheitsvektoren in $\mathbb{K}^n$ bezeichnen. Dies folgt aus Bemerkung III.1.9, denn $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ bildet ein Erzeugendensystem von $\mathbb{K}^n$. Der Teilraum jener $y \in \mathbb{K}^m$, für die das Gleichungssystem $Ax = y$ mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ besitzt, wird daher von den Spalten von A aufgespannt, vgl. Bemerkung II.4.13. Insbesondere ist ψ genau dann surjektiv, wenn die Spalten von A ein Erzeugendensystem von $\mathbb{K}^m$ bilden. Etwa ist die mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 9 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 8 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 7 & 0 & 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

assoziierte lineare Abbildung $\psi\colon \mathbb{K}^7 \to \mathbb{K}^3$, $\psi(x) := Ax$, surjektiv, denn die Menge der Spaltenvektoren von A enthält die Vektoren e_1, e_2 und $e_2 + e_3$, deren lineare Hülle enthält daher auch den Vektor $e_3 = (e_2 + e_3) - e_2$ und stimmt somit mit $\mathbb{K}^3$ überein, vgl. Beispiel III.1.14. Das lineare Gleichungssystem $Ax = y$ besitzt daher für jedes $y \in \mathbb{K}^3$ mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{K}^7$.

III.2. Lineare Unabhängigkeit. Eine Teilmenge eines Vektorraums heißt linear abhängig wenn zwischen ihren Elementen nicht-triviale lineare Relationen bestehen. Genauer haben wir folgende Definition.

III.2.1. Definition (Lineare Abhängigkeit). Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Eine Teilmenge $A \subseteq V$ wird *linear abhängig* genannt, falls gilt: Es existieren paarweise verschiedene Elemente $a_1, \dots, a_n \in A$ und Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, die nicht alle verschwinden, sodass $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$.

III.2.2. Beispiel. Die Teilmenge $\{\binom{1}{2}, \binom{3}{7}, \binom{2}{4}\}$ von $\mathbb{R}^2$ ist linear abhängig, denn $2\binom{1}{2} + (-1)\binom{2}{4} = 0$.

III.2.3. Beispiel. Die Teilmenge $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}\right\}$ von $\mathbb{R}^3$ ist linear abhängig, denn $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} = 0$.

III.2.4. Bemerkung. Jede Teilmenge eines Vektorraums, die 0 enthält ist linear abhängig, denn $0 = 1 \cdot 0$.

III.2.5. Bemerkung. Jede Obermenge einer linear abhängigen Menge ist linear abhängig, d.h. ist A eine linear abhängige Teilmenge eines Vektorraums V und gilt $A \subseteq A' \subseteq V$, dann ist auch A' linear abhängig.

III.2.6. Proposition (Lineare Abhängigkeit). *Für eine Teilmenge A eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) A ist linear abhängig in V.
(b) Es existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ und paarweise verschiedene $a, a_1, \dots, a_n \in A$, sodass $a = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$, d.h. wenigstens eines der Elemente von A lässt sich als Linearkombination der restlichen schreiben.
(c) Es existiert eine echte Teilmenge $A' \subsetneq A$, sodass $\langle A' \rangle = \langle A \rangle$.

Beweis. Ad (a)⇒(b): Nach Voraussetzung existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, nicht alle gleich 0, und paarweise verschiedene $a_1, \dots, a_n \in A$, sodass $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$. Durch Umnummerieren dürfen wir o.B.d.A. $\lambda_n \neq 0$ annehmen. Es gilt daher

$$a_n = (-\lambda_n^{-1}\lambda_1)a_1 + \cdots + (-\lambda_n^{-1}\lambda_{n-1})a_{n-1},$$

die gewünschte Darstellung.

Für die Implikation (b)⇒(c) seien nun $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ und $a, a_1, \dots, a_n \in A$ paarweise verschieden, sodass $a = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$. Dann ist $A' := A \setminus \{a\} \subsetneq A$ eine echte Teilmenge von A und es gilt $a_1, \dots, a_n \in A'$. Aus $a = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$ erhalten wir weiters $a \in \langle A' \rangle$. Nach Lemma III.1.4(d) gilt daher $\langle A' \cup \{a\} \rangle = \langle A' \rangle$. Da $A = A' \cup \{a\}$ folgt $\langle A \rangle = \langle A' \rangle$.

Ad (c)⇒(a): Sei also $A' \subsetneq A$ eine echte Teilmenge mit $\langle A' \rangle = \langle A \rangle$. Es existiert daher $a \in A \setminus A'$. Da $a \in A \subseteq \langle A \rangle = \langle A' \rangle$ existieren paarweise verschiedene $a_1, \dots, a_n \in A'$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $a = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$. Auch die Vektoren $a, a_1, \dots, a_n$ sind paarweise verschieden, denn $a \notin A'$ aber $a_1, \dots, a_n \in A'$. Da

$$(-1)a + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 0,$$

ist A also linear abhängig. □

III.2.7. Beispiel. Wir wollen die Aussage von Proposition III.2.6 an der linear abhängige Teilmenge $\{\binom{1}{2}, \binom{3}{7}, \binom{2}{4}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ aus Beispiel III.2.2 illustrieren. In diesem Fall lassen sich zwei Vektoren als Linearkombinationen der anderen schreiben, $\binom{1}{2} = \frac{1}{2}\binom{2}{4}$ und $\binom{2}{4} = 2\binom{1}{2}$, aber der dritte Vektor ist nicht Linearkombination der restlichen, denn aus $\binom{3}{7} = \lambda\binom{1}{2} + \mu\binom{2}{4}$ folgt $3 = \lambda + 2\mu$

und $7 = 2\lambda + 4\mu$ und dieses Gleichungssystem besitzt keine Lösungen. Auch gilt $\mathbb{R}^2 = \langle \binom{1}{2}, \binom{3}{7} \rangle = \langle \binom{3}{7}, \binom{2}{4} \rangle = \langle \binom{1}{2}, \binom{3}{7}, \binom{2}{4} \rangle \neq \langle \binom{1}{2}, \binom{2}{4} \rangle = \langle \binom{1}{2} \rangle$.

III.2.8. Beispiel. Die Menge der Vektoren $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathbf{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathbf{i} \\ 3+5\mathbf{i} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ -3\mathbf{i} \\ -2+5\mathbf{i} \end{pmatrix} \right\}$ ist linear abhängig in $\mathbb{C}^3$, denn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2\mathbf{i} \\ 3+5\mathbf{i} \end{pmatrix} = (3+2\mathbf{i}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} - \mathbf{i} \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ -3\mathbf{i} \\ -2+5\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

III.2.9. Beispiel. Sei $\omega \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ fix. Die Funktionen $f_1, f_2, f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_1(x) := \sin(x), \quad f_2(x) := \cos(x) \quad \text{und} \quad f_3(x) := \sin(x+\omega).$$

sind paarweise verschieden, denn $f_1(0) = 0 \neq f_3(0) \neq 1 = f_2(0)$. Die Teilmenge $\{f_1, f_2, f_3\} \subseteq F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist linear abhängig, denn nach dem Additionstheorem für Winkelfunktionen gilt $f_3 = \cos(\omega) f_1 + \sin(\omega) f_2$.

III.2.10. Definition (Lineare Unabhängigkeit). Eine Teilmenge eines Vektorraums wird *linear unabhängig* genannt, wenn sie nicht linear abhängig ist.

III.2.11. Proposition (Lineare Unabhängigkeit). *Für eine Teilmenge A eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) A ist linear unabhängig in V.
(b) Sind $a_1, \dots, a_n \in A$ paarweise verschieden und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, sodass $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$, dann gilt schon $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
(c) Ist $\sum_{a \in A} \lambda_a a = 0$, wobei die Skalare $\lambda_a \in \mathbb{K}$ fast alle verschwinden, dann gilt schon $\lambda_a = 0$ für alle $a \in A$.
(d) Ist $\sum_{a \in A} \lambda_a a = \sum_{a \in A} \mu_a a$ wobei die Skalare $\lambda_a \in \mathbb{K}$ und $\mu_a \in \mathbb{K}$ fast alle verschwinden, dann gilt schon $\lambda_a = \mu_a$ für alle $a \in A$.
(e) Für jede echte Teilmenge $A' \subsetneq A$ gilt $\langle A' \rangle \neq \langle A \rangle$.

Beweis. Die Äquivalenz (a)⇔(b) folgt sofort aus der Definition. Die Äquivalenz (b)⇔(c) ist trivial. Ad (c)⇒(d): Sei also $\sum_{a \in A} \lambda_a a = \sum_{a \in A} \mu_a a$, wobei die Skalare $\lambda_a \in \mathbb{K}$ und $\mu_a \in \mathbb{K}$ fast alle verschwinden. Es folgt

$$\sum_{a \in A} (\lambda_a - \mu_a) a = \sum_{a \in A} \lambda_a a - \sum_{a \in A} \mu_a a = 0.$$

Für jedes $a \in A$ gilt daher nach Voraussetzung $\lambda_a - \mu_a = 0$, also $\lambda_a = \mu_a$. Die Implikation (d)⇒(c) folgt sofort indem wir $\mu_a = 0$ setzen. Die Äquivalenz (a)⇔(e) folgt aus Proposition III.2.6. □

III.2.12. Bemerkung. Die leere Menge ist stets linear unabhängig.

III.2.13. Bemerkung. Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist linear unabhängig, d.h. ist A eine linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums V und gilt $A' \subseteq A$, dann ist auch A' linear unabhängig. Dies folgt aus Bemerkung III.2.5.

III.2.14. Bemerkung. Ist W ein Teilraum eines Vektorraums V und $A \subseteq W$ linear unabhängig in W, dann ist A auch linear unabhängig in V.

III.2.15. Beispiel. Eine 1-elementige Teilmenge $\{v\} \subseteq V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$.

III.2.16. Beispiel. Die Menge der Vektoren $\{\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3\\7\end{smallmatrix}\right)\}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{R}^2$. Sind nämlich $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und

$$\lambda \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix} = 0,$$

dann folgt $\lambda + 3\mu = 0$ und $2\lambda + 7\mu = 0$, also $\lambda = \mu = 0$.

III.2.17. Beispiel. Die Menge der Vektoren $\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{R}^3$. Sind nämlich $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ und

$$\lambda \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) + \mu \left(\begin{smallmatrix}2\\1\\0\end{smallmatrix}\right) + \nu \left(\begin{smallmatrix}3\\2\\1\end{smallmatrix}\right) = 0,$$

so folgt $\lambda + 2\mu + 3\nu = 0$, $\mu + 2\nu = 0$ und $\nu = 0$, also $\lambda = \mu = \nu = 0$.

III.2.18. Beispiel. Die Menge der Vektoren $\left\{\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{i}\\1+\mathbf{i}\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1-\mathbf{i}\\-3\mathbf{i}\end{smallmatrix}\right)\right\}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{C}^2$. Sind nämlich $\lambda, \nu \in \mathbb{C}$ und

$$\lambda \begin{pmatrix}\mathbf{i}\\1+\mathbf{i}\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}1-\mathbf{i}\\-3\mathbf{i}\end{pmatrix} = 0,$$

dann folgt $\mathbf{i}\lambda + (1-\mathbf{i})\mu = 0$ und $(1+\mathbf{i})\lambda - 3\mathbf{i}\mu = 0$, also $\lambda = \mu = 0$.

III.2.19. Beispiel. Die Menge der Einheitsvektoren $\{e_1, \dots, e_n\}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{K}^n$, denn aus $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0$, folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

III.2.20. Beispiel. Die Menge der Matrizen $\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$ ist linear unabhängig in $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$. Sind nämlich $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{K}$ und

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = 0,$$

dann gilt schon $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

III.2.21. Beispiel. Die Menge der Monome, $\{1, z, z^2, z^3, \dots\}$, ist linear unabhängig in $\mathbb{K}[z]$.

III.2.22. Beispiel. Die Teilmenge $\{\sin, \cos\} \subseteq F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist linear unabhängig. Sind nämlich $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda \sin + \mu \cos = 0,$$

so folgt durch Auswerten bei 0 und $\pi/2$ sofort $0 = \lambda \sin(0) + \mu \cos(0) = \mu$ und $0 = \lambda \sin(\pi/2) + \mu \cos(\pi/2) = \lambda$.

III.2.23. Beispiel. Betrachte die Funktionen $f_1, f_2, f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) := e^x$, $f_2(x) := e^{2x}$ und $f_3(x) := e^{3x}$. Die Teilmenge $\{f_1, f_2, f_3\} \subseteq F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist linear unabhängig. Sind nämlich $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ und

$$\lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3 = 0,$$

dann erhalten wir durch Auswerten bei $x = \ln 1$, $x = \ln 2$ und $x = \ln 3$ das lineare Gleichungsystem

$$\begin{aligned} \lambda + \nu + \mu &= 0 \\ 2\lambda + 4\nu + 8\mu &= 0 \\ 3\lambda + 9\nu + 27\mu &= 0 \end{aligned}$$

und dieses besitzt nur eine Lösung, $\lambda = \mu = \nu = 0$.

III.3. Basen. Um Elemente eines Vektorraums effizient durch Linearkombinationen beschreiben zu können, liegt es nahe möglichst kleine, d.h. linear unabhängige Erzeugendensysteme zu betrachten. Diese werden Basen genannt.

III.3.1. Definition (Basis). Unter einer *Basis* eines Vektorraums verstehen wir ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.

III.3.2. Proposition (Basen). *Für eine Teilmenge B eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) B ist eine Basis von V.
(b) Jedes $v \in V$ lässt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination $v = \sum_{b \in B} \lambda_b b$ schreiben, wobei die Skalare $\lambda_b \in \mathbb{K}$ fast alle verschwinden.
(c) Zu jedem Vektorraum W und jeder Abbildung $f \colon B \to W$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi \colon V \to W$ mit $\varphi|_B = f$.

Beweis. Die Äquivalenz (a)⇔(b) folgt aus Proposition III.1.10(b) und Proposition III.2.11(d). Ad (b)⇒(c): Wir definieren $\varphi \colon V \to W$ durch $\varphi(v) := \sum_{b \in B} \lambda_b f(b)$, wobei $\lambda_b \in \mathbb{K}$ jene eindeutig bestimmten Skalare bezeichnen, für die $v = \sum_{b \in B} \lambda_b b$ gilt. Diese Abbildung ist wohldefiniert und es gilt $\varphi|_B = f$, denn jedes $b \in B$ lässt sich in der Form $b = 1 \cdot b$ schreiben, also $\varphi(b) = 1 f(b) = f(b)$. Es bleibt daher nur noch die Linearität von φ zu zeigen. Seien dazu $v = \sum_{b \in B} \lambda_b b$ und $v' = \sum_{\lambda \in B} \lambda'_b b$. Dann ist $v + v' = \sum_{b \in B} \lambda_b b + \sum_{b \in B} \lambda'_b b = \sum_{b \in B} (\lambda_b + \lambda'_b) b$ und daher

$$\varphi(v + v') = \sum_{b \in B} (\lambda_b + \lambda'_b) f(b) = \sum_{b \in B} \lambda_b f(b) + \sum_{b \in B} \lambda'_b f(b) = \varphi(v) + \varphi(v').$$

Für $\mu \in \mathbb{K}$ gilt analog $\mu v = \mu \sum_{b \in B} \lambda_b b = \sum_{b \in B} (\mu \lambda_b) b$ und daher $\varphi(\mu v) = \sum_{b \in B} (\mu \lambda_b) f(b) = \mu \sum_{b \in B} \lambda_b f(b) = \mu \varphi(v)$. Damit ist die Existenz einer linearen Abbildung φ mit den gewünschten Eigenschaften gezeigt. Die Eindeutigkeit von φ folgt aus Proposition III.1.10.

Ad (c)⇒(a): Betrachte die kanonische Projektion $\pi \colon V \to V/\langle B \rangle$. Da $\pi|_B = 0$, folgt aus der Eindeutigkeitsaussage in (c), dass $\pi = 0$ gilt. Da π surjektiv ist, erhalten wir $V/\langle B\rangle = \operatorname{img}(\pi) = \operatorname{img}(0) = \{0\}$ und somit $V = \langle B\rangle$, vgl. Bemerkung II.6.5. Dies zeigt, dass B ein Erzeugendensystem von V bildet. Um auch die lineare Unabhängigkeit von B zu zeigen, seien $b_1, \dots, b_n \in B$ paarweise verschieden und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ so, dass $\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n = 0$. Zu jedem $i \in \{1, \dots, n\}$ existiert nach Voraussetzung eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to \mathbb{K}$ mit $\varphi(b_i) = 1$ und $\varphi|_{B\setminus\{b_i\}} = 0$. Es folgt

$$0 = \varphi(0) = \varphi\big(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n\big) = \lambda_1\varphi(b_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(b_n) = \lambda_i\varphi(b_i) = \lambda_i,$$

und daher $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Dies zeigt, dass B auch linear unabhängig ist. □

III.3.3. Bemerkung. Ist A eine linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums V, dann bildet A eine Basis des Teilraums $\langle A\rangle$.

III.3.4. Bemerkung. Die leere Menge bildet eine Basis des trivialen Vektorraums $\{0\}$.

III.3.5. Beispiel. Die Menge der Einheitsvektoren $\{e_1, \dots, e_n\}$ bildet eine Basis von $\mathbb{K}^n$, siehe Beispiel III.1.14 und Beispiel III.2.19. Diese Basis wird als *Standardbasis* von $\mathbb{K}^n$ bezeichnet.

III.3.6. Beispiel. Die Teilmenge $\{\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}3\\7\end{smallmatrix}\right)\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^2$, denn nach Beispiel III.1.11 bildet sie ein Erzeugendensystem, das nach Beispiel III.2.16 auch linear unabhängig ist.

III.3.7. Beispiel. Die Menge $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}\right\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$, denn nach Beispiel III.1.12 bildet sie ein Erzeugendensystem, das nach Beispiel III.2.17 auch linear unabhängig ist.

III.3.8. Beispiel. Die Menge $\{\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{i}\\1+\mathbf{i}\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1-\mathbf{i}\\-3\mathbf{i}\end{smallmatrix}\right)\}$ ist eine Basis von $\mathbb{C}^2$, denn nach Beispiel III.1.13 bildet sie ein Erzeugendensystem, das nach Beispiel III.2.18 auch linear unabhängig ist.

III.3.9. Beispiel. Die Menge der Matrizen $\{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\}$ ist eine Basis von $M_{2\times 2}(\mathbb{K})$, denn nach Beispiel III.1.15 bildet sie ein Erzeugendensystem, das nach Beispiel III.2.20 auch linear unabhängig ist.

III.3.10. Beispiel. Die Menge der Monome $\{1, z, z^2, z^3, \dots\}$ bildet eine Basis von $\mathbb{K}[z]$. Die Menge der Monome $\{1, z, z^2, \dots, z^n\}$ bildet eine Basis von $\mathbb{K}[z]_{\leq n}$.

III.3.11. Bemerkung. Zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume, die gleichmächtige Basen besitzen, sind isomorph. Seien dazu V und W zwei $\mathbb{K}$-Vektorräume mit Basen B bzw. C, und sei $f\colon B \to C$ eine Bijektion. Nach Proposition III.3.2 existieren lineare Abbildungen $\varphi\colon V \to W$ und $\psi\colon W \to V$, sodass $\varphi|_B = f$ und $\psi|_C = f^{-1}$. Es folgt $(\psi\circ\varphi)|_B = f^{-1}\circ f = \mathrm{id}_B = \mathrm{id}_V|_B$ und $(\varphi\circ\psi)|_C = f\circ f^{-1} = \mathrm{id}_C = \mathrm{id}_W|_C$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition III.3.2(c) erhalten wir also $\psi\circ\varphi = \mathrm{id}_V$ und $\varphi\circ\psi = \mathrm{id}_W$. Somit ist φ ein linearer Isomorphismus mit Umkehrabbildung $\varphi^{-1} = \psi$, d.h. $V \cong W$. Ist etwa B eine Basis eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V, die aus genau n Elementen besteht, dann folgt $V \cong \mathbb{K}^n$. Daraus erhalten wir erneut $M_{m\times n}(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{mn}$ und $\mathbb{K}[z]_{\leq n} \cong \mathbb{K}^{n+1}$.

III.3.12. Proposition (Injektive lineare Abbildungen). *Ist $\varphi\colon V \to W$ linear und B eine Basis von V, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) φ ist injektiv.
(b) φ bildet jede linear unabhängig Teilmenge von V bijektiv auf eine linear unabhängige Teilmenge von W ab.
(c) φ bildet jede Basis von V bijektiv auf eine lin. unabh. Teilmenge von W ab.
(d) φ bildet B bijektiv auf eine linear unabhängige Teilmenge von W ab.

Beweis. Ad (a)⇒(b): Sei also $A \subseteq V$ linear unabhängig. Da φ injektiv ist, wird A durch φ bijektiv auf $\varphi(A)$ abgebildet. Es genügt daher zu zeigen, dass $\varphi(A)$ linear unabhängig ist. Seien dazu $w_1, \dots, w_n \in \varphi(A)$ paarweise verschieden und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, sodass $\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n = 0$. Da $w_i \in \varphi(A)$, existieren $v_1, \dots, v_n \in A$, sodass $\varphi(v_i) = w_i$, für alle $i = 1, \dots, n$. Beachte, dass auch die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ paarweise verschieden sein müssen. Wir erhalten

$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n) = \lambda_1\varphi(v_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(v_n) = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_n w_n = 0.$$

Aus der Injektivität von φ folgt somit $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$. Da A linear unabhängig ist, erhalten wir schließlich $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Dies zeigt, dass die Menge $\varphi(A)$ linear unabhängig in W ist.

Die Implikationen (b)⇒(c)⇒(d) sind trivial.

Ad (d)⇒(a): Sei $v \in \ker(\varphi)$. Da B ein Erzeugendensystem von V bildet, existieren paarweise verschiedene $b_1, \dots, b_n \in B$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, sodass $v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$. Es folgt $0 = \varphi(v) = \varphi(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n) = \lambda_1\varphi(b_1) + \cdots + \lambda_n\varphi(b_n)$. Da $\varphi|_B$ injektiv ist, sind die Vektoren $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)$ paarweise verschieden. Da $\varphi(B)$ linear unabhängig ist, folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, also $v = 0$. Dies zeigt $\ker(\varphi) = \{0\}$, folglich ist φ injektiv, vgl. Proposition II.3.22. □

III.3.13. Bemerkung. Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ eine Matrix. Die mit A assoziierte lineare Abbildung $\psi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi(x) = Ax$, ist genau dann injektiv, wenn die Spaltenvektoren von A paarweise verschieden sind und eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{K}^m$ bilden. Dies folgt aus Proposition III.3.12, denn die Standardbasis $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ von $\mathbb{K}^n$ wird durch ψ auf die Menge der Spaltenvektoren von A abgebildet.

III.3.14. Proposition (Isomorphismen). *Ist $\varphi\colon V \to W$ linear und B eine Basis von V, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) φ ist ein Isomorphismus.
(b) φ bildet jede Basis von V bijektiv auf eine Basis von W ab.
(c) φ bildet B bijektiv auf eine Basis von W ab.

Beweis. Die Implikation (a)⇒(b) folgt aus Proposition III.1.17 und Proposition III.3.12. Die Implikation (b)⇒(c) ist trivial. Die Implikation (c)⇒(a) folgt aus Proposition III.1.17 und Proposition III.3.12. □

III.3.15. Bemerkung. Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ eine Matrix. Die mit A assoziierte lineare Abbildung $\psi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi(x) = Ax$, ist genau dann ein Isomorphismus, wenn die Spaltenvektoren von A paarweise verschieden sind und eine Basis von $\mathbb{K}^m$ bilden. Dies folgt aus Proposition III.3.14, denn die Standardbasis $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ von $\mathbb{K}^n$ wird durch ψ auf die Menge der Spaltenvektoren von A abgebildet. Wir werden später sehen, dass in diesem Fall $m = n$ gelten muss.

III.3.16. Proposition. *Seien W' und W'' zwei komplementäre Teilräume eines Vektorraums V, d.h. $V = W' \oplus W''$. Weiters sei B' eine Basis von W' und B'' eine Basis von W''. Dann ist $B' \cap B'' = \emptyset$ und $B' \cup B''$ ist eine Basis von V.*

Beweis. Nach Lemma III.1.4(e) gilt $\langle B' \cup B''\rangle = \langle B'\rangle + \langle B''\rangle = W' + W'' = V$, also bildet $B' \cup B''$ ein Erzeugendensystem von V. Weiters haben wir $B' \cap B'' \subseteq W' \cap W'' = \{0\}$ und daher $B' \cap B'' = \emptyset$, denn jeder Basisvektor muss verschieden von Null sein. Um die lineare Unabhängigkeit von $B' \cup B''$ einzusehen, sei nun

$$\sum_{b \in B' \cup B''} \lambda_b b = 0,$$

wobei die Skalare λ_b fast alle verschwinden. Da $B' \cap B'' = \emptyset$, folgt

$$\underbrace{\textstyle\sum_{b\in B'} \lambda_b b}_{\in W'} = \underbrace{-\textstyle\sum_{b\in B''} \lambda_b b}_{\in W''},$$

also $\sum_{b\in B'} \lambda_b b = 0 = \sum_{b\in B''} \lambda_b b$, denn beide Seiten obiger Gleichung liegen in $W' \cap W'' = \{0\}$. Da B' und B'' beide linear unabhängig sind, folgt $\lambda_b = 0$, für alle $b \in B' \cup B''$. Somit ist $B' \cup B''$ linear unabhängig, also eine Basis von V. $\square$

Wir wollen nun zeigen, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt. Eine Methode Basen zu konstruieren besteht darin Erzeugendensysteme solange zu Verkleinern, bis man bei einem linear unabhängig Erzeugendensystem, also einer Basis, anlangt. Ist etwa E ein linear abhängiges Erzeugendensystem von V, dann existiert nach Proposition III.2.6 eine echte Teilmenge $E' \subsetneq E$, sodass $\langle E'\rangle = \langle E\rangle = V$. Wir erhalten also ein echt kleiners Erzeugendensystem E' von V. Ist E' immer noch linear abhängig können wir die selbe Konstruktion auf E' anwenden und erhalten ein noch kleiners Erzeugendensystem $E'' \subsetneq E'$ von V. Im Allgemeinen wird dieser Prozess nicht abbrechen, und liefert auch keine Basis von V. War das ursprüngliche Erzeugendensystem jedoch endlich, so müssen wir nach endlich vielen Schritten ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, d.h. eine Basis von V erhalten. Wir fassen diese Überlegungen in folgender Proposition zusammen.

III.3.17. Proposition. *Ist E ein endliches Erzeugendensystem eines Vektorraums V, dann existiert eine Basis B von V mit $B \subseteq E$. Insbesondere besitzt jeder endlich erzeugte Vektorraum eine Basis.*

Ein anderer Ansatz zur Konstruktion von Basen besteht darin linear unabhängige Teilmengen durch Hinzunahme von Vektoren so zu erweitern, dass die entstehenden Mengen immer noch linear unabhängig sind. Dazu:

III.3.18. Lemma. *Sei A eine linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums V und $v \in V \setminus \langle A \rangle$. Dann ist auch $A \cup \{v\}$ linear unahängig.*

Beweis. Seien also $a_1, \dots, a_n \in A$ paarweise verschieden und $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ so, dass

$$0 = \lambda v + \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n.$$

Wäre $\lambda \neq 0$, erhielten wir $v = (-\lambda^{-1}\lambda_1)a_1 + \cdots + (-\lambda^{-1}\lambda_n)a_n \in \langle A \rangle$, ein Widerspruch zur Voraussetzung $v \in V \setminus \langle A \rangle$. Es muss daher $\lambda = 0$ gelten. Somit ist auch $0 = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n$. Da A linear unabhängig ist, folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Dies zeigt, dass $A \cup \{v\}$ linear unabhängig ist. □

Ist nun A eine linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraums V, die nicht ganz V aufspannt, dann existiert nach Lemma III.3.18 eine echt größere linear unabhängige Teilmenge $A' \supsetneq A$. Ist A' ein Erzeugendensystem von V, dann haben wir eine Basis gefunden. Ist A' kein Erzeugendensystem, dann erhalten wir mittels Lemma III.3.18 eine noch größere linear unabhängige Teilmenge $A'' \supsetneq A'$. Dieser Prozess lässt sich fortsetzen, er wird i.A. aber nicht abbrechen, und es ist an dieser Stelle nicht klar wie sich daraus Basen von V gewinnen lassen. Lemma III.3.18 erlaubt es jedoch Basen als maximal linear unabhängige Teilmengen zu charakterisieren.

III.3.19. Proposition. *Für eine Teilmenge B eines Vektorraums V sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) B ist eine Basis von V.
(b) B ist ein minimales Erzeugendensystem von V, d.h. $\langle B \rangle = V$ und für jede echte Teilmenge $A \subsetneq B$ ist $\langle A \rangle \neq V$.
(c) B ist eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V, d.h. B ist linear unabhängig und jede echte Obermenge A, d.h. $B \subsetneq A \subseteq V$, ist linear abhängig.

Beweis. Die Äquivalenz (a)⇔(b) folgt sofort aus Proposition III.2.11.

Ad (a)⇒(c): Sei also B eine Basis von V. Insbesondere ist B linear unabhängig. Da B ein Erzeugendensystem von V bildet, gilt für jede Obermenge A von B, d.h. $B \subseteq A \subseteq V$, auch $\langle A \rangle = \langle B \rangle$, denn $V = \langle B \rangle \subseteq \langle A \rangle \subseteq V$. Nach Proposition III.2.6 ist daher jede echte Obermenge, $B \subsetneq A \subseteq V$, linear abhängig.

Ad (c)⇒(a): Sei also B eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V. Jede echte Obermenge A mit $B \subsetneq A \subseteq V$ ist daher linear abhängig. Insbesondere ist für jedes $v \in V \setminus B$ die Menge $B \cup \{v\}$ linear abhängig, also $v \in \langle B \rangle$ nach Lemma III.3.18. Dies zeigt $V \setminus B \subseteq \langle B \rangle$. Da auch $B \subseteq \langle B \rangle$ gilt, erhalten wir $V = B \cup (V \setminus B) \subseteq \langle B \rangle \subseteq V$, also $\langle B \rangle = V$. Somit ist B ein Erzeugendensystem von V, also eine Basis. □

Um nun die Existenz von Basen zeigen zu können, benötigen wir ein Hilfsmittel aus der Mengenlehre. Wir wiederholen zunächst die notwendigen Begriffe.

Sei X eine Menge und $\leq$ eine Halbordnung auf X, d.h. eine reflexsive, transitive und antisymmetrische Relation auf X, siehe [**7**, Kapitel 4]. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt nach *oben beschränkt* wenn $s \in X$ existiert, sodass $a \leq s$, für alle $a \in A$. Jedes solche s wird *eine obere Schranke* von A genannt. Unter einer *Kette in* X verstehen wir eine totalgeordnete Teilmenge $K \subseteq X$, d.h. für je zwei $k_1, k_2 \in K$ gilt stets $k_1 \leq k_2$ oder $k_2 \leq k_1$. Ein Element $x_0 \in X$ wird *maximal* genannt, wenn für jedes $x \in X$ mit $x_0 \leq x$ schon $x_0 = x$ gilt. In anderen Worten, ein Element von X ist genau dann maximal, wenn kein echt größeres Element von X existiert. Das wesentliche Hilfsmittel aus der Mengenlehre, das wir zur Konstruktion von Basen allgemeiner Vektorräume verwenden werden ist das folgende nach Max Zorn benannte Lemma.

III.3.20. Lemma (Lemma von Zorn). *Jede halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat, besitzt mindestens ein maximales Element.*

III.3.21. Bemerkung. Das Lemma von Zorn ist zum Auswahlaxiom äquivalent, siehe etwa [**4**, letztes Kapitel]. Dieses besagt, dass es stets möglich ist bei einer Familie nicht leerer Mengen X_i, $i \in I$, aus jeder der Mengen X_i ein Element auszuwählen, in anderen Worten, es existiert eine Abbildung $\alpha\colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i$, sodass $\alpha(i) \in X_i$, für jedes $i \in I$. Dies bedeutet gerade, dass das Produkt $\prod_{i\in I} X_i$ nicht leer ist. Äquivalent dazu ist auch folgende Aussage: Jede surjektive Abbildung $f\colon X \to Y$ besitzt ein Rechtsinverses, d.h. es existiert eine Abbildung $g\colon Y \to X$, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Es soll an dieser Stelle auch erwähnt sein, dass das Auswahlaxiom unabhängig vom Zermelo–Fraenkel Axiomensystem (ZFA) der Mengenlehre ist. Ist ZFA widerspruchsfrei, dann gilt dies auch für ZFA+Auswahlaxiom, aber auch für ZFA+(Negation des Auswahlaxioms). Die erste Aussage wurde von Kurt Gödel 1938 bewiesen, die zweite von Paul Cohen im Jahre 1963.

III.3.22. Satz (Existenz von Basen). *Sei V ein Vektorraum, $A \subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge und E ein Erzeugendensystem von V, sodass $A \subseteq E$. Dann existiert eine Basis B von V mit $A \subseteq B \subseteq E$.*

Beweis. Betrachte folgende Teilmenge der Potenzmenge von V,

$$X := \big\{M \bigm| A \subseteq M \subseteq E \text{ und } M \text{ ist linear unabhängig}\big\}.$$

Die Mengeninklusion definiert eine Halbordnung $\subseteq$ auf X. Wir wollen nun zeigen, dass sich das Lemma von Zorn auf X anwenden lässt. Sei also K eine Kette in X. Es genügt zu zeigen, dass

$$S := \bigcup_{M\in K} M$$

in X liegt, denn dann ist S offenbar eine obere Schranke für K. Offensichtlich gilt $A \subseteq S \subseteq E$, denn $A \subseteq M \subseteq E$ für jedes $M \in K$, also auch für deren Vereinigung.

Es bleibt daher nur noch die lineare Unabhängigkeit von S zu zeigen. Seien dazu $s_1, \dots, s_n \in S$ paarweise verschieden und $\lambda_1 \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, sodass $\lambda_1 s_1 + \cdots + \lambda_n s_n = 0$. Nach Konstruktion von S existiert zu jedem $i \in \{1, \dots, n\}$ ein $M_i \in K$, sodass $s_i \in M_i$. Da endliche totalgeordnete Mengen stets ein (eindeutiges) Maximum besitzen, vgl. Übungsaufgabe 63, existiert $i_0 \in \{1, \dots, n\}$, sodass $M_i \subseteq M_{i_0}$ für alle $i = 1, \dots, n$. Die Vektoren $s_1, \dots, s_n$ liegen daher alle in M_{i_0}. Da M_{i_0} linear unabhängig ist, folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Dies zeigt, dass S linear unabhängig ist.

Wir haben oben gesehen, dass jede Kette in X nach oben beschränkt ist. Nach dem Lemma von Zorn existiert daher ein maximales Element $B \in X$. Nach Konstruktion ist B eine linear unabhängige Teilmenge von V und es gilt $A \subseteq B \subseteq E$. Wegen der Maximalität von B ist jede Obermenge B' mit $B \subsetneq B' \subseteq E$ linear abhängig. Für jedes $e \in E \setminus B$ ist daher $B \cup \{e\}$ linear abhängig, also $e \in \langle B \rangle$ nach Lemma III.3.18. Dies zeigt $E \setminus B \subseteq \langle B \rangle$. Zusammen mit $B \subseteq \langle B \rangle$ folgt $E \subseteq \langle B \rangle$. Da E ein Erzeugendensystem von V bildet, erhalten wir $V = \langle E \rangle \subseteq \langle B \rangle \subseteq V$, also $\langle B \rangle = V$. Dies zeigt, dass B ein Erzeugendensystem von V bildet, also ist B die gesuchte Basis. □

III.3.23. Korollar.

(a) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
(b) Jede linear unabhängige Teilmenge kann zu einer Basis erweitert werden.
(c) Jedes Erzeugendensystem enthält eine Basis.

Beweis. Dies folgt aus Satz III.3.22 mit $A = \emptyset$ bzw. $E = V$. □

III.3.24. Bemerkung. Es lässt sich zeigen, dass je zwei Basen eines Vektorraums gleiche Kardinalität haben, d.h. bijektiv aufeinander abgebildet werden können, siehe etwa [**6**, Theorem 1.12]. Den endlich-dimensionalen Fall werden wir in Kapitel IV genau diskutieren.

III.3.25. Korollar. *Ist W ein Teilraum eines Vektorraums V, dann lässt sich jede lineare Abbildung $\varphi\colon W \to U$ zu einer linearen Abbildung $\tilde{\varphi}\colon V \to U$ fortsetzen, d.h. $\tilde{\varphi}|_W = \varphi$.*

Beweis. Nach Korollar III.3.23(a) besitzt W eine Basis B. Offensichtlich ist B auch in V linear unabhängig. Nach Korollar III.3.23(b) existiert daher eine Basis $\tilde{B}$ von V mit $B \subseteq \tilde{B}$. Nach Proposition III.3.2 existiert eine lineare Abbildung $\tilde{\varphi}\colon V \to U$, sodass $\tilde{\varphi}|_B = \varphi|_B$ und $\tilde{\varphi}|_{\tilde{B} \setminus B} = 0$. Nach Proposition III.3.2 gilt $\tilde{\varphi}|_W = \varphi$, also ist $\tilde{\varphi}$ die gesuchte Fortsetzung von φ. □

III.3.26. Korollar. *Jeder Teilraum besitzt ein Komplement.*

Beweis. Sei also W Teilraum eines Vektorraums V. Nach Korollar III.3.25 existiert eine lineare Abbildung $\pi\colon V \to W$, sodass $\pi|_W = \mathrm{id}_W$. Daraus folgt $\mathrm{img}(\pi) = W$ und $\pi \circ \pi = \pi$. Nach Proposition II.5.8 ist daher $\ker(\pi)$ ein Komplement von W in V, d.h. $V = W \oplus \ker(\pi)$. □

III.3.27. Korollar.

(a) *Jede injektive lineare Abbildung* $\varphi\colon V\to W$ *besitzt eine lineare Linksinverse, d.h. es existiert eine lineare Abbildung* $\psi\colon W\to V$ *mit* $\psi\circ\varphi=\mathrm{id}_V$.
(b) *Jede surjektive lineare Abbildung* $\varphi\colon V\to W$ *besitzt eine lineare Rechtsinverse, d.h. es existiert eine lineare Abbildung* $\psi\colon W\to V$ *mit* $\varphi\circ\psi=\mathrm{id}_W$

Beweis. Ad (a): Wegen der Injektivität von φ ist $\varphi\colon V\to\mathrm{img}(\varphi)$ eine lineare Bijektion, also ein Isomorphismus. Nach Korollar III.3.25 lässt sich die lineare Abbildung $\varphi^{-1}\colon\ \mathrm{img}(\varphi)\to V$ zu einer linearen Abbildung $\psi\colon W\to V$ fortsetzen, d.h. $\psi|_{\mathrm{img}(\varphi)}=\varphi^{-1}$. Es folgt nun $\psi\circ\varphi=\psi|_{\mathrm{img}(\varphi)}\circ\varphi=\varphi^{-1}\circ\varphi=\mathrm{id}_V$.

Ad (b): Sei B eine Basis von W. Wegen der Surjektivität von φ existiert eine Abbildung $f\colon B\to V$, sodass $\varphi\circ f=\mathrm{id}_B$. Nach Proposition III.3.2 existiert eine lineare Abbildung $\psi\colon W\to V$, sodass $\psi|_B=f$. Es folgt $\varphi\circ\psi|_B=\varphi\circ f=\mathrm{id}_B$ und nach der Eindeutigkeitsaussage in Proposition III.3.2(c) daher $\varphi\circ\psi=\mathrm{id}_W$. □

III.3.28. Korollar. *Sei* V *ein* $\mathbb{K}$-*Vektorraum und* $0\neq v\in V$. *Dann existiert ein lineares Funktional* $\alpha\colon V\to\mathbb{K}$ *mit* $\alpha(v)=1$.

Beweis. Da $v\neq 0$, ist die lineare Abbildung $\varphi\colon\mathbb{K}\to V$, $\varphi(\lambda):=\lambda v$, injektiv. Nach Korollar III.3.27(a) existiert daher eine lineare Abbildung $\alpha\colon V\to\mathbb{K}$, sodass $\alpha\circ\varphi=\mathrm{id}_{\mathbb{K}}$. Es gilt daher $\alpha(v)=\alpha(\varphi(1))=(\alpha\circ\varphi)(1)=\mathrm{id}_{\mathbb{K}}(1)=1$. □

III.3.29. Proposition. *Seien* W' *und* W'' *zwei Teilräume eines Vektorraums* V. *Dann existieren eine Basis* B' *von* W' *und eine Basis* B'' *von* W'', *sodass* $B'\cap B''$ *eine Basis von* $W'\cap W''$ *bildet, und* $B'\cup B''$ *eine Basis von* $W'+W''$ *bildet.*

Beweis. Nach Korollar III.3.26 existiert ein zu $W:=W'\cap W''$ komplementärer Teilraum U in $W'+W''$, d.h.

$$W'+W''=W\oplus U.$$

Für die Teilräume $U':=W'\cap U$ und $U'':=W''\cap U$ gilt dann:

$$W'=W\oplus U',\qquad W''=W\oplus U'',\qquad U=U'\oplus U''.$$

Es ist nämlich $W\cap U'\subseteq W\cap U=\{0\}$ und $W+U'\subseteq W'$ aber auch $W'\subseteq W+U'$, denn zu jedem $w'\in W'$ existieren $w\in W$ und $u\in U$ mit $w'=w+u$, da aber $u=w'-w\in W'$ folgt $u\in U'$, also $w'\in W+U'$. Dies zeigt die erste Behauptung, $W'=W\oplus U$. Die zweite, $W''=W\oplus U''$, lässt sich analog beweisen. Daraus folgt weiters $W'+W''=W+U'+U''$ und somit $U\subseteq U'+U''$, denn zu jedem $u\in U$ exitieren $w\in W$, $u'\in U'$ und $u''\in U''$ mit $u=w+u'+u''$, da aber $w=u-u'-u''\in W\cap U=\{0\}$ muss $w=0$ gelten, also $u=u'+u''\in U'+U''$. Da offensichtlich $U'+U''\subseteq U$ erhalten wir $U=U'+U''$. Schließlich haben wir auch $U'\cap U''\subseteq W'\cap W''\cap U=W\cap U=\{0\}$, also $U=U'\oplus U''$.

Nach Korollar III.3.23(a) existiert eine Basis B von W, eine Basis C' von U' und eine Basis C'' von U''. Nach Proposition III.3.16 ist $B':=B\cup C'$ eine Basis von W', $B'':=B\cup C''$ eine Basis von W'', $C'\cup C''$ eine Basis von U, $B'\cup B''=B\cup C'\cup C''$ eine Basis von $W'+W''$ und $C'\cap C''=\emptyset$, also auch $B'\cap B''=B$ eine Basis von $W'\cap W''=W$. □

III.4. Dualräume. Eine Möglichkeit einen Teilraum W eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V zu beschreiben besteht darin eine Basis, oder allgemeiner, ein Erzeugendensystem von W anzugeben, siehe oben. Teilräume lassen sich aber auch durch lineare Gleichungen beschreiben. Eine naheliegende Verallgemeinerung einer Gleichung $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ für Vektoren $x \in \mathbb{K}^n$ ist die Bedingung $\alpha(v) = 0$, wobei $\alpha\colon V \to \mathbb{K}$ linear ist. Haben wir eine Menge linearer Abbildungen $\alpha_i\colon V \to \mathbb{K}$, $i \in I$, dann bildet

$$\bigl\{v \in V \bigm| \forall i \in I : \alpha_i(v) = 0\bigr\} = \bigcap_{i\in I} \ker(\alpha_i)$$

einen Teilraum von V, den wir als Lösungsraum des Gleichungssystems $\alpha_i(v) = 0$, $i \in I$, verstehen können. Wir werden unten sehen, dass sich jeder Teilraum von V in dieser Form schreiben lässt. Für eine effektive Beschreibung sind natürlich möglichst kleine Gleichungssysteme interessant. Für endlich-dimensionale Vektorräume werden wir diesen Aspekt im nächsten Kapitel genau behandeln.

III.4.1. Definition (Dualraum). Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Unter einem *linearen Funktional* auf V verstehen wir eine lineare Abbildung $V \to \mathbb{K}$. Unter dem *Dualraum* von V verstehen wir den Vektorraum $V^* := L(V, \mathbb{K})$, d.h. den Vektorraum aller linearen Funktionale auf V, vgl. Proposition II.3.18.

III.4.2. Beispiel. Es ist $(\mathbb{K}^n)^* = L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \cong M_{1\times n}(\mathbb{K})$, vgl. Satz II.4.4, lineare Funktionale auf $\mathbb{K}^n$ können daher durch Zeilenvektoren beschrieben werden.

III.4.3. Proposition. *Jede Abbildung $\varphi\colon V \to W$ induziert eine lineare Abbildung zwischen den Dualräumen, $\varphi^t\colon W^* \to V^*$, $\varphi^t(\beta) := \beta \circ \varphi$, $\beta \in W^*$. Die Zuordnung*

$$L(V,W) \to L(W^*,V^*), \quad \varphi \mapsto \varphi^t, \tag{III.1}$$

ist linear und injektiv, es gilt daher

$$(\varphi_1 + \varphi_2)^t = \varphi_1^t + \varphi_2^t \qquad \textit{sowie} \qquad (\lambda\varphi)^t = \lambda\varphi^t,$$

für beliebige lineare Abbildungen $\varphi, \varphi_1, \varphi_2\colon V \to W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Für jede weitere lineare Abbildung $\psi\colon W \to U$ gilt

$$(\psi \circ \varphi)^t = \varphi^t \circ \psi^t \qquad \textit{und} \qquad \mathrm{id}_V^t = \mathrm{id}_{V^*}.$$

Ist $\varphi\colon V \to W$ ein Isomorphismus, so ist auch $\varphi^t\colon W^* \to V^*$ ein Isomorphismus,

$$(\varphi^t)^{-1} = (\varphi^{-1})^t.$$

Insbesonder folgt aus $V \cong W$ auch $V^* \cong W^*$.

Beweis. Beachte zunächst, dass $\varphi^t(\beta) = \beta \circ \varphi$ als Komposition linearer Abbildungen selbst linear ist, d.h. $\varphi^t(\beta) \in V^*$ für jedes $\beta \in W^*$. Die Linearität von $\varphi^t\colon W^* \to V^*$ folgt aus Proposition II.3.18(a), denn $\varphi^t(\beta_1 + \beta_2) = (\beta_1 + \beta_2) \circ \varphi = \beta_1 \circ \varphi + \beta_2 \circ \varphi = \varphi^t(\beta_1) + \varphi^t(\beta_2)$ und $\varphi^t(\lambda\beta) = (\lambda\beta) \circ \varphi = \lambda(\beta \circ \varphi) = \lambda\varphi^t(\beta)$, für beliebige $\beta, \beta_1, \beta_2 \in W^*$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Aus Proposition II.3.18(b) erhalten wir weiters $(\varphi_1 + \varphi_2)^t(\beta) = \beta \circ (\varphi_1 + \varphi_2) = \beta \circ \varphi_1 + \beta \circ \varphi_2 = \varphi_1^t(\beta) + \varphi_2^t(\beta) = (\varphi_1^t + \varphi_2^t)(\beta)$

und $(\lambda\varphi)^t(\beta) = \beta \circ (\lambda\varphi) = \lambda(\beta \circ \varphi) = \lambda\varphi^t(\beta)$, für jedes $\beta \in W^*$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Die Zuordnung (III.1) ist daher linear. Ist $0 \neq \varphi \in L(V, W)$, dann existiert $v \in V$ mit $\varphi(v) \neq 0$. Nach Korollar III.3.28 existiert daher ein Funktional $\beta \in W^*$ mit $\beta(\varphi(v)) = 1$. Es folgt $\varphi^t(\beta)(v) = \beta(\varphi(v)) = 1 \neq 0$, also $\varphi^t(\beta) \neq 0$ und daher $\varphi^t \neq 0$. Dies zeigt, dass die Abbildung (III.1) trivialen Kern hat, und daher injektiv ist, vgl. Proposition II.3.22. Weiters gilt $\mathrm{id}_V^t(\alpha) = \alpha \circ \mathrm{id}_V = \alpha$, für jedes $\alpha \in V^*$, also $\mathrm{id}_V^t = \mathrm{id}_{V^*}$, sowie $(\psi \circ \varphi)^t(\gamma) = \gamma \circ (\psi \circ \varphi) = (\gamma \circ \psi) \circ \varphi = \varphi^t(\gamma \circ \psi) = \varphi^t(\psi^t(\gamma)) = (\varphi^t \circ \psi^t)(\gamma)$, für jedes $\gamma \in U^*$, also $(\psi \circ \varphi)^t = \varphi^t \circ \psi^t$. Ist $\varphi\colon V \to W$ ein Isomorphismus, so folgt $\varphi^t \circ (\varphi^{-1})^t = (\varphi^{-1} \circ \varphi)^t = \mathrm{id}_V^t = \mathrm{id}_{V^*}$ und $(\varphi^{-1})^t \circ \varphi^t = (\varphi \circ \varphi^{-1})^t = \mathrm{id}_W^t = \mathrm{id}_{W^*}$, d.h. φ^t ist invertierbar mit Umkehrabbildung $(\varphi^t)^{-1} = (\varphi^{-1})^t$. □

III.4.4. Bemerkung. Die Abbildung (III.1) ist i.A. nicht surjektiv.

III.4.5. Bemerkung. Nach Satz II.4.4 ist $\phi\colon \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cong} L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) = (\mathbb{K}^n)^*$, $\phi(x) := \psi_{x^t}$, ein Isomorphismus. Ist $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $\psi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi_A(x) = Ax$, die damit assoziierte lineare Abbildung, dann kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^m \arrow[r, "\phi_{\mathbb{K}^m}", "\cong"'] \arrow[d, "\psi_{A^t}"'] & (\mathbb{K}^m)^* \arrow[d, "(\psi_A)^t"] \\ \mathbb{K}^n \arrow[r, "\phi_{\mathbb{K}^n}", "\cong"'] & (\mathbb{K}^n)^* \end{tikzcd} \qquad \text{d.h.} \qquad \phi_{\mathbb{K}^n} \circ \psi_{A^t} = (\psi_A)^t \circ \phi_{\mathbb{K}^m}.$$

Es gilt nämlich $((\psi_A)^t \circ \phi_{\mathbb{K}^m})(x) = (\psi_A)^t(\psi_{x^t}) = \psi_{x^t} \circ \psi_A = \psi_{x^t A} = \psi_{(A^t x)^t} = \phi_{\mathbb{K}^n}(A^t x) = (\phi_{\mathbb{K}^n} \circ \psi_{A^t})(x)$, für alle $x \in \mathbb{K}^m$. Bis auf den Isomorphismus ϕ ist die duale Abbildung, $(\psi_A)^t$, daher durch die transponierte Matrix, A^t, gegeben, vgl. Proposition II.4.11.

III.4.6. Definition (Annihilator). Unter dem *Annihilator* einer Teilmenge A eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V verstehen wir den Teilraum

$$A^\circ := \{\alpha \in V^* : \alpha|_A = 0\} \subseteq V^*.$$

III.4.7. Lemma. *Sind A und B Teilmengen eines Vektorraums V, dann gilt:*

(a) $\{0\}^\circ = V^*$ und $V^\circ = \{0\}$.
(b) $A \subseteq B \Rightarrow B^\circ \subseteq A^\circ$.
(c) $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.
(d) $A^\circ = \langle A\rangle^\circ$.
(e) $\langle A\rangle = \bigcap_{\alpha\in A^\circ} \ker(\alpha)$.
(f) $\langle A\rangle \subseteq \langle B\rangle \Leftrightarrow B^\circ \subseteq A^\circ$.
(g) $\langle A\rangle = \langle B\rangle \Leftrightarrow A^\circ = B^\circ$.
(h) Für jeden Teilraum W von V gilt: $W = \bigcap_{\alpha\in W^\circ} \ker(\alpha)$.
(i) Für je zwei Teilräume W_1 und W_2 von V gilt: $W_1 \subseteq W_2 \Leftrightarrow W_2^\circ \subseteq W_1^\circ$.
(j) Für je zwei Teilräume W_1 und W_2 von V gilt: $W_1 = W_2 \Leftrightarrow W_1^\circ = W_2^\circ$.

Beweis. Die Behauptungen (a), (b) und (c) sind trivial. Behauptung (d) folgt aus Lemma III.1.4(g). Ad (e): Offensichtlich gilt $A \subseteq \bigcap_{\alpha \in A^\circ} \ker(\alpha)$ und daher auch $\langle A \rangle \subseteq \bigcap_{\alpha \in A^\circ} \ker(\alpha)$, denn als Durchschnitt von Teilräumen bildet die rechte Seite einen Teilraum von V. Für die umgekehrte Inklusion sei nun $v \in V \setminus \langle A \rangle$. Es genügt ein lineares Funktional $\alpha\colon V \to \mathbb{K}$ zu konstruieren, sodass $\alpha(v) = 1$ und $\alpha|_A = 0$. Für die Konstruktion eines solchen Funktionals α bezeichne $\pi\colon V \to V/\langle A \rangle$ die kanonische Projektion. Da $v \notin \langle A \rangle$ gilt $\pi(v) \neq 0$. Nach Korollar III.3.28 existiert ein lineares Funktional $\bar{\alpha}\colon V/\langle A \rangle \to \mathbb{K}$ mit $\bar{\alpha}(\pi(v)) = 1$. Für das Funktional $\alpha := \bar{\alpha} \circ \pi \in V^*$ gilt daher $\alpha(v) = 1$ aber auch $\alpha|_A = 0$, denn $A \subseteq \ker(\pi)$. Ad (f): Die Implikation $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle \Rightarrow B^\circ \subseteq A^\circ$ folgt aus (b) und (d), die umgekehrte Implikation aus (e). Aus (f) erhalten wir auch sofort (g). Die verbleibenden Behauptungen (h), (i) und (j) folgen aus (e), (f) und (g), denn für jeden Teilraum W gilt $W = \langle W \rangle$. □

III.4.8. Bemerkung. Ist W ein Teilraum eines Vektorraums V und $A \subseteq W^\circ$ ein Erzeugendensystem, d.h. $\langle A \rangle = W^\circ$, dann gilt

$$W = \bigl\{ v \in V \bigm| \forall \alpha \in A : \alpha(v) = 0 \bigr\} = \bigcap_{\alpha \in A} \ker(\alpha),$$

jedes Erzeugendensysteme von W° liefert daher ein Gleichungssysteme für W. Dies folgt aus Lemma III.4.7(h) und

$$\bigcap_{\alpha \in A} \ker(\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \langle A \rangle} \ker(\alpha).$$

Um die letzte Gleichung einzusehen, sei $v \in \bigcap_{\alpha \in A} \ker(\alpha)$. Für beliebige $\alpha_i \in A$ und $\lambda_i \in \mathbb{K}$ gilt dann auch $(\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_n\alpha_n)(v) = \lambda_1\alpha_1(v) + \cdots + \lambda_n\alpha_n(v) = 0$. Dies zeigt $\bigcap_{\alpha \in A} \ker(\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha \in \langle A \rangle} \ker(\alpha)$, die andere Inklusion ist trivial. Umgekehrt folgt i.A. aus $W = \bigcap_{\alpha \in A} \ker(\alpha)$ nicht, dass A ein Erzeugendensystem von W bildet. Betrachten wir etwa den Vektorraum $V = \mathbb{K}[z]$ und bezeichnet $\alpha_i \in \mathbb{K}[z]^*$ das lineare Funktional, das einem Polynom seinen i-ten Koeffizienten zuordnet, d.h. $\alpha_i(p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots) := p_i$, dann gilt offensichtlich $\bigcap_i \ker(\alpha_i) = \{0\}$, aber die Menge der Funktionale $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots\}$ bildet kein Erzeugendensystem von $\{0\}^\circ = \mathbb{K}[z]^*$, etwa lässt sich das lineare Funktional $\alpha \in \mathbb{K}[z]^*$, $\alpha(p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots) := \sum_i p_i$, nicht als Linearkombination der Funktionale α_i schreiben.

III.4.9. Satz. *Für je zwei Teilräume W_1 und W_2 eines Vektorraums V gilt*

$$(W_1 + W_2)^\circ = W_1^\circ \cap W_2^\circ \quad \textit{und} \quad (W_1 \cap W_2)^\circ = W_1^\circ + W_2^\circ.$$

Insbesondere haben wir:

$$\begin{aligned} W_1^\circ \cap W_2^\circ = \{0\} \quad &\Leftrightarrow \quad W_1 + W_2 = V \\ W_1^\circ + W_2^\circ = V^* \quad &\Leftrightarrow \quad W_1 \cap W_2 = \{0\} \\ W_1^\circ \oplus W_2^\circ = V^* \quad &\Leftrightarrow \quad W_1 \oplus W_2 = V \end{aligned}$$

Beweis. Die erste Gleichheit folgt aus:

$$\begin{aligned} W_1^\circ \cap W_2^\circ &= (W_1 \cup W_2)^\circ && \text{nach Lemma III.4.7(c)} \\ &= \langle W_1 \cup W_2\rangle^\circ && \text{nach Lemma III.4.7(d)} \\ &= (W_1 + W_2)^\circ && \text{nach Lemma III.1.4(e)} \end{aligned}$$

Auch die Inklusion $W_1^\circ + W_2^\circ \subseteq (W_1 \cap W_2)^\circ$ lässt sich leicht zeigen: Aus $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1$ folgt nämlich $W_1^\circ \subseteq (W_1 \cap W_2)^\circ$ und analog gilt $W_2^\circ \subseteq (W_1 \cap W_2)^\circ$. Somit ist $W_1^\circ \cup W_1^\circ \subseteq (W_1 \cap W_2)^\circ$. Da $W_1^\circ + W_2^\circ$ der kleinste Teilraum ist, der $(W_1 \cap W_2)^\circ$ enthält erhalten wir $W_1^\circ + W_2^\circ \subseteq (W_1 \cap W_2)^\circ$.

Um auch die umgekehrte Inklusion $(W_1 \cap W_2)^\circ \subseteq W_1^\circ + W_2^\circ$ zu zeigen sei nun $\alpha \in (W_1 \cap W_2)^\circ$, d.h. $\alpha \in V^*$ und $W_1 \cap W_2 \subseteq \ker(\alpha)$. Wir werden unten eine lineare Abbildung ρ mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

$$\rho\colon V \to V, \quad \rho|_{W_2} = \mathrm{id}_{W_2}, \quad \rho(W_1) \subseteq W_1 \cap W_2.$$

Es ist dann $\alpha_1 := \alpha \circ \rho \in W_1^\circ$, denn für jedes $w_1 \in W_1$ gilt $\alpha_1(w_1) = \alpha(\rho(w_1)) = 0$, da ja $\rho(w_1) \in \rho(W_1) \subseteq W_1 \cap W_2 \subseteq \ker(\alpha)$. Setzen wir $\alpha_2 := \alpha - \alpha_1$ dann gilt auch $\alpha_2 \in W_2^\circ$, denn für jedes $w_2 \in W_2$ ist $\alpha_2(w_2) = \alpha(w_2) - \alpha_1(w_2) = \alpha(w_2) - \alpha(\rho(w_2)) = \alpha(w_2) - \alpha(w_2) = 0$. Somit erhalten wir $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \in W_1^\circ + W_2^\circ$.

Für die Konstruktion von ρ wählen wir Basen B_1 von W_1 und B_2 von W_2 wie in Proposition III.3.29, d.h. $B_1 \cup B_2$ ist Basis von $W_1 + W_2$. Nach Proposition III.3.2 existiert eine lineare Abbildung $\bar\rho\colon W_1 + W_2 \to V$, sodass $\bar\rho|_{B_2} = \mathrm{id}_{B_2}$ und $\bar\rho|_{B_1 \setminus B_2} = 0$. Wegen $B_1 = (B_1 \setminus B_2) \cup (B_1 \cap B_2)$ gilt daher auch $\bar\rho(B_1) \subseteq W_1 \cap W_2$. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition III.3.2(c) folgt daher $\bar\rho|_{W_2} = \mathrm{id}_{W_2}$ und $\bar\rho(W_1) \subseteq W_1 \cap W_2$. Nach Korollar III.3.25 lässt sich $\bar\rho$ zu einer linearen Abbildung $\rho\colon V \to V$ erweitern, d.h. $\rho|_{W_1 + W_2} = \bar\rho$, und diese Fortsetzung hat die gewünschten Eigenschaften.

Die verbleibenden Behauptungen folgen nun aus Lemma III.4.7(a)&(j), denn $W_1 + W_2 = V \Leftrightarrow (W_1 + W_2)^\circ = V^\circ \Leftrightarrow W_1^\circ \cap W_2^\circ = \{0\}$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\} \Leftrightarrow (W_1 \cap W_2)^\circ = \{0\}^\circ \Leftrightarrow W_1^\circ + W_2^\circ = V$. □

III.4.10. Satz. *Für jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ gilt*

$$\ker(\varphi^t) = \mathrm{img}(\varphi)^\circ \quad \textit{und} \quad \mathrm{img}(\varphi^t) = \ker(\varphi)^\circ.$$

Insbesondere ist φ genau dann injektiv, wenn φ^t surjektiv ist. Auch ist φ genau dann surjektiv, wenn φ^t injektiv ist.

Beweis. Es ist $\ker(\varphi^t) = \mathrm{img}(\varphi)^\circ$, denn für $\beta \in W^*$ gilt:

$$\begin{aligned} \beta \in \ker(\varphi^t) &\Leftrightarrow \beta \circ \varphi = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall v \in V : \beta(\varphi(v)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall w \in \mathrm{img}(\varphi) : \beta(w) = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta|_{\mathrm{img}(\varphi)} = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta \in \mathrm{img}(\varphi)^\circ \end{aligned}$$

Auch die Inklusion $\operatorname{img}(\varphi^t) \subseteq \ker(\varphi)^\circ$ lässt sich leicht beweisen. Ist nämlich $\alpha \in \operatorname{img}(\varphi^t) \subseteq V^*$ dann existiert $\beta \in W^*$ mit $\alpha = \varphi^t(\beta) = \beta \circ \varphi$, also gilt $\alpha(v) = (\beta \circ \varphi)(v) = \beta(\varphi(v)) = 0$ für jedes $v \in \ker(\varphi)$, und daher $\alpha \in \ker(\varphi)^\circ$.

Wir zeigen nun die umgekehrte Inklusion, $\ker(\varphi)^\circ \subseteq \operatorname{img}(\varphi^t)$. Sei dazu $\alpha \in \ker(\varphi)^\circ$, d.h. $\alpha \in V^*$ und $\alpha|_{\ker(\varphi)} = 0$. Nach Satz II.6.3 existiert ein lineares Funktional $\bar\alpha\colon V/\ker(\varphi) \to \mathbb{K}$, sodass $\bar\alpha \circ \pi = \alpha$, wobei $\pi\colon V \to V/\ker(\varphi)$ die kanonische Projektion bezeichnet. Nach Korollar II.6.6 induziert φ einen linearen Isomorphismus $\bar\varphi\colon V/\ker(\varphi) \xrightarrow{\cong} \operatorname{img}(\varphi)$ und es gilt $\bar\varphi \circ \pi = \varphi$. Nach Korollar III.3.25 lässt sich das lineare Funktional $\bar\alpha \circ \bar\varphi^{-1}\colon \operatorname{img}(\varphi) \to \mathbb{K}$ zu einem linearen Funktional $\beta \in W^*$ fortsetzen, d.h. $\beta|_{\operatorname{img}(\varphi)} = \bar\alpha \circ \bar\varphi^{-1}$. Nach Konstruktion gilt $\varphi^t(\beta) = \beta \circ \varphi = \beta|_{\operatorname{img}(\varphi)} \circ \varphi = (\bar\alpha \circ \bar\varphi^{-1}) \circ (\bar\varphi \circ \pi) = \bar\alpha \circ \pi = \alpha$, also $\alpha \in \operatorname{img}(\varphi^t)$. Damit ist auch $\operatorname{img}(\varphi^t) = \ker(\varphi)^\circ$ gezeigt. Insbesondere folgt

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ ist surjektiv} &\Leftrightarrow \operatorname{img}(\varphi) = W \\
&\Leftrightarrow \operatorname{img}(\varphi)^\circ = W^\circ && \text{nach Lemma III.4.7(j)} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{img}(\varphi)^\circ = \{0\} && \text{nach Lemma III.4.7(a)} \\
&\Leftrightarrow \ker(\varphi^t) = \{0\} && \text{da } \ker(\varphi^t) = \operatorname{img}(\varphi)^\circ \\
&\Leftrightarrow \varphi^t \text{ ist injektiv} && \text{nach Proposition II.3.22}
\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ ist injektiv} &\Leftrightarrow \ker(\varphi) = \{0\} && \text{nach Proposition II.3.22} \\
&\Leftrightarrow \ker(\varphi)^\circ = \{0\}^\circ && \text{nach Lemma III.4.7(j)} \\
&\Leftrightarrow \ker(\varphi)^\circ = V^* && \text{nach Lemma III.4.7(a)} \\
&\Leftrightarrow \operatorname{img}(\varphi^t) = V^* && \text{da } \operatorname{img}(\varphi^t) = \ker(\varphi)^\circ \\
&\Leftrightarrow \varphi^t \text{ ist surjektiv}
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis des Satzes vollständig. □

III.4.11. Beispiel. Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\psi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi_A(x) = Ax$, die damit assoziierte lineare Abbildung und $W = \ker(\psi_A)$ der Lösungsraum des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$. Bezeichnet $\alpha_i \in M_{1\times n}(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^n)^*$ den i-ten Zeilenvektor von A, dann bildet $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ ein Erzeugendensystem von W°. Da die Spalten von A^t ein Erzeugendensystem von $\operatorname{img}(\psi_{A^t})$ bilden, folgt nämlich mit Bemerkung III.4.5, dass die Zeilen von A ein Erzeugendensystem von $\operatorname{img}((\psi_A)^t)$ darstellen, nach Satz III.4.10 gilt jedoch $W^\circ = \ker(\psi_A)^\circ = \operatorname{img}((\psi_A)^t)$.

III.4.12. Korollar. *Ist W ein Teilraum eines Vektorraums V, dann gilt:*

(a) Die kanonische Inklusion $\iota\colon W \to V$ induziert einen Isomorphismus

$$V^*/W^\circ \cong W^*, \quad [\alpha] \mapsto \alpha|_W = \alpha \circ \iota, \quad \alpha \in V^*.$$

Wir können V^*/W° daher in natürlicher Weise mit W^* identifizieren.

(b) Die kanonische Projektion $\pi\colon V \to V/W$ induziert einen Isomorphismus

$$(V/W)^* \cong W^\circ, \quad \beta \mapsto \beta \circ \pi, \quad \beta \in (V/W)^*.$$

Wir können daher W° in natürlicher Weise mit $(V/W)^*$ identifizieren.

Beweis. Ad (a): Die Inklusionsabbildung $\iota\colon W \to V$ ist offensichtlich injektiv, und $\operatorname{img}(\iota) = W$. Nach Satz III.4.10 ist daher die duale Abbildung $\iota^t\colon V^* \to W^*$ surjektiv, und $\ker(\iota^t) = \operatorname{img}(\iota)^\circ = W^\circ$. Nach Korollar II.6.6 induziert ι^t also einen Isomorphismus $V^*/W^\circ \cong W^*$, $[\alpha] \mapsto \iota^t(\alpha) = \alpha \circ \iota = \alpha|_W$, wobei $\alpha \in V^*$.

Ad (b): Nach Satz II.6.3 ist die kanonische Projektion $\pi\colon V \to V/W$ surjektiv, und $\ker(\pi) = W$. Nach Satz III.4.10 ist daher die duale Abbildung $\pi^t\colon (V/W)^* \to V^*$ injektiv, und $\operatorname{img}(\pi^t) = \ker(\pi)^\circ = W^\circ$. Somit liefert π^t einen Isomorphismus $(V/W)^* \cong W^\circ$, $\beta \mapsto \pi^t(\beta) = \beta \circ \pi$, wobei $\beta \in (V/W)^*$. □

Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v \in V$, dann ist die Abbildung

$$\operatorname{ev}_v\colon V^* \to \mathbb{K}, \quad \operatorname{ev}_v(\alpha) := \alpha(v),$$

linear, denn $\operatorname{ev}_v(\alpha_1+\alpha_2) = (\alpha_1+\alpha_2)(v) = \alpha_1(v)+\alpha_2(v) = \operatorname{ev}_v(\alpha_1)+\operatorname{ev}_v(\alpha_2)$ und $\operatorname{ev}_v(\lambda\alpha) = (\lambda\alpha)(v) = \lambda\alpha(v) = \lambda \operatorname{ev}_v(\alpha)$, für beliebige $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in V^*$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, vgl. Beispiel II.3.8. Somit ist $\operatorname{ev}_v \in (V^*)^*$. Der Vektorraum $(V^*)^*$ wird *Bidual* von V genannt und oft mit V^{**} bezeichnet. Die Zuordnung

$$\iota_V\colon V \to V^{**}, \quad \iota_V(v) := \operatorname{ev}_v,$$

ist ebenfalls linear, denn es gilt $\operatorname{ev}_{v_1+v_2}(\alpha) = \alpha(v_1+v_2) = \alpha(v_1)+\alpha(v_2) = \operatorname{ev}_{v_1}(\alpha)+\operatorname{ev}_{v_2}(\alpha) = (\operatorname{ev}_{v_1}+\operatorname{ev}_{v_2})(\alpha)$ und $\operatorname{ev}_{\lambda v}(\alpha) = \alpha(\lambda v) = \lambda\alpha(v) = \lambda \operatorname{ev}_v(\alpha) = (\lambda \operatorname{ev}_v)(\alpha)$ für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

III.4.13. Proposition. *Die oben besprochene kanonische lineare Abbildung*

$$\iota_V\colon V \to V^{**}, \quad \iota_V(v)(\alpha) := \alpha(v), \quad v \in V,\ \alpha \in V^*,$$

ist injektiv. Für jeden Teilraum W von V gilt $\iota(W) \subseteq W^{\circ\circ}$. Für jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to U$ gilt $\varphi^{tt} \circ \iota_V = \iota_U \circ \varphi$, wobei $\varphi^{tt}\colon V^{**} \to U^{**}$ die zu φ^t duale Abbildung bezeichnet, d.h. $\varphi^{tt}(\xi)(\beta) = \xi(\varphi^t(\beta))$, $\xi \in V^{**}$, $\beta \in U^*$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass ι_V injektiv ist. Sei dazu $0 \neq v \in V$. Nach Korollar III.3.28 existiert $\alpha \in V^*$ mit $\alpha(v) = 1$. Es gilt daher $\iota_V(v)(\alpha) = \alpha(v) = 1 \neq 0$, also $\iota_V(v) \neq 0$. Es folgt $\ker(\iota_V) = \{0\}$, also ist ι_V injektiv, siehe Proposition II.3.22.

Sei nun $W \subseteq V$ ein Teilraum, $w \in W$ und $\alpha \in W^\circ$, d.h. $\alpha \in V^*$ und $\alpha|_W = 0$. Dann folgt $\iota_V(w)(\alpha) = \alpha(w) = 0$. Da dies für alle $\alpha \in W^\circ$ gilt, folgt $\iota_V(w) \in W^{\circ\circ}$. Da dies für alle $w \in W$ richtig ist, erhalten wir $\iota_V(W) \subseteq W^{\circ\circ}$.

Sei schließlich $\varphi\colon V \to U$ linear, $v \in V$ und $\beta \in U^*$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\varphi^{tt} \circ \iota_V)(v)(\beta) &= \varphi^{tt}(\iota_V(v))(\beta) && \text{Definition der Komposition von Abb.}\\
&= \iota_V(v)(\varphi^t(\beta)) && \text{Definition von der dualen Abb. } \varphi^{tt}\\
&= \varphi^t(\beta)(v) && \text{Definition von } \iota_V\\
&= \beta(\varphi(v)) && \text{Definition von der dualen Abb. } \varphi^t\\
&= \iota_U(\varphi(v))(\beta) && \text{Definition von } \iota_U\\
&= (\iota_U \circ \varphi)(v)(\beta) && \text{Definition der Komposition von Abb.}
\end{aligned}$$

Da dies für beliebige $v \in V$ und $\beta \in U^*$ gilt, folgt $\varphi^{tt} \circ \iota_V = \iota_U \circ \varphi$. □

III.4.14. Bemerkung. Die Abbildung $\iota_V\colon V \to V^{**}$ ist i.A. nicht surjektiv.

IV. Endlich-dimensionale Vektorräume

Unter einem endlich-dimensionalen Vektorraum verstehen wir einen Vektorraum, der eine endliche Basis besitzt. Die entscheidende Beobachtung ist die Tatsache, dass in diesem Fall je zwei Basen aus gleich vielen Elementen bestehen müssen, siehe Korollar IV.1.5 unten. Dies ermöglich es jedem endlich-dimensionalen Vektorraum V eine Dimension, $\dim(V) \in \mathbb{N}_0$, zuzuordnen, nämlich die Anzahl der Elemente einer, und dann jeder, Basis von V.

Im ersten Teil dieses Kapitels werden wir die grundlegenden Eigenschaften dieses Dimensionsbegriffs zusammenstellen. Insbesondere werden wir sehen, dass jeder Teilraum W von $\mathbb{K}^n$ endlich-dimensional ist und daher von endlich-vielen linear unabhängigen Vektoren aufgespannt wird. In anderen Worten, jeder Teilraum lässt sich mit Hilfe einer Parameterdarstellung darstellen. Andererseits lässt sich jeder Teilraum W von $\mathbb{K}^n$ auch durch ein homogenes lineares Gleichungssystem beschreiben, wobei mindestens $n - \dim(W)$ viele Gleichungen notwendig sind. Anschließend werden wir uns dem rechnerischen Aspekt widmen und Algorithmen zur Lösung linearer Gleichungssysteme und zur Berechnung der Inversen einer Matrix besprechen. Im letzten Abschnitt werden wir lineare Abbildungen zwischen allgemeinen endlich-dimensionalen Vektorräumen, $\varphi\colon V \to W$, durch Matrizen beschreiben indem wir Basen der beiden Vektorräume fixieren.

IV.1. Dimension. Im vorangehenden Kapitel haben wir Basen stets als Teilmengen eines Vektorraums aufgefasst. Manchmal ist es jedoch zweckmäßig *geordnete* Basen zu betrachten. Dies sind Systeme von Vektoren $b_1, \dots, b_n$ die ein linear unabhängiges Erzeugendensystem bilden. Wir wollen damit beginnen diesen Begriff zu präzisieren.

Sei dazu V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Ein System von Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ wird *linear abhängig* genannt, falls $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ für gewisse Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, die nicht alle veschwinden. Das System $v_1, \dots, v_n$ heißt *linear unabhängig* wenn es nicht linear abhängig ist. In anderen Worten, die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn aus $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ stets $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ folgt. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ paarweise verschieden sind und die Teilmenge $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig im Sinn von Abschnitt III.2 ist.

IV.1.1. Beispiel. Die Vektoren $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ sind linear abhängig in $\mathbb{R}^2$, aber $\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\}$ bildet eine linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

Ein System von Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ wird *Erzeugendensystem* von V genannt, falls $\langle v_1, \dots, v_n \rangle = V$ gilt, d.h. falls die Teilmenge $\{v_1, \dots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V bildet, vgl. Abschnitt III.1. Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem $v_1, \dots, v_n$ von V wird als *(geordnete) Basis* von V bezeichnet. Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ bilden also genau dann eine geordnete Basis von V, wenn sie paarweise verschieden sind und die Teilmenge $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis im Sinn von Abschnitt III.3 bildet. Aus Proposition III.3.2 erhalten wir sofort folgende Charakterisierung geordneter Basen:

IV.1.2. Proposition. *Für ein System von Vektoren $b_1, \dots, b_n$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) Die Vektoren $b_1, \dots, b_n$ bilden eine Basis von V.

(b) Zu jedem $v \in V$ existieren eindeutige Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, sodass $v = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$.

(c) Die Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{K}^n \to V, \qquad \phi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n,$$

ist ein linearer Isomorphismus.

(d) Ist W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $w_1, \dots, w_n \in W$, dann existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$, sodass $\varphi(b_i) = w_i$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Aus Proposition III.3.14 erhalten wir auch:

IV.1.3. Proposition. *Ist $\varphi\colon V \to W$ linear und $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) φ ist ein Isomorphismus.

(b) Für jede Basis $c_1, \dots, c_m$ von V ist $\varphi(c_1), \dots, \varphi(c_m)$ eine Basis von W.

(c) $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)$ ist eine Basis von W.

Der Schlüssel zum Dimensionsbegriff ist folgendes Resultat.

IV.1.4. Satz (Austauschsatz von Steinitz). *Sei $v_1, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem eines Vektorraums V, und $w_1, \dots, w_k$ linear unabhängig in V. Dann gilt*

$$k \leq n$$

und, nach geeignetem Umnummerieren der Vektoren $v_1, \dots, v_n$, bildet auch

$$w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n$$

ein Erzeugendensystem von V.

Beweis. Wir führen den Beweis mittels Induktion nach k. Für $k = 0$ ist die Aussage trivial. Für den Induktionsschritt sei nun $k \geq 1$ und die Aussage für $k - 1$ bereits gezeigt. Nach Induktionsvoraussetzung gilt daher $k - 1 \leq n$ und, nach geeignetem Umnummerieren der Vektoren $v_1, \dots, v_n$ bildet

$$w_1, \dots, w_{k-1}, v_k, \dots, v_n \tag{IV.1}$$

ein Erzeugendensystem von V. Daher existieren Skalare $\lambda_i \in \mathbb{K}$, sodass

$$w_k = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{k-1} w_{k-1} + \lambda_k v_k + \cdots + \lambda_n v_n. \tag{IV.2}$$

Da das System $w_1, \dots, w_k$ linear unabhängig ist folgt $k \leq n$ und mindestens einer der Skalare $\lambda_k, \dots, \lambda_n$ muss verschieden von 0 sein. Andernfalls erhielten wir die Relation $w_k = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{k-1} w_{k-1}$, was der linearen Unabhängigkeit des Systems $w_1, \ldots, w_k$ widerspräche. Durch Umnummerieren der Vektoren v_i können wir also $\lambda_k \neq 0$ erreichen. Aus (IV.2) erhalten wir daher

$$v_k = -\tfrac{\lambda_1}{\lambda_k} w_1 - \cdots - \tfrac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} w_{k-1} + \tfrac{1}{\lambda_k} w_k - \tfrac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} v_{k+1} - \cdots - \tfrac{\lambda_n}{\lambda_k} v_n.$$

Dies zeigt, dass der Vektor v_k im Erzeugniss des Systems

$$w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n \tag{IV.3}$$

liegt. Mit (IV.1) ist daher auch (IV.3) ein Erzeugendensystem für V. □

IV.1.5. Korollar. *Für einen Vektorraum V sind äquivalent:*

(a) V besitzt eine endliche Basis.
(b) V ist endlich erzeugt, d.h. besitzt ein endliches Erzeugendensystem.
(c) Jede linear unabhängige Teilmenge von V ist endlich.
(d) Jede Basis von V ist endlich.

In diesem Fall haben je zwei Basen von V gleich viele Elementen.

Beweis. Die Implikation (a)⇒(b) ist trivial. Die Implikation (b)⇒(c) folgt aus Satz IV.1.4. Die Implikation (c)⇒(d) ist trivial. Die Implikation (d)⇒(a) folgt aus Korollar III.3.23(a). Damit ist die Äquivalenz der vier Aussagen gezeigt. Sind $b_1, \ldots, b_m$ und $b'_1, \ldots, b'_n$ zwei endliche Basen von V, dann erhalten wir aus Satz IV.1.4 nun $m \leq n$ und $n \leq m$, also $n = m$, d.h. die Basen bestehen aus gleich vielen Vektoren. □

IV.1.6. Definition (Dimension). Ein Vektorraum V wird *endlich dimensional* genannt, wenn er eine endliche Basis besitzt. In diesem Fall existiert eine eindeutige Zahl $n \in \mathbb{N}_0$, sodass jede Basis von V aus genau n Elementen besteht, siehe Korollar IV.1.5. Diese Zahl n wird als *Dimension* von V bezeichnet und mit $\dim(V)$ notiert. Wir sagen auch V ist ein n-dimensionaler Vektorraum. Besitzt V keine endliche Basis dann wird V *unendlich dimensional* genannt und wir schreiben $\dim(V) = \infty$.

IV.1.7. Bemerkung. Ein Vektorraum V ist genau dann 0-dimensional, wenn die leere Menge eine Basis von V bildet. Dies ist genau dann der Fall, wenn V nur aus dem Nullvektor besteht, d.h. $V = \{0\}$.

IV.1.8. Beispiel. Es gilt $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, denn nach Beispiel III.3.5 bilden die Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$, die aus genau n Vektoren besteht.

IV.1.9. Beispiel. Es ist $\dim(\mathbb{K}[z]_{\leq n}) = n+1$, denn die Monome $1, z, z^2, \ldots, z^n$ bilden eine Basis von $\mathbb{K}[z]_{\leq n}$, die aus genau $n+1$ Elementen besteht.

IV.1.10. Beispiel. Es gilt $\dim(M_{m\times n}(\mathbb{K})) = mn$, denn die Matrizen $E_{i,j}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, bilden eine Basis von $M_{m\times n}(\mathbb{K})$, die aus genau mn vielen

Elementen besteht. Dabei bezeichnet

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

jene $(m \times n)$-Matrix, deren einzige nicht verschwindende Eintragungen eine Eins in der i-ten Zeile und j-ten Spalte bildet. In anderen Worten: $(E_{i,j})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$.

IV.1.11. Beispiel. Der Vektorraum der Polynome, $\mathbb{K}[z]$, ist unendlich-dimensional, denn die linear unabhängige Teilmenge der Monome, $\{1, z, z^2, z^3, \dots\}$, hat unendlich viele Elemente.

IV.1.12. Beispiel. Betrachten wir $\mathbb{C}$ als komplexen Vektorraum, so ist dieser ein-dimensional, denn 1 bildet eine Basis. Wir können $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ aber auch als zwei-dimensionalen reellen Vektorraum auffassen, dann bildet etwa $1, \mathbf{i}$ eine Basis. Es gilt daher $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ und $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$, siehe auch Aufgabe 75.

IV.1.13. Bemerkung. Sind V und W zwei isomorphe Vektorräume und ist V endlich dimensional, dann ist auch W endlich-dimensional und es gilt $\dim(V) = \dim(W)$. Ist nämlich $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V und $\varphi\colon V \to W$ ein Isomorphismus, dann bildet $\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n)$ eine Basis von W, siehe Proposition IV.1.3.

Das folgende Resultat zeigt, dass es über jedem Körper $\mathbb{K}$ im Wesentlichen nur einen n-dimensionalen Vektorraum gibt, nämlich $\mathbb{K}^n$.

IV.1.14. Korollar. *Zwei endlich dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume sind genau dann isomorph, wenn sie gleiche Dimension haben. Insbesondere gilt $\mathbb{K}^n \cong \mathbb{K}^m$ genau dann, wenn $n = m$. Jeder endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorraum V ist zu $\mathbb{K}^n$ isomorph, wobei $n = \dim(V)$.*

Beweis. In Bemerkung IV.1.13 haben wir bereits beobachtet, dass isomorphe endlich-dimensionale Vektorräume gleiche Dimension haben müssen. Umgekehrt folgt aus Bemerkung III.3.11, dass endlich-dimensionale Vektorräume gleicher Dimension isomorph sind. □

IV.1.15. Bemerkung. Sind $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ zwei Matrizen, sodass $AB = I_m$ und $BA = I_n$, dann muss $n = m$ gelten. Eine Matrix kann also nur dann invertierbar sein, wenn sie quadratisch ist. Aus den beiden Gleichungen folgt nämlich, dass die assoziierten linearen Abbildungen $\psi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ und $\psi_B\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ zueinander inverse Isomorphismen darstellen, d.h. $\psi_A \circ \psi_B = \psi_{AB} = \psi_{I_m} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^m}$ und $\psi_B \circ \psi_A = \psi_{BA} = \psi_{I_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$, vgl. Satz II.4.4, die Relation $n = m$ folgt daher aus Korollar IV.1.14.

IV.1.16. Korollar. *Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum dann gilt:*

(a) Jede linear unabhängige Teilmenge von V hat höchstens n verschiedene Elemente. Sind $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig in V, dann bilden diese Vektoren schon eine Basis von V.

(b) Jedes Erzeugendensystem von V besitzt mindestens n verschiedene Elemente. Ist $v_1, \dots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V, dann bilden diese Vektoren schon eine Basis von V.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von V, das aus genau n Vektoren besteht. Nach Satz IV.1.4 kann eine linear unabhängige Teilmenge von V höchstens n Elementen haben, und jedes Erzeugendensystem von V muss aus mindestens n Vektoren bestehen. Die restlichen Behauptungen folgen aus Proposition III.3.19. □

Daraus erhalten wir auch:

IV.1.17. Korollar. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $v_1, \dots, v_n$ ein System von n Vektoren in V. Dann sind äquivalent:*

(a) $v_1, \dots, v_n$ ist eine Basis von V.
(b) $v_1, \dots, v_n$ ist linear unabhängig in V.
(c) $v_1, \dots, v_n$ ist ein Erzeugendensystem von V.

IV.1.18. Bemerkung. Nach Bemerkung III.3.15 ist eine quadratische Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ genau dann invertierbar, wenn ihre Spaltenvektoren eine Basis von $\mathbb{K}^n$ bilden. Nach Korollar IV.1.17 ist dies genau dann der Fall, wenn die Spaltenvektoren linear unabhängig sind. Ebenso ist A genau dann invertierbar, wenn die ihre Spaltenvektoren ein Erzeugendensystem von $\mathbb{K}^n$ bilden.

IV.1.19. Bemerkung. Ein Vektorraum V hat genau dann Dimension n, wenn es n linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_n$ in V gibt und je $n+1$ Vektoren in V linear abhängig sind. Auch hat V genau dann Dimension n, wenn ein Erzeugendensystem von V mit n Vektoren existiert, und je $n-1$ Vektoren V nicht erzeugen. Dies folgt aus Korollar IV.1.16 und Proposition III.3.19, vgl. Aufgabe 67.

IV.1.20. Korollar. *Ist W ein Teilraum eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, dann ist auch W endlich-dimensional und es gilt*

$$\dim(W) \leq \dim(V).$$

Ist darüber hinaus $\dim(W) = \dim(V)$, *dann folgt schon* $W = V$.

Beweis. Nach Korollar IV.1.16(a) besteht jede linear unabhängige Teilmenge von W aus höchstens $\dim(V)$ vielen Elementen. Es gibt daher eine größte Zahl $k \in \mathbb{N}_0$, sodass linear unabhängige Vektoren $w_1, \dots, w_k$ in W existieren. Nach Konstruktion bilden die Vektoren $w_1, \dots, w_k$ eine maximal linear unabhängige Teilmenge von W und daher eine Basis von W, siehe Proposition III.3.19. Somit ist W endlich dimensional, und es gilt $\dim(W) = k \leq \dim(V)$. Gilt darüber hinaus $\dim(W) = \dim(V)$, dann ist $w_1, \dots, w_k$ auch Basis von V, siehe Korollar IV.1.16(a), und daher $V = \langle w_1, \dots, w_k \rangle = W$. □

IV.1.21. Bemerkung (Teilräume von $\mathbb{K}^n$). Nach Korollar IV.1.20 ist jeder Teilraum $W \subseteq \mathbb{K}^n$ endlich-dimensional und es gilt $0 \leq \dim(W) \leq n$. Es existieren daher linear unabhängige Vektoren $w_1, \dots, w_m \in W$, sodass $W = \langle w_1, \dots, w_m \rangle$, wobei $m = \dim(W)$. Diese Vektoren bilden eine Basis von W und es gilt $W \cong \mathbb{K}^m$. Jeder Teilraum von $\mathbb{K}^n$ ist also zu einem $\mathbb{K}^m$ isomorph, wobei $0 \leq m \leq n$.

IV.1.22. Beispiel (Teilräume von $\mathbb{K}^2$). Aus Bemerkung IV.1.21 folgt, dass jeder Teilraum W von $\mathbb{K}^2$ von der Form

$$W = \{0\}, \quad W = \langle w \rangle, \quad \text{oder} \quad W = \mathbb{K}^2$$

ist, wobei $0 \neq w \in \mathbb{K}^2$. In Beispiel II.2.9 haben wir dies schon auf elementare Weise hergeleitet.

IV.1.23. Beispiel (Teilräume von $\mathbb{K}^3$). Bemerkung IV.1.21 folgt, dass jeder Teilraum W von $\mathbb{K}^3$ von der Form

$$W = \{0\}, \quad W = \langle w \rangle, \quad W = \langle w_1, w_2 \rangle, \quad \text{oder} \quad W = \mathbb{K}^3$$

ist, wobei $0 \neq w \in \mathbb{K}^3$ und w_1, w_2 linear unabhängig in $\mathbb{K}^3$ sind. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ entsprechen die nicht-trivialen Fälle also genau den Geraden bzw. Ebenen durch den Koordinatenursprung.

IV.2. Dimensionsformeln. Wir wollen in diesem Abschnitt Dimensionsformel für Summen und Durchschnitte von Teilräumen, Kern und Bild linearer Abbildungen, Dualräumen, Quotientenräumen und Annihilatoren herleiten, und einige Anwendungen besprechen.

IV.2.1. Satz (Dimension von Summen und Durchschnitten). *Seien W_1 und W_2 zwei Teilräume eines Vektorraums V. Es ist $W_1 + W_2$ genau dann endlich-dimensional, wenn W_1 und W_2 beide endlich-dimensional sind. In diesem Fall ist auch $W_1 \cap W_2$ endlich-dimensional und es gilt*

$$\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

Beweis. Ist $W_1 + W_2$ endlich-dimensional, dann gilt dies auch für die Teilräume W_1, W_2 und $W_1 \cap W_2$ von $W_1 + W_2$, siehe Korollar IV.1.20. Seien nun umgekehrt W_1 und W_2 endlich-dimensional. Nach Proposition III.3.29 existieren daher endliche Basen B_1 von W_1 und B_2 von W_2, sodass $B_1 \cap B_2$ eine Basis von $W_1 \cap W_2$ bildet und $B_1 \cup B_2$ eine Basis von $W_1 + W_2$ ist. Es gilt daher:

$$\begin{aligned}
\dim(W_1) &= \sharp B_1 \\
\dim(W_2) &= \sharp B_2 \\
\dim(W_1 \cap W_2) &= \sharp(B_1 \cap B_2) \\
\dim(W_1 + W_2) &= \sharp(B_1 \cup B_2)
\end{aligned}$$

wobei $\sharp X$ die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge X bezeichnet. Aus der evidenten Formel

$$\sharp(B_1 \cap B_2) + \sharp(B_1 \cup B_2) = \sharp B_1 + \sharp B_2$$

erhalten wir den Satz. □

IV.2.2. Korollar (Dimension direkter Summen). *Seien W_1 und W_2 zwei komplementäre Teilräume eines Vektorraums V, d.h. $V = W_1 \oplus W_2$. Es ist V genau dann endlich-dimensional, wenn W_1 und W_2 beide endlich-dimensional sind, und in diesem Fall gilt*

$$\dim(V) = \dim(W_1) + \dim(W_2).$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ und $W_1 + W_2 = V$. Das Korollar folgt daher sofort aus Satz IV.2.1. □

IV.2.3. Korollar. *Seien W_1 und W_2 zwei Teilräume eines endlich dimensionalen Vektorraums V und* $\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(V)$. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $W_1 \oplus W_2 = V$.
(b) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.
(c) $W_1 + W_2 = V$

Beweis. Nach Satz IV.2.1 ist $\dim(W_1 \cap W_2) + \dim(W_1 + W_2) = \dim(V)$, also

$$\dim(W_1 \cap W_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dim(W_1 + W_2) = \dim(V).$$

Mit Korollar IV.1.20 und Bemerkung IV.1.7 folgt daher die Äquivalenz (b)⇔(c). Die verbleibenden Behauptungen sind nun trivial. □

IV.2.4. Beispiel. Ist E ein 2-dimensionaler Teilraum von $\mathbb{K}^3$ und ist L ein 1-dimensionaler Teilraum von $\mathbb{K}^3$, der nicht in E enthalten ist, dann gilt schon

$$E \oplus L = \mathbb{K}^3.$$

Nach Voraussetzung ist nämlich $E \cap L \subsetneq L$, also $\dim(E \cap L) < \dim(L) = 1$ nach Korollar IV.1.20, folglich $\dim(E \cap L) = 0$ und daher $E \cap L = \{0\}$. Die Behauptung folgt somit aus Korollar IV.2.3.

IV.2.5. Bemerkung. Sind W_1 und W_2 zwei Teilräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, sodass

$$\dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(V),$$

dann muss schon $W_1 + W_2 = V$ und

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(V)$$

gelten. Aus Satz IV.2.1 folgt nämlich

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2) \geq \dim(V),$$

also $W_1 + W_2 = V$ nach Korollar IV.1.20. Die Formel für die Dimension des Durchschnitts folgt nun aus Satz IV.2.1.

IV.2.6. Beispiel. Sind E_1 und E_2 zwei verschiedene 2-dimensionale Teilräume von $\mathbb{K}^3$, dann gilt

$$E_1 + E_2 = \mathbb{K}^3 \quad \text{und} \quad \dim(E_1 \cap E_2) = 1.$$

Nach Voraussetzung ist nämlich $E_1 \cap E_2 \subsetneq E_1$ oder $E_1 \cap E_2 \subsetneq E_2$, jedenfalls folgt $\dim(E_1 \cap E_2) < 2 = \dim(E_1) = \dim(E_2)$ nach Korollar IV.1.20, und somit $\dim(E_1 \cap E_2) \leq 1 = 2 + 2 - 3 = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(\mathbb{K}^3)$. Die Behauptung folgt daher aus Bemerkung IV.2.5. Für den Körper $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bedeutet dies, dass zwei verschiedene Ebenen durch den Koordinatenursprung ganz $\mathbb{R}^3$ erzeugen und ihr Durchschnitt eine Gerade bildet. Siehe auch Aufgabe 71.

IV.2.7. Bemerkung. Sind W_1 und W_2 zwei Teilräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, sodass

$$\dim(W_1 + W_2) \geq \dim(W_1) + \dim(W_2),$$

dann muss schon $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ und

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$$

gelten. Aus Satz IV.2.1 folgt nämlich

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 + W_2) \leq 0,$$

also $\dim(W_1 + W_2) = 0$ und daher $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Die Formel für die Dimension der Summe folgt nun aus Satz IV.2.1.

IV.2.8. Korollar (Dimension eines Quotienten). *Sei W ein Teilraum eines Vektorraums V. Es ist V genau dann endlich-dimensional, wenn W und V/W beide endlich-dimensional sind, und in diesem Fall gilt*

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(V/W).$$

Beweis. Nach Korollar III.3.26 existiert ein zu W komplementärer Teilraum W' in V, d.h. $V = W \oplus W'$. Nach Korollar II.6.7 gilt $W' \cong V/W$. Insbesondere ist W' genau dann endlich-dimensional, wenn V/W endlich-dimensional ist, und in diesem Fall gilt $\dim(W') = \dim(V/W)$. Das Korollar folgt daher aus Korollar IV.2.2. □

IV.2.9. Korollar (Dimension von Kern und Bild). *Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Es ist V genau dann endlich-dimensional, wenn* $\ker(\varphi)$ *und* $\operatorname{img}(\varphi)$ *beide endlich-dimensional sind, und in diesem Fall gilt*

$$\dim(V) = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\operatorname{img}(\varphi)).$$

Beweis. Nach Korollar II.6.6 gilt $V/\ker(\varphi) \cong \operatorname{img}(\varphi)$. Insbesondere ist also $\operatorname{img}(\varphi)$ genau dann endlich-dimensional, wenn $V/\ker(\varphi)$ endlich-dimensional ist, und in diesem Fall gilt $\dim(V/\ker(\varphi)) = \dim(\operatorname{img}(\varphi))$. Das Korollar folgt daher aus Korollar IV.2.8. □

IV.2.10. Beispiel (Hyperebenen). Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\alpha\colon V \to \mathbb{K}$ ein nicht-triviales lineares Funktional, $\alpha \neq 0$. Dann folgt $\{0\} \subsetneq \operatorname{img}(\alpha) \subseteq \mathbb{K}$, aus Dimensionsgründen gilt daher $\operatorname{img}(\alpha) = \mathbb{K}$, also $\dim(\operatorname{img}(\alpha)) = 1$. Mit Korollar IV.2.9 folgt $\dim(\ker(\alpha)) = n - 1$. Teilräume der Form $\ker(\alpha)$ mit $0 \neq \alpha \in V^*$ werden *Hyperebenen* genannt. Dies sind also genau jene Teilräume, die sich durch *eine* nicht-triviale lineare Gleichung beschreiben lassen. In $\mathbb{R}^3$ entsprechen diese genau den Ebenen durch den Koordinatenursprung.

IV.2.11. Korollar. *Ist $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen gleicher Dimension, $\dim(V) = \dim(W)$, dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
(a) φ ist injektiv.
(b) φ ist surjektiv.
(c) φ ist ein linearer Isomorphismus.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ ist injektiv} &\Leftrightarrow \ker(\varphi) = \{0\} && \text{nach Proposition II.3.22}\\
&\Leftrightarrow \dim(\ker(\varphi)) = 0 && \text{nach Bemerkung IV.1.7}\\
&\Leftrightarrow \dim(\operatorname{img}(\varphi)) = \dim(V) && \text{nach Korollar IV.2.9}\\
&\Leftrightarrow \dim(\operatorname{img}(\varphi)) = \dim(W) && \text{da } \dim(V) = \dim(W)\\
&\Leftrightarrow \operatorname{img}(\varphi) = W && \text{nach Korollar IV.1.20}\\
&\Leftrightarrow \varphi \text{ ist surjektiv}
\end{aligned}$$

Dies zeigt (a)$\Leftrightarrow$(b). Die verbleibenden Behauptungen folgen sofort aus Bemerkung II.3.11. □

IV.2.12. Bemerkung. Eine injektive lineare Abbildung zwischen unendlich-dimensionalen Vektorräumen wird i.A. nicht surjektiv sein. Etwa ist die lineare Abbildung $\mathbb{K}[z] \to \mathbb{K}[z]$, $p \mapsto zp$, injektiv aber nicht surjektiv. Auch muss eine surjektive lineare Abbildung zwischen unendlich-dimensionalen Vektorräumen nicht injektiv sein. Zum Beispiel ist die lineare Abbildung $\mathbb{K}[z] \to \mathbb{K}[z]$, $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \mapsto a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \cdots$, surjektiv aber nicht injektiv. Auf die Voraussetzung in Korollar IV.2.11 kann daher nicht verzichtet werden.

IV.2.13. Korollar. *Seien $A, A' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zwei quadratische Matrizen.*
(a) Gilt $A'A = I_n$, dann ist A invertierbar mit Inverser $A^{-1} = A'$.
(b) Gilt $AA' = I_n$, dann ist A invertierbar mit Inverser $A^{-1} = A'$.

Beweis. Wir zeigen nur die erste Behauptung, die zweite lässt sich völlig analog beweisen. Seien also $A, A' \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und $A'A = I_n$. Betrachten wir die assoziierten linearen Abbildungen $\psi_A, \psi_{A'}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, dann folgt $\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n} = \psi_{I_n} = \psi_{A'A} = \psi_{A'} \circ \psi_A$, siehe Satz II.4.4. Die lineare Abbildung $\psi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ist daher injektiv, und somit ein Isomorphismus, siehe Korollar IV.2.11. Nach Korollar II.4.6 ist A also invertierbar. □

IV.2.14. SATZ (Dimension von $L(V,W)$). *Sind V und W zwei endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, dann ist auch $L(V,W)$ endlich-dimensional und es gilt*

$$\dim(L(V,W)) = \dim(V) \cdot \dim(W).$$

PROOF. Es existieren Isomorphismen $\phi\colon \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cong} V$ und $\psi\colon \mathbb{K}^m \xrightarrow{\cong} W$, wobei $n = \dim(V)$ und $m = \dim(W)$. Weiters ist die Zuordnung

$$L(V,W) \xrightarrow{\cong} L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), \quad \rho \mapsto \psi^{-1} \circ \rho \circ \phi,$$

ein linearer Isomorphismus mit Umkehrabbildung $\sigma \mapsto \psi \circ \sigma \circ \phi^{-1}$. Die Linearität dieser Abbildung folgt aus Proposition II.3.18, denn

$$\psi^{-1} \circ (\rho_1 + \rho_2) \circ \phi = \psi^{-1} \circ \rho_1 \circ \phi \;\;+\;\; \psi^{-1} \circ \rho_2 \circ \phi$$

und $\psi^{-1} \circ (\lambda\rho) \circ \phi = \lambda(\psi^{-1} \circ \rho \circ \phi)$, für beliebige $\rho, \rho_1, \rho_2 \in L(V,W)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Da $L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \cong M_{m\times n}(\mathbb{K})$, siehe Satz II.4.4, erhalten wir $L(V,W) \cong M_{m\times n}(\mathbb{K})$, das Korollar folgt somit aus Beispiel IV.1.10, $\dim(M_{m\times n}(\mathbb{K})) = mn$. □

IV.2.15. KOROLLAR. *Ein Vektorraum V ist genau dann endlich-dimensional, wenn sein Dualraum V^* endlich-dimensional ist. In diesem Fall gilt*

$$\dim(V) = \dim(V^*)$$

und die kanonische Abbildung $\iota\colon V \to V^{**}$ aus Proposition III.4.13 ist ein Isomorphismus.

BEWEIS. Ist V endlich-dimensional, dann folgt mit Satz IV.2.14, dass auch $V^* = L(V,\mathbb{K})$ endlich-dimensional ist und

$$\dim(V^*) = \dim(L(V,\mathbb{K})) = \dim(V) \cdot \dim(\mathbb{K}) = \dim(V) \cdot 1 = \dim(V).$$

Nach Proposition III.4.13 ist die Abbildung $\iota\colon V \to V^{**}$ injektiv, aus Korollar IV.2.11 folgt daher, dass ι ein Isomorphismus ist, denn $\dim(V^{**}) = \dim(V^*) = \dim(V)$. Sei nun umgekehrt V^* endlich dimensional. Nach dem eben gezeigten ist daher auch V^{**} endlich-dimensional. Nach Proposition III.4.13 ist die kanonische lineare Abbildung $\iota\colon V \to V^{**}$ injektiv. Somit ist V zu dem Teilraum $\operatorname{img}(\iota)$ von V^{**} isomorph. Aus Korollar IV.1.20 folgt daher, dass auch V endlich-dimensional sein muss. □

IV.2.16. KOROLLAR (Dimension des Annihilators). *Sei W ein Teilraum eines Vektorraums V. Es ist W° genau dann endlich-dimensional, wenn V/W endlich-dimensional ist, und in diesem Fall gilt*

$$\dim(W^\circ) = \dim(V/W).$$

BEWEIS. Dies folgt aus Korollar IV.2.15, denn es gilt $W^\circ \cong (V/W)^*$, siehe Korollar III.4.12(b). □

IV.2.17. Satz (Teilräume und Gleichungssyteme). *Sei W ein Teilraum eines Vektorraums V, sodass V/W endlich-dimensional ist. Eine Teilmenge $A \subseteq V^*$ ist genau dann ein Erzeugendensystem von W°, wenn $W = \bigcap_{\alpha \in A} \ker(\alpha)$ gilt. Es gibt daher $k = \dim(V/W)$ viele Funktionale $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V^*$, sodass*

$$W = \bigcap_{i=1}^{k} \ker(\alpha_i),$$

d.h. W ist Durchschnitt von k Hyperebenen, vgl. Beispiel IV.2.10. Jedes Funktional $\alpha \in V^*$, das auf W verschwindet, $\alpha|_W = 0$, ist eine Linearkombination von $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Mit weniger als k linearen Funktionalen lässt sich W nicht beschreiben.

Beweis. In Bemerkung III.4.8 haben wir bereits festgehalten, dass für jedes Erzeugendensystem A von W° auch $W = \bigcap_{\alpha \in A} \ker(\alpha)$ gelten muss. Sei nun umgekehrt $W = \bigcap_{\alpha \in A} \ker(\alpha)$. Nach Korollar IV.2.16 ist W° endlich-dimensional, also ist auch der Teilraum $\langle A \rangle$ endlich-dimensional, es existieren daher endlich viele Funktionale $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in A$, die eine Basis von $\langle A \rangle$ bilden. Wie in Bemerkung III.4.8 folgt

$$W = \bigcap_{\alpha \in A} \ker(\alpha) = \bigcap_{\alpha \in \langle A \rangle} \ker(\alpha) = \bigcap_{i=1}^{l} \ker(\alpha_i),$$

denn $\langle A \rangle = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_l \rangle$. Zusammen definieren die Funktionale $\alpha_i \colon V \to \mathbb{K}$ eine lineare Abbildung $\varphi \colon V \to \mathbb{K}^l$, sodass $W = \ker(\varphi)$. Wir erhalten $V/W \cong \operatorname{img}(\varphi) \subseteq \mathbb{K}^l$, also

$$\dim(W^\circ) = \dim(V/W) = \dim(\operatorname{img}(\varphi)) \leq \dim(\mathbb{K}^l) = l.$$

Aus Korollar IV.1.16(a) folgt daher, dass $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ eine Basis von W° sein muss, denn $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ sind linear unabhängig in W°. Somit enthält A ein Erzeugendensystem von W° und muss daher selbst ein Erzeugendensystem von W° sein. Die verbleibenden Aussagen folgen nun aus Korollar IV.2.16. $\square$

IV.2.18. Bemerkung (Teilräume von $\mathbb{K}^n$ und Gleichungssysteme). Sei W ein Teilraum von $\mathbb{K}^n$ und $k = n - \dim(W)$. Dann existiert ein Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

sodass W mit der Lösungsmenge dieses Systems übereinstimmt. Dies folgt aus Satz IV.2.17, denn $\dim(\mathbb{K}^n/W) = \dim(\mathbb{K}^n) - \dim(W) = k$. Jeder Teilraum von $\mathbb{K}^n$ lässt sich daher durch ein Gleichungssytem beschreiben. Fassen wir die Koeffizienten a_{ij} zu einer Matrix $A \in M_{k \times n}(\mathbb{K})$ zusammen, dann gilt also $W = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$. Weniger als k Gleichungen reichen nicht aus um W darzustellen, auch dies folgt aus Satz IV.2.17.

IV.2.19. Definition (Rang linearer Abbildungen). Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ hat *endlichen Rang* wenn ihr Bild, $\operatorname{img}(\varphi)$, endlich-dimensional ist. In diesem Fall wird die Zahl

$$\operatorname{rank}(\varphi) := \dim(\operatorname{img}(\varphi))$$

als *Rang* der linearen Abbildung φ bezeichnet.

IV.2.20. Satz (Rang der dualen Abbildung). *Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ hat genau dann endlichen Rang, wenn ihre duale Abbildung $\varphi^t\colon W^* \to V^*$ endlichen Rang hat, und in diesem Fall gilt*

$$\operatorname{rank}(\varphi^t) = \operatorname{rank}(\varphi).$$

Beweis. Aus Satz III.4.10, Korollar III.4.12(b) und Korollar II.6.6 erhalten wir Isomorphismen

$$\operatorname{img}(\varphi^t) = \ker(\varphi)^\circ \cong (V/\ker(\varphi))^* \cong \operatorname{img}(\varphi)^*.$$

Insbesondere ist $\operatorname{img}(\varphi^t)$ genau dann endlich-dimensional, wenn $\operatorname{img}(\varphi)^*$ endlich-dimensional ist, und in diesem Fall gilt $\dim(\operatorname{img}(\varphi^t)) = \dim(\operatorname{img}(\varphi)^*)$. Der Satz folgt daher aus Korollar IV.2.15. □

IV.2.21. Bemerkung. Jeder komplexe Vektorraum V kann auch als reeller Vektorraum aufgefasst werden, indem wir die Skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times V \to V$ zu $\mathbb{R} \times V \to V$ einschränken. Wir werden diesen reellen Vektorraum wird mit $V^{\mathbb{R}}$ bezeichnen, er wird der dem komplexen Vektorraum V zugrundeliegende reelle Vektorraum genannt. Ist $b_1, \dots, b_n$ eine Basis des komplexen Vektorraums V, dann bildet

$$b_1, \mathbf{i}b_1, b_2, \mathbf{i}b_2, \dots, b_n, \mathbf{i}b_n$$

eine Basis des zugrundeliegenden reellen Vektorraums $V^{\mathbb{R}}$, vgl. Aufgabe 76. Mit V ist daher auch $V^{\mathbb{R}}$ endlich-dimensional und es gilt

$$\dim_{\mathbb{R}}(V^{\mathbb{R}}) = 2\dim_{\mathbb{C}}(V).$$

IV.2.22. Bemerkung. Sei V ein reeller Vektorraum. Mit den Operationen

$$(V \times V) \times (V \times V) \xrightarrow{+} V \times V, \qquad (v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2),$$
$$\mathbb{C} \times (V \times V) \xrightarrow{\cdot} V \times V, \qquad (a + b\mathbf{i})(v, w) := (av - bw, bv + aw),$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $v, v_1, v_2, w, w_1, w_2 \in V$, wird $V \times V$ zu einem komplexen Vektorraum, vgl. Aufgabe 77. Wir bezeichnen diesen komplexen Vektorraum mit $V^{\mathbb{C}}$, er wird die *Komplexifizierung* von V genannt. Wir fassen V als Teilmenge von $V^{\mathbb{C}}$ auf, $v \mapsto (v, 0)$. Jedes Element von $V^{\mathbb{C}}$ lässt sich daher in der Form $v + \mathbf{i}w$ schreiben, für eindeutig bestimmte $v, w \in V$. In dieser Darstellung sehen Addition und Skalarmultiplikation vertrauter aus:

$$(v_1 + \mathbf{i}w_1) + (v_2 + \mathbf{i}w_2) = (v_1 + v_2) + \mathbf{i}(w_1 + w_2)$$
$$(a + b\mathbf{i})(v + \mathbf{i}w) = av - bw + \mathbf{i}(aw + bv)$$

Ist $b_1, \dots, b_n$ eine Basis des reellen Vektorraums V, dann bildet $b_1, \dots, b_n$ auch eine Basis des komplexen Vektorraums $V^{\mathbb{C}}$. Mit V ist daher auch $V^{\mathbb{C}}$ endlichdimensional und es gilt

$$\dim_{\mathbb{C}}(V^{\mathbb{C}}) = \dim_{\mathbb{R}}(V).$$

IV.2.23. Proposition. *Seien $\phi\colon V' \xrightarrow{\cong} V$ und $\psi\colon W \xrightarrow{\cong} W'$ zwei lineare Isomorphismen. Eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ hat genau dann endlichen Rang, wenn $\psi \circ \varphi \circ \phi\colon V' \to W'$ endlichen Rang hat und in diesem Fall gilt*

$$\operatorname{rank}(\psi \circ \varphi \circ \phi) = \operatorname{rank}(\varphi).$$

Beweis. Da ϕ surjektiv ist, gilt $\phi(V') = V$ und somit

$$\operatorname{img}(\psi \circ \varphi \circ \phi) = (\psi \circ \varphi \circ \phi)(V') = \psi(\varphi(\phi(V'))) = \psi(\varphi(V)) = \psi(\operatorname{img}(\varphi)).$$

Wegen der Injektivität von ψ liefert die Einschränkung einen Isomorphismus

$$\psi|_{\operatorname{img}(\varphi)}\colon \operatorname{img}(\varphi) \xrightarrow{\cong} \psi(\operatorname{img}(\varphi)).$$

Zusammen folgt $\operatorname{img}(\psi \circ \varphi \circ \phi) \cong \operatorname{img}(\varphi)$, also $\operatorname{rank}(\psi \circ \varphi \circ \phi) = \operatorname{rank}(\varphi)$. □

IV.3. Rang von Matrizen. Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ eine Matrix und

$$\psi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \qquad \psi_A(x) = Ax,$$

die damit assoziierte lineare Abbildung. Der Teilraum

$$L := \ker(\psi_A) \subseteq \mathbb{K}^n \tag{IV.4}$$

ist daher genau der *Lösungsraum* des homogenen Systems $Ax = 0$. Der von den Spalten einer Matrix aufgespannte Teilraum wird ihr *Spaltenraum* genannt. Bezeichnen wir die Spalten mit $A = (a_1|\cdots|a_n)$, so stimmt der Spaltenraum,

$$W := \operatorname{img}(\psi_A) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \subseteq \mathbb{K}^m, \tag{IV.5}$$

also mit dem Teilraum jener $y \in \mathbb{K}^m$ überein, für die das Gleichungssystem $Ax = y$ eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ hat. Unter dem *Zeilenraum* einer Matrix verstehen wir den von den Zeilen aufgespannten Teilraum. Wir fassen die Zeilenvektoren der Matrix A als Elemente des Dualraums, $(\mathbb{K}^n)^* = L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) \cong M_{1\times n}(\mathbb{K})$ auf. Bezeichnen wir die Zeilen von A mit $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, dann stimmt der Zeilenraum mit L° überein, siehe Satz III.4.10,

$$L^\circ = \ker(\psi_A)^\circ = \operatorname{img}((\psi_A)^t) = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_m \rangle \subseteq (\mathbb{K}^n)^*.$$

Wir können den Zeilenraum daher als den Vektorraum aller linearer Gleichungen verstehen, denen L genügt. Schließlich betrachten wir auch

$$W^\circ = \operatorname{img}(\psi_A)^\circ = \ker((\psi_A)^t) \subseteq (\mathbb{K}^m)^*,$$

den Teilraum aller Gleichungen, denen W genügt.

IV.3.1. Definition (Rang einer Matrix). Unter dem *Rang* einer Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ verstehen wir den Rang der damit assoziierten linearen Abbildung $\psi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi_A(x) = Ax$, d.h.

$$\operatorname{rank}(A) := \operatorname{rank}(\psi_A).$$

Nach Definition gilt daher $\dim(W) = \operatorname{rank}(A)$. Der Rang bestimmt auch die Dimensionen der anderen Teilräume, die wir oben betrachtet haben:

IV.3.2. Satz (Rang). *Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $k = \operatorname{rank}(A)$. Dann gilt:*

(a) $\dim(L) = n - k$, *d.h. der Lösungsraum ist $(n-k)$-dimensional.*
(b) $\dim(W) = k$, *d.h. der Spaltenraum ist k-dimensional. Die Matrix A besitzt daher k linear unabhängige Spalten, und je $k+1$ Spalten sind linear abhängig.*
(c) $\dim(L^\circ) = k$, *d.h. der Zeilenraum ist k-dimensional. Die Matrix A besitzt daher k linear unabhängige Zeilen, und je $k+1$ Zeilen sind linear abhängig. Jedes minimale lineare Gleichungssystem für L besteht daher aus genau k Gleichungen.*
(d) $\dim(W^\circ) = m - k$. *Jedes minimale lineare Gleichungssystem für W besteht daher aus genau $m-k$ Gleichungen.*

Beweis. Behauptung (b) ist trivial, vgl. Definition IV.3.1 und (IV.5). Behauptung (a) folgt aus Korollar IV.2.9, denn mit (IV.4) erhalten wir

$$\dim(L) = \dim(\ker(\psi_A)) = \dim(\mathbb{K}^n) - \dim(\operatorname{img}(\psi_A)) = n - \operatorname{rank}(A) = n - k.$$

Mit Korollar IV.2.8 und Korollar IV.2.16 folgt nun

$$\dim(L^\circ) = \dim(\mathbb{K}^n/L) = \dim(\mathbb{K}^n) - \dim(L) = n - (n-k) = k.$$

Nach Bemerkung IV.2.18 lässt sich L als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit k Gleichungen beschreiben, und weniger als k lineare Gleichungen reichen nicht aus. D.h. jedes minimale lineare Gleichungssystem für L muss aus genau k Gleichungen bestehen. Damit ist auch (c) gezeigt. Analog erhalten wir $\dim(W^\circ) = \dim(\mathbb{K}^m/W) = \dim(\mathbb{K}^m) - \dim(W) = m - k$, und somit (d). □

Der Rang wurde als Dimension des Spaltenraums definiert, er wird daher manchmal auch als *Spaltenrang* bezeichnet. Unter dem *Zeilenrang* verstehen wir die Dimension des von den Zeilen aufgespannten Teilraums. Aus dem eben bewiesenen Satz IV.3.2(b)&(c) folgt, dass diese beiden Begriffe übereinstimmen. Wir wollen dies nun nochmals auf direktere Art zeigen:

IV.3.3. Satz (Rang der Transponierten). *Für jede Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ gilt:*

$$\operatorname{rank}(A^t) = \operatorname{rank}(A).$$

Der Zeilenrang stimmt daher stets mit dem Spaltenrang überein. Weiters gilt:

$$0 \le \operatorname{rank}(A) \le \min(n, m).$$

Beweis. Betrachte die lineare Abbildung $\psi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi_A(x) = Ax$, und die duale Abbildung $(\psi_A)^t\colon (\mathbb{K}^m)^* \to (\mathbb{K}^n)^*$. In Bemerkung III.4.5 haben wir Isomorphismen $\phi_{\mathbb{K}^m}\colon \mathbb{K}^m \to (\mathbb{K}^m)^*$ und $\phi_{\mathbb{K}^n}\colon \mathbb{K}^n \to (\mathbb{K}^n)^*$ konstruiert, sodass

$$\psi_{A^t} = \phi_{\mathbb{K}^n}^{-1} \circ (\psi_A)^t \circ \phi_{\mathbb{K}^m}.$$

Mit Proposition IV.2.23 und Satz IV.2.20 erhalten wir daher

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(A^t) = \operatorname{rank}(\psi_{A^t}) = \operatorname{rank}\bigl(\phi_{\mathbb{K}^n}^{-1} \circ (\psi_A)^t \circ \phi_{\mathbb{K}^m}\bigr)& \\ = \operatorname{rank}((\psi_A)^t) = \operatorname{rank}(\psi_A) = \operatorname{rank}(A).&\end{aligned}$$

Da die Zeilen von A gerade die Spalten von A^t bilden, stimmen Zeilen- und Spaltenrang also überein. Da $\operatorname{img}(\psi_A) \subseteq \mathbb{K}^m$ gilt $\operatorname{rank}(A) = \dim(\operatorname{img}(\psi_A)) \leq \dim(\mathbb{K}^m) = m$ und analog $\operatorname{rank}(A^t) \leq n$. Zusammen mit $\operatorname{rank}(A^t) = \operatorname{rank}(A)$ folgt daraus $\operatorname{rank}(A) \leq \min(n, m)$. □

IV.3.4. Korollar. *Für $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Die Matrix A besitzt eine Rechtsinverse $A' \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, d.h. $AA' = I_m$.
(b) Die lineare Abbildung $\psi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi_A(x) = Ax$, ist surjektiv.
(c) Das Gl.system $Ax = y$ hat für jedes $y \in \mathbb{K}^m$ mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$.
(d) Die Spalten von A erzeugen $\mathbb{K}^m$.
(e) Die Matrix A hat m linear unabhängige Spalten.
(f) Die Zeilen von A erzeugen einen m-dimensionalen Teilraum.
(g) Die Zeilen von A sind linear unabhängig.
(h) Es gilt $\operatorname{rank}(A) = m$.

In diesem Fall muss $m \leq n$ gelten.

Beweis. Gilt $AA' = I_m$, so erhalten wir für die assoziierten linearen Abbildungen $\psi_A \circ \psi_{A'} = \psi_{AA'} = \psi_{I_m} = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^m}$, also muss ψ_A surjektiv sein. Ist umgekehrt ψ_A surjektiv, dann existiert eine lineare Rechtsinverse $\varphi\colon \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$, d.h. $\psi_A \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^m}$, siehe Korollar III.3.27(b). Bezeichnet nun A' die entsprechende Matrix, $\varphi = \psi_{A'}$, dann folgt $\psi_{AA'} = \psi_A \circ \psi_{A'} = \psi_A \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^m} = \psi_{I_m}$, also $AA' = I_m$. Damit ist die Äquivalenz (a)⇔(b) gezeigt. Die Äquivalenz (b)⇔(c) ist trivial. Die Äquivalenz (b)⇔(d) haben wir bereits früher fest gehalten, vgl. Bemerkung III.1.18. Die Äquivalenz (d)⇔(h) folgt aus der Definition des Rangs. Die Äquivalenz (d)⇔(f) folgt aus Satz IV.3.3. Die Implikation (d)⇒(e) folgt aus der Tatsache, dass jedes (endliche) Erzeugendensystem eine Basis enthält, siehe Proposition III.3.17. Die umgekehrte Implikation (e)⇒(d) folgt aus Korollar IV.1.17. Die Äquivalenz (f)⇔(g) folgt aus Korollar IV.1.17, denn A hat genau m Zeilen. Damit ist die Äquivalenz aller Eigenschaften gezeigt. Aus (e) folgt auch sofort der Zusatz $m \leq n$. □

IV.3.5. Korollar. *Für $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Die Matrix A besitzt eine Linksinverse $A' \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, d.h. $A'A = I_n$.
(b) Die lineare Abbildung $\psi_A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi_A(x) = Ax$, ist injektiv.

(c) Das Gl.system $Ax = y$ hat für jedes $y \in \mathbb{K}^m$ höchstens eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$.
(d) Die Spalten von A erzeugen einen n-dimensionalen Teilraum.
(e) Die Spalten von A sind linear unabhängig.
(f) Die Zeilen von A erzeugen $M_{1\times n}(\mathbb{K})$.
(g) Die Matrix A hat n linear unabhängige Zeilen.
(h) Es gilt $\operatorname{rank}(A) = n$.

In diesem Fall muss $n \leq m$ gelten.

Der Beweis kann analog zu dem des vorangehenden Korollars geführt werden und sei den LeserInnen überlassen.

IV.3.6. Bemerkung. Offenbar gilt $\operatorname{rank}(A) = 0$ genau dann, wenn $A = 0$.

Wir widmen uns nun der Berechnung des Rangs einer Matrix.

IV.3.7. Definition (Elementare Zeilen- und Spaltenumformungen). Unter einer *elementaren Zeilenumformung* einer Matrix verstehen wir eine der folgenden Modifikationen:

(I) Vertauschen zweier Zeilen.
(II) Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$.
(III) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Unter einer *elementaren Spaltenumformung* einer Matrix verstehen wir eine der folgenden Modifikationen:

(I) Vertauschen zweier Spalten.
(II) Multiplikation einer Spalte mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$.
(III) Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte.

Jede elementare Spaltenumformung kann durch Multiplikation von rechts mit einer invertierbaren Matrix S beschrieben werden, $A \rightsquigarrow AS$. Bei elementaren Spaltenumformungen vom Typ I ist diese Matrix von der Form

$$S = S_I^{i;\lambda} = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & 1 & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = I + (\lambda - 1)E_{i,i},$$

wobei $\lambda \neq 0$, und i bezeichnet die Nummer jener Spalte, die mit λ multipliziert wird. Beachte, dass diese Matrizen invertierbar sind, $\bigl(S_I^{i;\lambda}\bigr)^{-1} = S_I^{i;1/\lambda}$. Bei elementaren Spaltenumformungen vom Typ II hat S die Gestalt

$$S = S_{II}^{i,j;\mu} = \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & 1 & & \mu & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} = I + \mu E_{i,j},$$

wobei $\mu \in \mathbb{K}$, $i \neq j$, und i bezeichnet die Nummer jener Spalte, die μ-mal zur j-ten Spalte addiert wird. Auch diese Matrizen sind invertierbar, $\bigl(S_{II}^{i,j;\mu}\bigr)^{-1} = S_{II}^{i,j;-\mu}$.

Bei elementaren Zeilenumformung vom Typ III ist die Matrix S von der Form

$$S = S_{III}^{i,j} = \begin{pmatrix} \ddots &&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&& \\ && 0 &&&& 1 && \\ &&& 1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& 1 &&& \\ && 1 &&&& 0 && \\ &&&&&&& 1 & \\ &&&&&&&& \ddots \end{pmatrix} = I - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}.$$

wobei i und j die Nummern der beiden Spalten bezeichnen, die vertauscht werden, $i \neq j$. Auch diese Matrizen sind invertierbar, $\big(S_{III}^{i,j}\big)^{-1} = S_{III}^{i,j}$.

IV.3.8. Lemma. *Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Durch Anwenden endlich vieler elementarer Spaltenumformungen erhalten wir stets eine Matrix der Form $\tilde{A} = AS$, wobei $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Dabei bleibt der Rang der Matrix unverändert,* $\operatorname{rank}(\tilde{A}) = \operatorname{rank}(A)$, *und auch der Spaltenraum von $\tilde{A}$ stimmt mit dem Spaltenraum von A überein.*

Beweis. Entsteht $\tilde{A}$ aus A durch Anwenden von N elementaren Spaltenumformungen, dann existieren invertierbare Matrizen $S_1, \dots, S_N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, sodass $\tilde{A} = AS_1S_2\cdots S_N$, siehe oben. Es gilt daher $\tilde{A} = AS$, wobei auch $S = S_1 \cdots S_N$ invertierbar ist, d.h. $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Betrachten wir die mit diesen Matrizen assoziierten linearen Abbildungen, $\psi_{\tilde{A}} = \psi_{AS} = \psi_A \circ \psi_S$, dann gilt

$$\operatorname{img}(\psi_{\tilde{A}}) = \operatorname{img}(\psi_A \circ \psi_S) = \psi_A(\psi_S(\mathbb{K}^n)) = \psi_A(\mathbb{K}^n) = \operatorname{img}(\psi_A),$$

denn $\psi_S(\mathbb{K}^n) = \mathbb{K}^n$ wegen der Invertierbarkeit von S. Dies bedeutet aber gerade, dass der Spaltenraum von $\tilde{A}$ mit dem Spaltenraum von A überein stimmt. Daraus erhalten wir auch sofort $\operatorname{rank}(\tilde{A}) = \operatorname{rank}(A)$. □

Analog lassen sich elementare Zeilenumformung durch Multiplikation von links mit invertierbaren Matrizen T beschreiben, $A \rightsquigarrow TA$. Den drei Typen elementarer Zeilenumformungen entsprechen dabei Matrizen T von der Form:

$$\begin{aligned} T_I^{i;\lambda} &= \big(S_I^{i;\lambda}\big)^t = S_I^{i;\lambda} \\ T_{II}^{i,j;\mu} &= \big(S_{II}^{i,j;\mu}\big)^t = S_{II}^{j,i;\mu} \\ T_{III}^{i,j} &= \big(S_{III}^{i,j}\big)^t = S_{III}^{i,j} \end{aligned} \tag{IV.6}$$

IV.3.9. Lemma. *Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$. Durch Anwenden endlich vieler elementarer Zeilenumformungen erhalten wir stets eine Matrix der Form $\tilde{A} = TA$, wobei $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$. Dabei bleibt der Rang der Matrix unverändert,* $\operatorname{rank}(\tilde{A}) = \operatorname{rank}(A)$, *der Zeilenraum von $\tilde{A}$ stimmt mit dem Zeilenraum von A überein, und auch die Lösungsräume von $\tilde{A}$ und A sind gleich, d.h. $\tilde{A}x = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$.*

Beweis. Entsteht $\tilde{A}$ aus A durch Anwenden von N elementaren Zeilenumformungen, dann existieren invertierbare Matrizen $T_1, \dots, T_N \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, sodass

$\tilde{A} = T_N \cdots T_2 T_1 A$, also $\tilde{A} = TA$, wobei $T = T_N \cdots T_2 T_1 \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$. Wir erhalten aber auch $\tilde{A}^t = A^t T_1^t T_2^t \cdots T_N^t$, d.h. $\tilde{A}^t$ entsteht aus A^t durch eine Folge elementarer Spaltenumformungen, siehe (IV.6). Nach Lemma IV.3.8 gilt daher $\mathrm{rank}(\tilde{A}^t) = \mathrm{rank}(A^t)$ und der Spaltenraum von $\tilde{A}^t$ stimmt mit dem Spaltenraum von A^t überein. Mit Satz IV.3.3 folgt $\mathrm{rank}(\tilde{A}) = \mathrm{rank}(A)$. Da der Spaltenraum der Transponierten gerade der Zeilenraum der ursprünglichen Matrix ist, müssen auch die Zeilenräume von $\tilde{A}$ und A gleich sein. Aus der Invertierbarkeit von T folgt sofort $\tilde{A}x = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$, $x \in \mathbb{K}^n$. □

IV.3.10. Definition (Zeilen- und Spaltenstufenform). Wir sagen eine Matrix $\tilde{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ hat *Zeilenstufenform*, wenn sie die Gestalt

$$\begin{pmatrix}
0\cdots0 & \tilde{A}_{1j_1} & *\cdots* & * & *\cdots* & * & \cdots & *\cdots* & * & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & \tilde{A}_{2j_2} & *\cdots* & * & \cdots & *\cdots* & * & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & \tilde{A}_{3j_3} & \cdots & *\cdots* & * & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & *\cdots* & * & *\cdots* \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & *\cdots* & * & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & 0\cdots0 & \tilde{A}_{kj_k} & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0
\end{pmatrix}$$

hat, wobei $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$, und die Einträge $\tilde{A}_{1j_1}, \dots, \tilde{A}_{kj_k}$ alle verschieden von Null sind. Die Matrix hat *reduzierte Zeilenstufenform*, falls sie folgende Gestalt hat:

$$\begin{pmatrix}
0\cdots0 & 1 & *\cdots* & 0 & *\cdots* & 0 & \cdots & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 1 & *\cdots* & 0 & \cdots & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 1 & \cdots & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & *\cdots* & 0 & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & 0\cdots0 & 1 & *\cdots* \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0 & 0 & \cdots & 0\cdots0 & 0 & 0\cdots0
\end{pmatrix}$$

Wir sagen $\tilde{A}$ hat *(reduzierte) Spaltenstufenform*, wenn $\tilde{A}^t$ (reduzierte) Zeilenstufenform hat. Eine Matrix $\tilde{A}$ ist also genau dann von Spaltenstufenform, wenn sie folgende Gestalt hat

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\
\tilde{A}_{i_1 1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
* & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
* & 0 & & 0 & 0 & & 0 \\
* & \tilde{A}_{i_2 2} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
* & * & \cdots & \tilde{A}_{i_k k} & 0 & \cdots & 0 \\
* & * & & * & 0 & & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
* & * & & * & 0 & & 0
\end{pmatrix}$$

wobei $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m$ und die Eintragungen $\tilde{A}_{i_1 1}, \dots, \tilde{A}_{i_k k}$ alle verschieden von Null sind.

IV.3.11. Satz (Elimination). *Jede Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ kann durch endlich viele elementare Zeilenumformungen auf (reduzierte) Zeilenstufenform $\tilde{A}$ gebracht werden. Sind dabei $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$ wie in Definition IV.3.10 dann gilt:*

(a) $\operatorname{rank}(A) = k$.
(b) Die ersten k Zeilen der Zeilenstufenform $\tilde{A}$ bilden eine Basis des Zeilenraums von A, und liefern daher ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum $L = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = 0\}$.
(c) Die Einheitsvektoren $e_{j_1}, \dots, e_{j_k}$ bilden eine Basis für einen zu L komplementären Teilraum L'. Die Zeilenvektoren e_j^t, $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$, liefern ein minimales Gleichungssystem für L'.
(d) Die Spalten von A mit den Nummern $j_1, \dots, j_k$ bilden eine Basis des Spaltenraums von A.
(e) Ist die Zeilenstufenform $\tilde{A}$ reduziert, so bilden die Vektoren

$$e_j - \sum_{\{\, l \mid 1 \leq j_l < j \,\}} \tilde{A}_{lj} e_{j_l}, \qquad j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\},$$

eine Basis des Lösungsraums L.

Beweis. Wir bringen die Matrix A spaltenweise von links nach rechts auf reduzierte Zeilenstufenform. Induktiv nehmen wir an die ersten $q-1$ Spalten von A sind schon in reduzierter Zeilenstufenform. Sei p minimal für die Eigenschaft $A_{p1} = \cdots = A_{p,q-1} = 0$. Sind die Elemente $A_{pq}, \dots, A_{mq}$ alle Null, dann sind auch die ersten q Spalten von A in reduzierter Zeilenstufenform, und der Induktionsschritt erledigt. O.B.d.A. sei also einer der Einträge $A_{pq}, \dots, A_{mq}$ verschieden von Null. Durch Vertauschen zweier Zeilen können wir weiters $A_{pq} \neq 0$ erreichen. Durch Multiplikation der p-ten Zeile mit $1/A_{pq}$, dürfen wir weiters annehmen, dass $A_{pq} = 1$. Durch Addition geeigneter Vielfacher der p-ten Zeile zu den restlichen Zeilen können wir schließlich auch $A_{iq} = 0$, für alle $i \neq p$ erreichen. Beachte, dass die verwendeten Zeilenumformungen die ersten $q-1$ Spalten von A unverändert lassen. Wir erhalten also eine Matrix, deren ersten q Spalten in reduzierter Zeilenstufenform vorliegen. Damit ist der Induktionsschritt gezeigt, also lässt sich A durch elementare Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform $\tilde{A}$ bringen. Nach Lemma IV.3.9 gilt $\operatorname{rank}(\tilde{A}) = \operatorname{rank}(A)$, die Zeilenräume von A und $\tilde{A}$ sind gleich und auch die Lösungsräume von A und $\tilde{A}$ stimmen überein.

Im Fall $\tilde{A} = A$ lassen sich die Aussagen (a), (b), (c) und (e) aufgrund der einfachen Zeilenstufenform sofort ablesen. Dies sind aber alles nur Aussagen über den Zeilen- bzw. Lösungsraum. Da auch im allgemeinen Fall Zeilen- und Lösungsraum der beiden Matrizen A und $\tilde{A}$ übereinstimmen, bleiben sie für A richtig.

Nun zur verbleibenden Behauptung (d): Der Spaltenraum von A hat Dimension k, siehe (a) und Satz IV.3.2(b). Es genügt daher zu zeigen, dass die Spalten mit Nummern $j_1, \dots, j_k$ linear unabhängig sind, siehe Korollar IV.1.17. Es bezeichne B die Matrix die wir aus A erhalten indem wir alle Spalten bis auf die mit Nummern $j_1, \dots, j_k$ streichen. Es genügt $\operatorname{rank}(B) = k$ zu zeigen, siehe Satz IV.3.5. Wenden wir die selben Zeilenumformungen, die uns von A zu $\tilde{A}$ geführt haben, auf B an, so erhalten wir eine Matrix $\tilde{B}$, deren Spalten gerade die Spalten von $\tilde{A}$ mit Nummern $j_1, \dots, j_k$ sind. Nach Lemma IV.3.9 genügt es $\operatorname{rank}(\tilde{B}) = k$ zu zeigen. Wegen der einfachen Gestalt von $\tilde{A}$ lässt sich dies aber sofort ablesen. □

IV.3.12. Satz (Elimination). *Jede Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ kann durch endlich viele elementare Spaltenumformungen auf (reduzierte) Spaltenstufenform $\tilde{A}$ gebracht werden. Sind dabei $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m$ wie in Definition IV.3.10, dann gilt:*

(a) $\operatorname{rank}(A) = k$.
(b) Die ersten k Spalten der Spaltenstufenform $\tilde{A}$ bilden eine Basis des Spaltenraums W von A.
(c) Die Spaltenvektoren e_i, $i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$, bilden eine Basis für einen zu W komplementären Teilraum W'. Die Zeilenvektoren $e_{i_1}^t, \dots, e_{i_k}^t$ liefern ein minimales Gleichungssystem für W'.
(d) Die Zeilen von A mit den Nummern $i_1, \dots, i_k$ bilden eine Basis des Zeilenraums von A und liefern daher ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum $L = \{x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0\}$.
(e) Ist die Spaltenstufenform $\tilde{A}$ reduziert, so bilden die Zeilenvektoren

$$e_i^t - \sum_{\{\, l \,\mid\, 1 \leq i_l < i\,\}} \tilde{A}_{il} e_{i_l}^t, \qquad i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\},$$

eine Basis von W° und liefern daher ein minimales Gleichungssystem für den Spaltenraum von A.

Beweis. Wir führen die erste Aussage auf den vorangehenden Satz IV.3.11 zurück. Dieser besagt, dass A^t durch elementare Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform gebracht werden kann. Es existieren daher invertierbare Matrizen $T_1, \dots, T_N \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ wie in (IV.6), sodass $T_N \cdots T_1 A^t$ reduzierte Zeilenstufenform hat. Also ist $A T_1^t \cdots T_N^t$ eine Matrix in reduzierter Spaltenstufenform. Da die Multiplikation von rechts mit T_i^t gerade einer elementaren Spaltenumformung entspricht sehen wir, dass A durch N elementare Spaltenumformungen auf reduzierte Spaltenstufenform $\tilde{A}$ gebracht werden kann. Nach Lemma IV.3.8 gilt $\operatorname{rank}(\tilde{A}) = \operatorname{rank}(A)$, und auch der Spaltenraum von $\tilde{A}$ stimmt mit dem Spaltenraum von A überein.

Wie im Beweis von Satz IV.3.11 lassen sich die Aussagen (a), (b), (c) und (e) für die (reduzierte) Spaltenstufenform $\tilde{A}$ sofort ablesen. Da es sich dabei um

Aussagen über den Spaltenraum handelt, bleiben sie für A richtig, denn die Spaltenräume von A und $\tilde{A}$ sind gleich. Die verbleibende Behauptung (d) lässt sich wie zuvor zeigen, oder kann durch Übergang zur Transponierten aus Satz IV.3.11 abgeleitet werden. $\square$

IV.3.13. Beispiel. Wir wollen zunächst den Rang der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 8 & 2 & 14 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 12 & 9 & 17 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in M_{6\times 8}(\mathbb{R})$$

bestimmen. Durch Vertauschen der ersten und dritten Zeile erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & 8 & 2 & 14 & 18 \\ 0 & 0 & 6 & 9 & 12 & 9 & 17 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & -4 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Durch Addition geeigneter Vielfacher der ersten Zeile zu den anderen Zeilen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Vertauschen der zweiten und dritten Zeile liefert:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Durch Addition geeigneter Vielfacher der zweiten Zeile zu den letzten beiden Zeilen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Durch Addition geeigneter Vielfacher der dritten Zeile zur vierten und sechsten Zeile erhalten wir schließlich eine Matrix in Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 0&0&2&3&4&1&3&4\\ 0&0&0&0&0&3&4&1\\ 0&0&0&0&0&0&4&5\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz IV.3.11(a) gilt daher $\operatorname{rank}(A) = 3$. Aus dieser Rechnung lässt sich noch viel mehr über A sagen. Nach Satz IV.3.11(b) bildet

$$\begin{array}{rrrrrrcl} 2x_3 & +3x_4 & +4x_5 & +x_6 & +3x_7 & +4x_8 & = & 0\\ &&& 3x_6 & +4x_7 & +x_8 & = & 0\\ &&&& 4x_7 & +5x_8 & = & 0 \end{array} \tag{IV.7}$$

ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum $L = \{x \in \mathbb{R}^8 | Ax = 0\}$, und es gilt $\dim(L) = 5$, siehe Satz IV.3.2(a). Nach Satz IV.3.11(c) ist $L' := \langle e_3, e_6, e_7\rangle$ ein zu L komplementärer Teilraum, $\dim(L') = 3$, und dieser lässt sich durch das minimale Gleichungssytem $x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_8 = 0$ beschreiben. Nach Satz IV.3.11(d) bilden die folgenden Spalten von A

$$a_3 = \begin{pmatrix} 0\\2\\2\\4\\6\\-2 \end{pmatrix}, \quad a_6 = \begin{pmatrix} 0\\1\\4\\2\\9\\-4 \end{pmatrix}, \quad a_7 = \begin{pmatrix} 4\\3\\7\\14\\17\\-3 \end{pmatrix},$$

eine Basis des Spaltenraums von A. Bringen wir A durch weitere Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform,

$$\begin{pmatrix} 0&0&2&3&4&1&3&4\\ 0&0&0&0&0&3&4&1\\ 0&0&0&0&0&0&4&5\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0&0&1&3/2&2&1/2&3/2&2\\ 0&0&0&0&0&1&4/3&1/3\\ 0&0&0&0&0&0&1&5/4\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0&0&1&3/2&2&1/2&0&1/8\\ 0&0&0&0&0&1&0&-4/3\\ 0&0&0&0&0&0&1&5/4\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0&0&1&3/2&2&0&0&19/24\\ 0&0&0&0&0&1&0&-4/3\\ 0&0&0&0&0&0&1&5/4\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

dann folgt aus Satz IV.3.11(e), dass die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0\\0\\-3/2\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0\\0\\-2\\0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad b_5 = \begin{pmatrix} 0\\0\\-19/24\\0\\0\\4/3\\-5/4\\1 \end{pmatrix}$$

eine Basis des Lösungsraums $L = \{x \in \mathbb{R}^8 | Ax = 0\}$ bilden. Somit ist $\phi\colon \mathbb{R}^5 \xrightarrow{\cong} L$,

$$\phi\begin{pmatrix} s_1\\ s_2\\ s_3\\ s_4\\ s_5\end{pmatrix} = s_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + s_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + s_3\begin{pmatrix}0\\0\\-3/2\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix} + s_4\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + s_5\begin{pmatrix}0\\0\\-19/24\\0\\0\\4/3\\-5/4\\1\end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus, d.h. eine Parameterdarstellung von L. Schließlich erhalten wir aus der reduzierten Zeilenstufenform folgendes etwas einfachere minimale Gleichungssystem für L, vgl. (IV.7):

$$\begin{array}{ccccccccc} x_3 & +\frac{3}{2}x_4 & +2x_5 & & & +\frac{19}{24}x_8 & = & 0 \\ & & & x_6 & & -\frac{4}{3}x_8 & = & 0 \\ & & & & x_7 & +\frac{5}{4}x_8 & = & 0 \end{array}$$

IV.3.14. Beispiel. Wir wollen den Rang der reellen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 7\\ 1 & 5 & 8 & 10\\ 2 & 12 & 22 & 29\\ 3 & 13 & 21 & 32\end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

bestimmen. Durch entsprechende Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & 7\\ 1 & 5 & 8 & 10\\ 2 & 12 & 22 & 29\\ 3 & 13 & 21 & 32\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10\\ 0 & 0 & 3 & 7\\ 2 & 12 & 22 & 29\\ 3 & 13 & 21 & 32\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10\\ 0 & 0 & 3 & 7\\ 0 & 2 & 6 & 9\\ 0 & -2 & -3 & 2\end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10\\ 0 & 2 & 6 & 9\\ 0 & 0 & 3 & 7\\ 0 & -2 & -3 & 2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10\\ 0 & 2 & 6 & 9\\ 0 & 0 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 3 & 11\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 8 & 10\\ 0 & 2 & 6 & 9\\ 0 & 0 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

Somit $\operatorname{rank}(A) = 4$, die Matrix A ist daher invertierbar, siehe Korollar IV.3.5.

IV.3.15. Beispiel. Wir wollen den Rang der komplexen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 7 & 1-\mathbf{i}\\ 2\mathbf{i} & 14 & 3-\mathbf{i}\\ -1 & 2+4\mathbf{i} & 1+4\mathbf{i}\\ 1-\mathbf{i} & -4-5\mathbf{i} & 7\mathbf{i}\end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{C})$$

bestimmen. Durch Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & 7 & 1-\mathbf{i}\\ 2\mathbf{i} & 14 & 3-\mathbf{i}\\ -1 & 2+4\mathbf{i} & 1+4\mathbf{i}\\ 1-\mathbf{i} & -4-5\mathbf{i} & 7\mathbf{i}\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 7 & 1-\mathbf{i}\\ 0 & 0 & 1+\mathbf{i}\\ 0 & 2-3\mathbf{i} & 3\mathbf{i}\\ 0 & 3+2\mathbf{i} & 2+7\mathbf{i}\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 7 & 1-\mathbf{i}\\ 0 & 2-3\mathbf{i} & 3\mathbf{i}\\ 0 & 0 & 1+\mathbf{i}\\ 0 & 3+2\mathbf{i} & 2+7\mathbf{i}\end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 7 & 1-\mathbf{i}\\ 0 & 2-3\mathbf{i} & 3\mathbf{i}\\ 0 & 0 & 1+\mathbf{i}\\ 0 & 0 & 5+7\mathbf{i}\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 7 & 1-\mathbf{i}\\ 0 & 2-3\mathbf{i} & 3\mathbf{i}\\ 0 & 0 & 1+\mathbf{i}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Es gilt daher $\operatorname{rank}(A) = 3$. Die lineare Abbildung $\psi_A\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4$, $\psi_A(x) = Ax$, ist daher injektiv. Das Gleichungssystem $Ax = y$ hat daher für jedes $y \in \mathbb{C}^4$ höchstens eine Lösung $x \in \mathbb{C}^3$, siehe Korollar IV.3.5.

IV.3.16. Beispiel. Wir wollen den Rang folgender Matrix über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ berechnen:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{5\times 6}(\mathbb{Z}_2)$$

Durch Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&1&0 \\ 1&1&0&1&1&0 \\ 1&0&1&1&0&1 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 1&0&1&1&1&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&1&0&1&1&0 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 1&0&1&1&0&1 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 1&0&1&1&1&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&1&0&1&1&0 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 0&1&1&0&1&1 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 0&1&1&0&0&1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&1&0&1&1&0 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&1&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&1&0&1&1&0 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1 \\ 0&0&1&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&1&0&1&1&0 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 0&0&1&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Es gilt daher $\operatorname{rank}(A) = 4$.

IV.3.17. Beispiel. Betrachte den von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1\\2\\4\\6\\1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2\\4\\8\\15\\6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1\\2\\4\\9\\8 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4\\8\\16\\30\\15 \end{pmatrix}, \quad v_5 \begin{pmatrix} 3\\6\\12\\24\\12 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Teilraum $W := \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle \subseteq \mathbb{R}^5$. Wir wollen nun:

(1) $\dim(W)$ und eine Basis von W bestimmen.
(2) Ein minimales Gleichungssystem für W angeben.
(3) Einen zu W komplementären Teilraum W' bestimmen und diesen durch eine Basis und ein minimales Gleichungssystem beschreiben.
(4) Eine Basis von W bestimmen, die aus gewissen der Vektoren v_i besteht.

Fassen wir die Vektoren zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 1&2&1&4&3 \\ 2&4&2&8&6 \\ 4&8&4&16&12 \\ 6&15&9&30&24 \\ 1&6&8&15&12 \end{pmatrix},$$

dann ist W der Spaltenraum von A. Durch Spaltenumformungen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1&2&1&4&3 \\ 2&4&2&8&6 \\ 4&8&4&16&12 \\ 6&15&9&30&24 \\ 1&6&8&15&12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 2&0&0&0&0 \\ 4&0&0&0&0 \\ 6&3&3&6&6 \\ 1&4&7&11&9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 2&0&0&0&0 \\ 4&0&0&0&0 \\ 6&3&0&0&0 \\ 1&4&3&3&1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 2&0&0&0&0 \\ 4&0&0&0&0 \\ 6&3&0&0&0 \\ 1&4&3&0&0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz IV.3.12(b) bilden daher die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1\\2\\4\\6\\1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\3\\4 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\3 \end{pmatrix}$$

eine Basis von W und es gilt $\dim(W) = 3$. Durch weitere Spaltenumformungen kann die Matrix auf reduzierte Spaltenstufenform gebracht werden:

$$\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\2&0&0&0&0\\4&0&0&0&0\\6&3&0&0&0\\1&4&3&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\2&0&0&0&0\\4&0&0&0&0\\6&3&0&0&0\\1&4&1&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\2&0&0&0&0\\4&0&0&0&0\\6&3&0&0&0\\0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\2&0&0&0&0\\4&0&0&0&0\\6&1&0&0&0\\0&0&1&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\2&0&0&0&0\\4&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten so eine Basis von W,

$$b_1' = \begin{pmatrix} 1\\2\\4\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad b_2' = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \quad b_3' = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix},$$

die sehr viele verschwindende Komponenten hat. Insbesondere ist

$$\phi\colon \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} W, \qquad \phi\begin{pmatrix} s\\t\\u \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1\\2\\4\\0\\0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s\\2s\\4s\\t\\u \end{pmatrix},$$

ein Isomorphismus, d.h. Parameterdarstellung von W. Nach Satz IV.3.12(e) ist

$$\begin{array}{rrrcl} -2x_1 & +x_2 & & = & 0 \\ -4x_1 & & +x_3 & = & 0 \end{array}$$

ein minimales Gleichungssystem für W. Nach Satz IV.3.12(c) bilden die Vektoren

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix},$$

eine Basis für einen zu W komplementären Teilraum $W' = \langle e_2, e_3 \rangle$. Ein minimales Gleichungssystem für W' ist:

$$\begin{array}{rrrcl} x_1 & & & = & 0 \\ & x_4 & & = & 0 \\ & & x_5 & = & 0 \end{array}$$

Um die letzte Frage zu beantworten bringen wir A auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1&2&1&4&3\\2&4&2&8&6\\4&8&4&16&12\\6&15&9&30&24\\1&6&8&15&12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&2&1&4&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&3&3&6&6\\0&4&7&11&9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&2&1&4&3\\0&3&3&6&6\\0&4&7&11&9\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&2&1&4&3\\0&1&1&2&2\\0&4&7&11&9\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&2&1&4&3\\0&1&1&2&2\\0&0&3&3&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz IV.3.11(d) bilden auch die Vektoren v_1, v_2, v_3 eine Basis von W.

IV.3.18. Beispiel. Wir wollen verifizieren, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 7\\-1\\2\\0\\3\\1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 14\\-1\\4\\1\\10\\3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -21\\0\\-6\\-3\\-23\\2 \end{pmatrix},$$

linear unabhängig in $\mathbb{R}^6$ sind und diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^6$ ergänzen. Mit Hilfe von Spaltenumformungen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 7&14&-21\\-1&-1&0\\2&4&-6\\0&1&-3\\3&10&-23\\1&3&2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 7&0&0\\-1&1&-3\\2&0&0\\0&1&-3\\3&4&-14\\1&1&5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 7&0&0\\-1&1&0\\2&0&0\\0&1&0\\3&4&1\\1&1&8 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind also linear unabhängig, siehe Korollar IV.3.5. Zusammen mit den Einheitsvektoren e_3, e_4 und e_6 bilden sie eine Basis $v_1, v_2, v_3, e_3, e_4, e_6$ von $\mathbb{R}^6$, siehe Satz IV.3.12(c).

IV.3.19. Beispiel. Es bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^5$ den Lösungsraum des Systems:

$$\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +4x_4 & +11x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +14x_4 & +30x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & +6x_2 & +3x_3 & +12x_4 & +34x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & +6x_3 & +20x_4 & +41x_5 & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & -2x_4 & +7x_5 & = & 0 \end{array} \tag{IV.8}$$

Wir wollen nun:

(1) $\dim(L)$ und eine Basis von L bestimmen.
(2) Ein minimales Gleichungssystem für L angeben.
(3) Einen zu L komplementären Teilraum L' bestimmen und diesen durch eine Basis und ein minimales Gleichungssystem beschreiben.
(4) Ein minimales Gleichungssystem für L angeben, das aus gewissen der ursprünglichen Gleichungen besteht.

Wir fassen die Koeffizienten des Gleichungssytems zu einer Matrix zusammen,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 4 & 14 & 30 \\ 3 & 6 & 3 & 12 & 34 \\ 2 & 4 & 6 & 20 & 41 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Durch Zeilenumformungen bringen wir A auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 2 & 4 & 4 & 14 & 30 \\ 3 & 6 & 3 & 12 & 34 \\ 2 & 4 & 6 & 20 & 41 \\ 1 & 2 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & 19 \\ 0 & 0 & -2 & -6 & -4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz IV.3.11(e) bilden die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von L und es gilt $\dim(L) = 2$. Insbesondere ist

$$\phi\colon \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} L, \qquad \phi\left(\begin{smallmatrix} s \\ t \end{smallmatrix}\right) = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s-t \\ s \\ -3t \\ t \\ 0 \end{pmatrix},$$

ein Isomorphismus, d.h. eine Parameterdarstellung. Nach Satz IV.3.11(b) erhalten wir aus den nicht-trivialen Zeilen der reduzierten Zeilstufenform folgendes minimale Gleichungssystem für L:

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = 0 \\ & & x_3 & +3x_4 & & = 0 \\ & & & & x_5 & = 0 \end{array}$$

Nach Satz IV.3.11(c) bilden die Einheitsvektoren

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix}$$

eine Basis eines zu L komplementären Teilraums L', der auch durch das minimale Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrl} x_2 & & = 0 \\ & x_4 & = 0 \end{array}$$

beschrieben werden kann. Um die letzte Frage zu beantworten bringen wir A auf Spaltenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1&2&1&4&11\\ 2&4&4&14&30\\ 3&6&3&12&34\\ 2&4&6&20&41\\ 1&2&-1&-2&7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 2&0&2&6&8\\ 3&0&0&0&1\\ 2&0&4&12&19\\ 1&0&-2&-6&-4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 2&0&2&0&0\\ 3&0&0&0&1\\ 2&0&4&0&3\\ 1&0&-2&0&4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ 2&2&0&0&0\\ 3&0&1&0&0\\ 2&4&3&0&0\\ 1&-2&4&0&0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz IV.3.12(d) bildet die ersten drei Gleichungen von (IV.8),

$$\begin{array}{rrrrrl} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +4x_4 & +11x_5 & = 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & +4x_3 & +14x_4 & +30x_5 & = 0 \\ 3x_1 & +6x_2 & +3x_3 & +12x_4 & +34x_5 & = 0 \end{array}$$

ein minimales Gleichungssystem für L.

IV.3.20. Beispiel. Betrachte den Teilraum $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle \subseteq \mathbb{R}^5$, der von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1\\2\\3\\2\\1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2\\4\\6\\4\\2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1\\4\\3\\6\\-1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4\\14\\12\\20\\-2 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 11\\30\\34\\41\\7 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird. Wir wollen eine Basis von W bestimmen, die aus gewissen der Vektoren v_i besteht. Mit Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1&2&1&4&11\\ 2&4&4&14&30\\ 3&6&3&12&34\\ 2&4&6&20&41\\ 1&2&-1&-2&7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&2&1&4&11\\ 0&0&2&6&8\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&4&12&19\\ 0&0&-2&-6&-4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&2&1&4&11\\ 0&0&2&6&8\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&3\\ 0&0&0&0&4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&2&1&4&11\\ 0&0&2&6&8\\ 0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz IV.3.11(d) bilden die Vektoren v_1, v_3, v_5 eine Basis von W und es gilt $\dim(W) = 3$. Auch sehen wir nun, dass etwa v_1, v_2, v_5 keine Basis von W bildet.

IV.3.21. Beispiel. Betrachte den von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1\\2\\7\\4\\5\\8 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1\\-2\\-6\\-1\\-1\\1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2\\4\\15\\11\\14\\26 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3\\6\\20\\9\\11\\17 \end{pmatrix},$$

aufgespannten Teilraum $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle \subseteq \mathbb{R}^6$. Wir wollen einen zu W komplementären Teilraum W' bestimmen, genauer, eine Basis von W' angeben. Mittels Spaltenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 4 & 6 \\ 7 & -6 & 15 & 20 \\ 4 & -1 & 11 & 9 \\ 5 & -1 & 14 & 11 \\ 8 & 1 & 26 & 17 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & -3 \\ 5 & 4 & 4 & -4 \\ 8 & 9 & 10 & -7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nach Satz IV.3.12(c) spannen daher die Einheitsvektoren e_2, e_4, e_5 einen Teilraum $W' = \langle e_2, e_4, e_5 \rangle \subseteq \mathbb{R}^6$ auf, der zu W komplementär ist, $W \oplus W' = \mathbb{R}^6$. Beachte auch $\dim(W) = 3 = \dim(W')$.

IV.3.22. Beispiel. Wir wollen verifizieren, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 21 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 19 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ sind, und drei dieser Vektoren bestimmen, die eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden. Wir fassen die Vektoren zu einer Matrix zusammen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & -1 & 3 & 3 & -6 \\ 4 & 11 & 18 & 21 & 19 \end{pmatrix}$$

Mittels Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & -1 & 3 & 3 & -6 \\ 4 & 11 & 18 & 21 & 19 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 3 & 8 & 9 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 3 & 8 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Somit ist $\operatorname{rank}(A) = 3$, also bilden die Vektoren $v_1, \dots, v_5$ ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$, siehe Korollar IV.3.4. Nach Satz IV.3.11(d) bilden die Vektoren v_1, v_2, v_5 eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

IV.3.23. Beispiel. Es bezeichne $W \subseteq \mathbb{R}^5$ den Teilraum aller y, für die das folgende Gleichungssystem lösbar ist:

$$\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & & -x_3 & & +2x_5 & = & y_1 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +3x_4 & +x_5 & = & y_2 \\ 7x_1 & +5x_2 & +3x_3 & +15x_4 & +9x_5 & = & y_3 \\ 5x_1 & +2x_2 & & +7x_4 & +12x_5 & = & y_4 \\ 17x_1 & +7x_2 & -x_3 & +23x_4 & +35x_5 & = & y_5 \end{array} \tag{IV.9}$$

Wir wollen nun $\dim(W)$ und eine Basis von W bestimmen, und auch ein minimales Gleichungssystem für W angeben. Beachte, dass W genau der Spaltenraum der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 15 & 9 \\ 5 & 2 & 0 & 7 & 12 \\ 17 & 7 & -1 & 23 & 35 \end{pmatrix}$$

ist. Durch Spaltenumformungen bringen wir diese Matrix auf reduzierte Spaltenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 3 & 15 & 9 \\ 5 & 2 & 0 & 7 & 12 \\ 17 & 7 & -1 & 23 & 35 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 7 & 5 & 10 & 15 & -5 \\ 5 & 2 & 5 & 7 & 2 \\ 17 & 7 & 16 & 23 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 10 & 7 & 2 & 2 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus lesen wir $\dim(W) = 3$ ab und erhalten auch eine Basis

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

von W, vgl. Satz IV.3.12(b). Mit Satz IV.3.12(e) erhalten wir auch ein minimales Gleichungssystem für W:

$$\begin{array}{rrrrrcl} -2y_1 & -5y_2 & +y_3 & & & = & 0 \\ -4y_1 & -3y_2 & & -2y_4 & +y_5 & = & 0 \end{array} \tag{IV.10}$$

Das ursprüngliche Gleichungssystem (IV.9) ist also genau dann lösbar, wenn die rechte Seite den beiden Gleichungen (IV.10) genügt.

IV.4. Inhomogene Gleichungssysteme. Sei wieder $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ eine Matrix. Wir wollen nun, für fixes $y \in \mathbb{K}^m$, das inhomogene System $Ax = y$ lösen, d.h. alle $x \in \mathbb{K}^n$ bestimmen, für die $Ax = y$ gilt.

IV.4.1. Satz. *Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $y \in \mathbb{K}^m$. Das inhomogene System*

$$Ax = y \tag{IV.11}$$

ist genau dann lösbar, wenn

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|y)$$

gilt. Durch Zeilenumformungen lässt sich die erweiterte Matrix $(A|y)$ auf die Form $(\tilde{A}|\tilde{y})$ bringen, wobei $\tilde{A}$ (reduzierte) Zeilenstufenform hat. Sind $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$ wie in Definition IV.3.10, so ist (IV.11) *also genau dann lösbar, wenn $\tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_{k+2} = \cdots = \tilde{y}_m = 0$ gilt. In diesem Fall liefern die ersten k Zeilen von $(\tilde{A}|\tilde{y})$ ein minimales inhomogenes Gleichungssystem, das dieselbe Lösungsmenge wie* (IV.11) *besitzt. Ist darüber hinaus die Zeilenstufenform $\tilde{A}$ reduziert, dann bildet*

$$\xi = \tilde{y}_1 e_{j_1} + \cdots + \tilde{y}_k e_{j_k}$$

eine spezielle Lösung von (IV.11)*, d.h. es gilt $A\xi = y$. Mit Satz IV.3.11(e) erhalten wir aus $\tilde{A}$ eine Basis $b_1, \dots, b_{n-k}$ für den Lösungsraum des homogenen Systems $Ax = 0$. Die allgemeine Lösung von* (IV.11) *ist dann von der Form*

$$x = \xi + s_1 b_1 + \cdots + s_{n-k} b_{n-k}, \qquad s_1, \dots, s_{n-k} \in \mathbb{K}.$$

Beweis. Bezeichnen $A = (a_1|\cdots|a_n)$ die Spalten von A, dann gilt

$$\operatorname{rank}(A) = \dim\bigl(\langle a_1, \dots, a_n\rangle\bigr) \quad \text{und} \quad \operatorname{rank}(A|y) = \dim\bigl(\langle a_1, \dots, a_n, y\rangle\bigr).$$

Die Bedingung $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|y)$ ist daher zu

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle a_1, \dots, a_n, y \rangle$$

äquivalent, siehe Korollar IV.1.20. Nach Lemma III.1.4(d) ist dies genau dann der Fall, wenn $y \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, d.h. genau dann, wenn das System $Ax = y$ eine Lösung besitzt. Nach Lemma IV.3.9 gilt $(\tilde{A}|\tilde{y}) = T(A|y) = (TA|Ty)$, für ein $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$. Wegen der Invertierbarkeit von T ist

$$Ax = y \quad \Leftrightarrow \quad TAx = Ty \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A}x = \tilde{y},$$

d.h. die Lösungsmenge von $Ax = y$ stimmt mit der von $\tilde{A}x = \tilde{y}$ überein. Daraus lassen sich nun sofort die restlichen Behauptungen ablesen. □

IV.4.2. Beispiel. Wir wollen alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrrcr} x_1 & +x_2 & +6x_3 & +4x_4 & & +3x_6 & = & 5 \\ x_1 & +5x_2 & +10x_2 & -4x_4 & -4x_5 & -x_6 & = & 9 \\ 2x_1 & +2x_2 & +12x_3 & +8x_4 & +2x_5 & +12x_6 & = & 12 \\ -3x_1 & -3x_2 & -18x_3 & -12x_4 & +3x_5 & & = & -12 \end{array} \tag{IV.12}$$

bestimmen. Mittels Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & -4 & -4 & -1 & 9 \\ 2 & 2 & 12 & 8 & 2 & 12 & 12 \\ -3 & -3 & -18 & -12 & 3 & 0 & -12 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & -8 & -4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 9 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Wir sehen daher bereits, dass das Gleichungssystem lösbar ist. Durch weitere Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 6 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 5 & 6 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Daraus lesen wir eine spezielle Lösung ξ sowie eine Basis b_1, b_2, b_3 für den Lösungsraums des homogene System ab, vgl. Satz IV.4.1:

$$\xi = \begin{pmatrix} 3\\2\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} -5\\-1\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -6\\2\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1\\-2\\0\\0\\-3\\1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (IV.12) ist daher

$$\begin{pmatrix} x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\\2\\0\\0\\1\\0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} -5\\-1\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -6\\2\\0\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} -1\\-2\\0\\0\\-3\\1 \end{pmatrix}, \qquad s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}.$$

Auch ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum lässt sich ablesen:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & & +5x_3 & +6x_4 & & +x_6 & = & 3 \\ & x_2 & +x_3 & -2x_4 & & +2x_6 & = & 2 \\ & & 3 & & x_5 & +3x_6 & = & 1 \end{array}$$

IV.4.3. Beispiel. Wir wollen alle Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & = & 4 \\ -x_1 & +3x_2 & +3x_3 & +3x_4 & = & -1 \\ x_1 & +7x_2 & +17x_3 & +20x_4 & = & 9 \\ 2x_1 & -x_2 & -16x_3 & -17x_4 & = & 2 \end{array} \tag{IV.13}$$

bestimmen. Durch Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 7 & 17 & 20 & 9 \\ 2 & -1 & -16 & -17 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 5 & 14 & 16 & 5 \\ 0 & -5 & -22 & -25 & -6 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -16 & -18 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem (IV.13) besitzt daher keine Lösung, vgl. Satz IV.4.1.

Unter einem *affinen Teilraum* eines Vektorraums V verstehen wir jede Teilmenge der Form

$$E = \xi + W = \{\xi + w | w \in W\},$$

wobei W einen Teilraum von V bezeichnet und $\xi \in V$. In diesem Fall ist

$$W \xrightarrow{\cong} E, \qquad w \mapsto \xi + w,$$

eine Bijektion, aber i.A. keine lineare Abbildung. Unter der Dimension des affinen Teilraums E verstehen wir die Dimension des (dazu parallelen) Teilraums W. Ist

$b_1, \dots, b_k$ eine Basis von W, dann ist

$$\phi\colon \mathbb{K}^k \xrightarrow{\cong} E, \qquad \phi(s) = \xi + s_1 b_1 + \cdots + s_k b_k,$$

eine Bijektion, d.h. eine Parametrisierung von E, aber i.A. nicht linear. Sei $m = \dim(V)$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-k}$ ein Gleichungssystem für W, d.h. $W = \bigcap_{i=1}^{m-k} \ker(\alpha_i)$. Dann stimmt E also mit der Lösungsmenge des folgenden inhomogenen Systems überein:

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1(v) & = & \alpha_1(\xi) \\ & \vdots & \\ \alpha_{m-k}(v) & = & \alpha_{m-k}(\xi) \end{array}$$

Jeder affine Teilräume $E \subseteq V$ kann daher durch $\dim(V) - \dim(E)$ inhomogenen lineare Gleichungen beschrieben werden. Umgekehrt ist die Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems stets ein affiner Teilraum, oder leer, siehe Satz IV.4.1. Soll ein Gleichungssystem für einen affinen Teilraum $E = \xi + W$ gefunden werden, so ist es zweckmäßig zunächst ein homogenes Gleichungssystem für den Teilraum W zu bestimmen, die Konstanten auf der rechten Seite lassen sich dann durch Einsetzen des Punktes ξ ermitteln.

IV.4.4. Beispiel. Wir wollen die Dimension sowie ein minimales Gleichungssystem des affinen Teilraums

$$E = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

bestimmen. Mittels Spaltenumformungen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 4 \\ 1 & 6 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

es gilt daher $\dim(E) = 2$. Daraus lesen wir zunächst ein minimales Gleichungssystems für den zu E parallelen Teilraum ab, siehe Satz IV.3.12(e):

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = & 0 \\ -x_1 & -3x_2 & & +x_4 & = & 0 \end{array}$$

Einsetzen des Punktes liefert dann folgendes minimale Gleichungssystem für E:

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & & = & -2 \\ -x_1 & -3x_2 & & +x_4 & = & -1 \end{array}$$

IV.5. Matrizeninversion. Wir wollen in diesem Abschnitt einen effizienten Algorithmus zur Berechnung der Inversen einer Matrix besprechen. Wir beginnen mit folgender Charakterisierungen der Invertierbarkeit einer Matrix, die wir sofort durch Kombination der Korollare IV.3.4 und IV.3.5 erhalten:

IV.5.1. Korollar (Invertierbare Matrizen). *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für eine quadratische Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) Die Matrix A ist invertierbar.

(b) Die lineare Abbildung $\psi\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$*,* $\psi(x) = Ax$*, ist ein Isomorphismus.*
(c) Das Gl.system $Ax = y$ *hat für jedes* $y \in \mathbb{K}^n$ *genau eine Lösung* $x \in \mathbb{K}^n$*.*
(d) Die Spalten von A *bilden eine Basis von* $\mathbb{K}^n$*.*
(e) Die Zeilen von A *bilden eine Basis von* $M_{1\times n}(\mathbb{K}) \cong (\mathbb{K}^n)^* \cong \mathbb{K}^n$*.*
(f) Es gilt $\operatorname{rank}(A) = n$*.*

IV.5.2. Beispiel. Wir wollen verifizieren, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden. Nach Korollar IV.5.1 ist dies genau dann der Fall, wenn die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 7 \\ -4 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

Rang 4 hat. Mittels Zeilenumformungen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 6 \\ -2 & 2 & 2 & -5 \\ 2 & -2 & 2 & 7 \\ -4 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

also bilden die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4 tatsächlich eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

Wollen wir die Inverse einer Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ berechnen, dann müssen wir also jene Matrix $X \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bestimmen, für die $AX = I_n$ gilt. Dies kann als lineares Gleichungssystem mit n^2 vielen Gleichungen in den n^2 vielen Eintragungen von X verstanden werden. Allerdings zerfällt dieses Gleichungsystem in n unabhängige Systeme, eines für jede Spalte von X, mit je n Gleichungen in n Unbekannten,

$$A\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix} = e_1, \quad A\begin{pmatrix} x_{12} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix} = e_2, \quad \dots \quad A\begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} = e_n.$$

Diese Systeme lassen sich bequem gleichzeitig mit folgenden Algorithmus lösen:

IV.5.3. Satz (Algorithmus zur Bestimmung der Inversen). *Ist* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ *eine invertierbare* $(n \times n)$*-Matrix, dann kann die* $n \times (2n)$*-Matrix* $(A|I_n)$ *durch Zeilenumformungen auf die Gestalt* $(I_n|B)$ *gebracht werden und es gilt* $A^{-1} = B$*.*

Beweis. Die Matrix A kann durch Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform gebracht werden, siehe Satz IV.3.11. Wegen der Invertierbarkeit von A ist $\operatorname{rank}(A) = n$, also muss die reduzierte Zeilenstufenform mit der Einheitsmatrix I_n übereinstimmen. Nach Lemma IV.3.9 entsprechen diese Zeilenumformungen gerade einer Multiplikation von links, $A \rightsquigarrow TA$, mit einer invertierbaren Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Es gilt daher $TA = I_n$, also $T = A^{-1}$. Wenden wir die selben Zeilenumformungen auf die erweiterte Matrix $(A|I_n)$ an, erhalten wir also $(A|I_n) \rightsquigarrow T(A|I_n) = (TA|TI_n) = (I_n|T) = (I_n|A^{-1})$. $\square$

IV.5.4. Beispiel. Wir wollen die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

bestimmen. Mittels Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

Die Inverse von A ist daher

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 1/2 & 1 & -1/2 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 18 & -12 \\ 3 & 6 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

IV.5.5. Beispiel. Wir wollen die Inverse der komplexen Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+\mathbf{i} & 1-\mathbf{i} \\ 2 & 2+\mathbf{i} & 2+2\mathbf{i} \\ 0 & 1-3\mathbf{i} & -4+13\mathbf{i} \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$$

bestimmen. Mittels Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+\mathbf{i} & 1-\mathbf{i} & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2+\mathbf{i} & 2+2\mathbf{i} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-3\mathbf{i} & -4+13\mathbf{i} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+\mathbf{i} & 1-\mathbf{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} & 4\mathbf{i} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1-3\mathbf{i} & -4+13\mathbf{i} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1+\mathbf{i} & 1-\mathbf{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2\mathbf{i} & \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 1-3\mathbf{i} & -4+13\mathbf{i} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5+3\mathbf{i} & -1+2\mathbf{i} & 1-\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2\mathbf{i} & \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{i} & 6+2\mathbf{i} & -3-\mathbf{i} & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5+3\mathbf{i} & -1+2\mathbf{i} & 1-\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2\mathbf{i} & \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-6\mathbf{i} & -1+3\mathbf{i} & -\mathbf{i} \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -29+26\mathbf{i} & 15-13\mathbf{i} & -3+5\mathbf{i} \\ 0 & 1 & 0 & 8-26\mathbf{i} & -4+13\mathbf{i} & -4\mathbf{i} \\ 0 & 0 & 1 & 2-6\mathbf{i} & -1+3\mathbf{i} & -\mathbf{i} \end{array}\right)$$

Die Inverse von A ist daher:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -29+26\mathbf{i} & 15-13\mathbf{i} & -3+5\mathbf{i} \\ 8-26\mathbf{i} & -4+13\mathbf{i} & -4\mathbf{i} \\ 2-6\mathbf{i} & -1+3\mathbf{i} & -\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

IV.5.6. Beispiel. Wir wollen zeigen, dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcl} & 4x_2 & -4x_3 & 7x_4 & = & y_1 \\ & 2x_2 & -2x_3 & +2x_4 & = & y_2 \\ x_1 & +5x_2 & -6x_3 & +7x_4 & = & y_3 \\ x_1 & +3x_2 & -5x_3 & +4x_4 & = & y_4 \end{array} \tag{IV.14}$$

für jede rechte Seite $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist und diese Lösung bestimmen. Wir betrachten die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & -6 & 7 \\ 1 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R}).$$

Mittels Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 4 & -4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -6 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & -6 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & -6 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & -6 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & -6 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & -6 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & -5/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -7/2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1/2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3/2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2/3 & 5/6 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & -2/3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Die Matrix A ist daher invertierbar mit Inverser

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3/2 & 2 & -1 \\ -2/3 & 5/6 & 1 & -1 \\ -1/3 & -1/3 & 1 & -1 \\ 1/3 & -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Das Gleichungssysteme (IV.14) ist somit eindeutig lösbar und $x = A^{-1}y$ die gesuchte Lösung, d.h.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3/2 & 2 & -1 \\ -2/3 & 5/6 & 1 & -1 \\ -1/3 & -1/3 & 1 & -1 \\ 1/3 & -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 - \frac{3}{2}y_2 + 2y_3 - y_4 \\ -\frac{2}{3}y_1 + \frac{5}{6}y_2 + y_3 - y_4 \\ -\frac{1}{3}y_1 - \frac{1}{3}y_2 + y_3 - y_4 \\ \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 \end{pmatrix}.$$

IV.5.7. Beispiel. Es soll die Inverse folgender Matrix über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ bestimmt werden:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{5\times 5}(\mathbb{Z}_2)$$

Mittels Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 1&0&1&1&0&0&0&1&0&0 \\ 0&1&1&1&0&0&0&0&1&0 \\ 1&0&0&1&1&0&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&1&1&1&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&1&1&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&1&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&1&1&0&1&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0&1&1&0&1&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&1&0&1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1&1&1&1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&1&1&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1&1&1&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&1&1&1&0&1&0 \\ 0&1&0&0&1&1&1&1&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1&1&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1&1&1&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1&0&0&0&0&1&0&1&0&1 \\ 0&1&0&0&0&1&0&0&1&1 \\ 0&0&1&0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&1&1&0&1&1 \\ 0&0&0&0&1&0&1&1&1&1 \end{array}\right)$$

die Inverse von A ist daher:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

IV.5.8. Bemerkung. Analog zur Formel für die Inverse einer (2×2)-Matrix, siehe Beispiel II.4.8, gibt es auch eine explizite Formel für die Inversion von

$(n \times n)$-Matrizen. Für (3×3)-Matrizen sieht diese wie folgt aus:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \left|\begin{smallmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right| & -\left|\begin{smallmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{smallmatrix}\right| & \left|\begin{smallmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{smallmatrix}\right| \\ -\left|\begin{smallmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right| & \left|\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{smallmatrix}\right| & -\left|\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{smallmatrix}\right| \\ \left|\begin{smallmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{smallmatrix}\right| & -\left|\begin{smallmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{smallmatrix}\right| & \left|\begin{smallmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{smallmatrix}\right| \end{pmatrix}^{t} \tag{IV.15}$$

wobei $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right| = ad - bc$ und

$$D := a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}.$$

Dabei ist A genau dann invertierbar wenn $D \neq 0$, d.h. genau dann wenn die rechte Seite in Gleichung (IV.15) Sinn macht. Die analogen Formeln für größere n sind noch komplexer und erfordern mehr Rechenaufwand als der oben beschriebene Algorithmus mit Zeilenumformungen.

IV.6. Basisdarstellung. Wir haben in Abschnitt II.4 lineare Abbildungen $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ durch Matrizen beschrieben. Wollen wir lineare Abbildugen zwischen allgemeinen endlich-dimensionalen Vektorräumen, $\varphi\colon V \to W$, durch Matrizen darstellen, ist es notwendig geordnete Basen B und C der beiden Vektorräume V und W zu fixieren. Damit kann jeder lineare Abbildung φ eine Matrix $[\varphi]_{CB}$ zugeordnet werden, und wieder entspricht die Matrizenmultiplikation der Komposition von Abbildungen, siehe Satz IV.6.15 unten. Diese Matrix $[\varphi]_{CB}$ hängt von der Wahl der Basen B und C ab. Gehen wir zu anderen Basen, über transformiert sich die Matrixdarstellung mit sogenannten Basiswechselmatrizen, siehe Korollar IV.6.21 unten. In diesem Zusammenhang ist es auch zweckmäßig die zu einer Basis von V duale Basis von V^* zu betrachten, und damit wollen wir diesen Abschnitt beginnen.

Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\dim(V) = n$, und $b_1, \dots, b_n$ eine geordnete Basis von V. Nach Proposition IV.1.2(d) existiert zu jedem $i \in \{1, \dots, n\}$ ein eindeutig bestimmtes lineares Funktional $b_i^*\colon V \to \mathbb{K}$, sodass

$$b_i^*(b_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j, \text{ und} \\ 0 & \text{falls } i \neq j. \end{cases} \tag{IV.16}$$

Wir erhalten somit Elemente $b_1^*, \dots, b_n^* \in V^*$.

IV.6.1. Lemma. *In dieser Situation ist $b_1^*, \dots, b_n^*$ eine Basis von V^*.*

Beweis. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, sodass

$$\lambda_1 b_1^* + \cdots + \lambda_n b_n^* = 0.$$

Auswerten bei b_j liefert unter Verwendung von (IV.16)

$$0 = \big(\lambda_1 b_1^* + \cdots + \lambda_n b_n^*\big)(b_j) = \lambda_1 b_1^*(b_j) + \cdots + \lambda_n b_n^*(b_j) = \lambda_j,$$

für jedes $j = 1, \dots, n$. Dies zeigt, dass die Vektoren $b_1^*, \dots, b_n^*$ linear unabhängig in V^* sind. Nach Korollar IV.1.17 müssen diese Vektoren eine Basis von V^* bilden, denn es gilt $\dim(V^*) = \dim(V) = n$, siehe Korollar IV.2.15. □

IV.6.2. Definition (Duale Basis). Ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, $\dim(V) = n$, und $b_1, \dots, b_n$ eine geordnete Basis von V, dann werden die durch (IV.16) eindeutig bestimmten Funktionale $b_1^*, \dots, b_n^*$ als die zu $b_1, \dots, b_n$ *duale Basis* von V^* bezeichnet, vgl. Lemma IV.6.1.

IV.6.3. Bemerkung. Sei $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ und $B := (b_1|\cdots|b_n)$ die Matrix mit Spaltenvektoren b_i. Weiters bezeichnen $a_1, \dots, a_n$ die Zeilen der Inversen Matrix B^{-1}. Fassen wir $a_i \in M_{1\times n}(\mathbb{K})$ als Element von $(\mathbb{K}^n)^*$ auf, $M_{1\times n}(\mathbb{K}) \cong L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}) = (\mathbb{K}^n)^*$, dann ist $a_1, \dots, a_n$ die zu $b_1, \dots, b_n$ duale Basis, genauer $b_i^* = \psi_{a_i}$, d.h. $b_i^* \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$, $b_i^*(x) = a_i x$, $x \in \mathbb{K}^n$, denn die Relation $B^{-1}B = I_n$ ist offensichtlich zu den Bedingungen (IV.16) äquivalent. Die duale Basis einer Basis von $\mathbb{K}^n$ lässt sich daher durch Matrizeninversion berechnen.

IV.6.4. Beispiel. Es soll die zur Basis $b_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$, $b_2 = \left(\begin{smallmatrix}3\\7\end{smallmatrix}\right)$ von $\mathbb{K}^2$ duale Basis von $(\mathbb{K}^2)^*$ bestimmt werden. Für die Inverse der Matrix $B = \left(\begin{smallmatrix}1&3\\2&7\end{smallmatrix}\right)$ gilt $B^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}7&-3\\-2&1\end{smallmatrix}\right)$. Für die duale Basis erhalten wir also $b_1^* = \psi_{(7,-3)}$ und $b_2^* = \psi_{(-2,1)}$. Expliziter, $b_1^* \colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$, $b_1^*\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = (7,-3)\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = 7x - 3y$, und $b_2^* \colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$, $b_2^*\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = (-2,1)\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = -2x + y$.

IV.6.5. Beispiel. Wir wollen die zur Basis $b_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right)$, $b_2 = \left(\begin{smallmatrix}-1\\-1\\-2\end{smallmatrix}\right)$, $b_3 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\2\end{smallmatrix}\right)$ von $\mathbb{K}^3$ duale Basis von $(\mathbb{K}^3)^*$ bestimmen. Zeilenumformungen liefern:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\2&-1&0&0&1&0\\3&-2&2&0&0&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&1&-1&-3&0&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&1&1&0&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-1&1&0\\0&1&-2&-2&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-2&0&1\\0&1&0&-4&-1&2\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

Daraus schließen wir

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-1&0\\3&-2&2\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-2&0&1\\-4&-1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix},$$

für die duale Basis gilt daher $b_1^* = \psi_{(-2,0,1)}$, $b_2^* = \psi_{(-4,-1,2)}$, $b_3^* = \psi_{(-1,-1,1)}$, genauer $b_1^*\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = -2x + z$, $b_2^*\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = -4x - y + 2z$ und $b_3^*\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = -x - y + z$.

IV.6.6. Beispiel (Duale Basis der Standardbasis). Die zur Standardbasis $e_1, \dots, e_n$ von $\mathbb{K}^n$ duale Basis $e_1^*, \dots, e_n^*$ von $(\mathbb{K}^n)^*$ wird durch die $(1\times n)$-Matrizen $e_1^t, \dots, e_n^t$ repräsentiert, genauer $e_i^* = \psi_{e_i^t}$, d.h. $e_i^* \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ ist gerade die Projektion auf die i-te Koordinate, $e_i^*(x) = x_i$, $x \in \mathbb{K}^n$.

IV.6.7. Lemma. *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V, $b_1^*, \dots, b_n^*$ die dazu duale Basis von V^* und $b_1^{**}, \dots, b_n^{**}$ die zu letzterer duale Basis von V^{**}. Dann gilt*

$$b_i^{**} = \iota(b_i), \qquad 1 \le i \le n,$$

wobei $\iota \colon V \to V^{**}$ die natürliche Abbildung aus Proposition III.4.13 bezeichnet. In anderen Worten: $b_i^{**}(\alpha) = \alpha(b_i)$, für alle $\alpha \in V^*$.

Beweis. Für $1 \leq i, j \leq n$ gilt nach (IV.16)

$$\iota(b_i)(b_j^*) = b_j^*(b_i) = \delta_{ji} = \delta_{ij} = b_i^{**}(b_j^*).$$

Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition IV.1.2(d) folgt daher $\iota(b_i) = b_i^{**}$, denn diese beiden Funktionale $V^* \to \mathbb{K}$ stimmen auf der Basis $b_1^*, \dots, b_n^*$ von V^* überein. $\square$

IV.6.8. Bemerkung. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Basis $b_1, \dots, b_n$. Bezeichnet $b_1^*, \dots, b_n^*$ die dazu duale Basis von V^*, dann existiert genau eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V^*$ mit $\varphi(b_i) = b_i^*$, $i = 1, \dots, n$, und diese Abbildung ist ein Isomorphismus. Bezeichnet $b_1^{**}, \dots, b_n^{**}$ die zu $b_1^*, \dots, b_n^*$ duale Basis von V^{**}, dann existiert analog ein Isomorphismus $\psi\colon V^* \to V^{**}$ mit $\psi(b_i^*) = b_i^{**}$, $i = 1, \dots, n$. Obwohl φ und ψ beide von der ursprünglichen Basis abhängen, ist deren Komposition unabhängig von dieser Basis, denn nach Lemma IV.6.7 gilt $\psi \circ \varphi = \iota\colon V \to V^{**}$.

IV.6.9. Proposition. *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Jede Basis von V^* ist die duale Basis einer Basis von V.*

Beweis. Sei also $\beta_1, \dots, \beta_n$ eine Basis von V^*, wobei $n = \dim(V^*)$. Weiters bezeichne $\beta_1^*, \dots, \beta_n^*$ die dazu duale Basis von V^{**}. Nach Korollar IV.2.15 ist $\iota\colon V \to V^{**}$ ein Isomorphismus. Setzen wir $b_j := \iota^{-1}(\beta_j^*)$, $1 \leq j \leq n$, dann bildet also $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V, siehe Proposition IV.1.3. Bezeichnet $b_1^*, \dots, b_n^*$ die dazu dual Basis von V^*, dann gilt für alle $1 \leq i, j \leq n$,

$$\beta_i(b_j) = \iota(b_j)(\beta_i) = \beta_j^*(\beta_i) = \delta_{ji} = \delta_{ij} = b_i^*(b_j),$$

also stimmen die Funktionale β_i und b_i^* auf einer Basis von V überein. Aus der Eindeutigkeitsaussage in Proposition IV.1.2(d) folgt daher $\beta_i = b_i^*$. Dies zeigt, dass $\beta_1, \dots, \beta_n$ die zu $b_1, \dots, b_n$ duale Basis ist. $\square$

Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine geordnete Basis von V. Nach Proposition IV.1.2 ist

$$\phi_B\colon \mathbb{K}^n \xrightarrow{\cong} V, \quad \phi_B(x) := x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n,$$

ein linearer Isomorphismus. Zu jedem $v \in V$ existieren daher eindeutig bestimmte Skalare $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, sodass $v = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$. Der Vektor

$$[v]_B := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

wird als *Koordinatenvektor von v bezüglich der Basis B* bezeichnet. Nach Konstruktion ist $V \to \mathbb{K}^n$, $v \mapsto [v]_B$, gerade die Umkehrabbildung von ϕ_B, für jedes $v \in V$ gilt daher

$$v = \phi_B([v]_B) = ([v]_B)_1 b_1 + \cdots + ([v]_B)_n b_n, \tag{IV.17}$$

und auch $[\phi_B(x)]_B = x$ für alle $x \in \mathbb{K}^n$. Für die Basisvektoren erhalten wir

$$[b_i]_B = e_i, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Aus der Linearität der Umkehrabbildung folgt weiters

$$[v_1 + v_2]_B = [v_1]_B + [v_2]_B \quad \text{und} \quad [\lambda v]_B = \lambda [v]_B \tag{IV.18}$$

für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Die Komponenten von $[v]_B$ können auch mit Hilfe der zu B dualen Basis $B^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ beschrieben werden, für die i-te Komponente gilt

$$([v]_B)_i = b_i^*(v), \qquad 1 \leq i \leq n, \tag{IV.19}$$

denn $b_i^*(v) = b_i^*\big(x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n\big) = x_1 b_i^*(b_1) + \cdots + x_n b_i^*(b_n) = x_i = ([v]_B)_i$.

IV.6.10. Bemerkung. Ist etwa $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ und sollen die Koordinaten eines Vektors $v \in \mathbb{K}^n$ bezüglich B bestimmt werden, so muss das Gleichungssystem

$$x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n = v$$

gelöst werden, die Koordinaten von v bezüglich B sind dann

$$[v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Werden die Koordinaten von vielen verschiedenen Vektoren benötigt, dann ist es zweckmäßig zunächst die duale Basis B^* zu bestimmen, wir erhalten die Koordinaten eines beliebigen Vektors v dann sofort aus (IV.19),

$$[v]_B = \begin{pmatrix} b_1^*(v) \\ \vdots \\ b_n^*(v) \end{pmatrix} = (b_1 | \cdots | b_n)^{-1} v,$$

vgl. Bemerkung IV.6.3.

IV.6.11. Beispiel. Betrachte die Basis $B = (b_1, b_2)$ von $\mathbb{K}^2$, wobei $b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $b_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$. Es sollen die Koordinaten des Vektors $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ bezüglich B bestimmt werden. In Beispiel IV.6.4 haben wir die zu B duale Basis berechnet, $b_1^* = \psi_{(7,-3)}$ und $b_2^* = \psi_{(-2,1)}$. Mit (IV.19) folgt $[v]_B = \left(\begin{smallmatrix} b_1^*(v) \\ b_2^*(v) \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 9 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$. Die Entwicklung des Vektors v in der Basis B ist daher $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) = 9b_1 - 2b_2 = 9\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) - 2\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$.

IV.6.12. Beispiel. Betrachte die Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ von $\mathbb{K}^3$, wobei

$$b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \quad b_2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{und} \quad b_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right).$$

Es sollen die Koordinaten des Vektors $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3$ bezüglich der Basis B bestimmt werden. In Beispiel IV.6.5 haben wir die zu B duale Basis bestimmt,

$b_1^* = \psi_{(-2,0,1)}$, $b_2^* = \psi_{(-4,-1,2)}$ und $b_3^* = \psi_{(-1,-1,1)}$. Mit (IV.19) folgt

$$[v]_B = \begin{pmatrix} b_1^*(v) \\ b_2^*(v) \\ b_3^*(v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix}$$

die Entwicklung des Vektors v in der Basis B ist daher

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -5b_1 - 12b_2 - 4b_3 = -5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 12\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

IV.6.13. Beispiel. Für die Koordinaten eines Vektors $x \in \mathbb{K}^n$ bezüglich der Standardbasis $E = (e_1, \dots, e_n)$ von $\mathbb{K}^n$ gilt offensichtlich

$$[x]_E = x.$$

Nach Satz II.4.4 kann jedes lineare Funktional $\alpha \in (\mathbb{K}^n)^*$ durch einen Zeilenvektor $a = (a_1, \dots, a_n) \in M_{1\times n}(\mathbb{K})$ beschrieben werden, $\alpha = \psi_a$, d.h. $\alpha(x) = ax$, $x \in \mathbb{K}^n$. Bezeichnet E^* die zur Standardbasis duale Basis von $(\mathbb{K}^n)^*$, dann gilt

$$[\alpha]_{E^*} = a^t,$$

denn $\alpha = a_1e_1^* + \cdots + a_ne_n^*$, da ja beide Seiten auf den Basisvektoren e_i übereinstimmen, $\alpha(e_i) = \psi_a(e_i) = ae_i = a_i = (a_1e_1^* + \cdots + a_ne_n^*)(e_i)$.

IV.6.14. Beispiel. Betrachte die Basis $B = (1, z, z^2)$ des Vektoraums $\mathbb{K}[z]_{\leq 2}$. Der Koordinatenvektor eines Polynoms $p = p_0 + p_1z + p_2z^2 \in \mathbb{K}[z]_{\leq 2}$ bezüglich B ist dann

$$[p]_B = [p_0 + p_1z + p_2z^2]_B = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3.$$

Der i-te Vektor der dualen Basis ist jenes lineare Funktional $\mathbb{K}[z]_{\leq 2} \to \mathbb{K}$, das einem Polynom seinen i-ten Koeffizienten zuordnet.

Sei nun $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Weiters seien $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, \dots, c_m)$ geordnete Basen von V und W. Nach Satz II.4.4 ist die Komposition $\phi_C^{-1} \circ \varphi \circ \phi_B\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ durch Multiplikation mit einer eindeutig bestimmen $(m \times n)$-Matrix gegeben. Diese Matrix wird mit $[\varphi]_{CB} \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ bezeichnet und die *Matrix der linearen Abbildung φ bezüglich der Basen B und C* genannt. Die Definition lässt sich übersichtlich in folgendem kommutativen Diagramm veranschaulichen:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "\phi_B", "\cong"'] \arrow[d, "{[\varphi]_{CB}}"'] & V \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{K}^m & W \arrow[l, "\phi_C^{-1}"', "\cong"] \end{tikzcd} \qquad \text{d.h.} \quad (\phi_C^{-1} \circ \varphi \circ \phi_B)(x) = [\varphi]_{CB}\, x, \quad x \in \mathbb{K}^n. \qquad \text{(IV.20)}$$

Da $[\varphi]_{CB}\, e_j$ mit der j-ten Spalte von $[\varphi]_{CB}$ übereinstimmt, ist letztere also durch $(\phi_C^{-1} \circ \varphi \circ \phi_B)(e_j) = \phi_C^{-1}(\varphi(\phi_B(e_j))) = \phi_C^{-1}(\varphi(b_j)) = [\varphi(b_j)]_C$ gegeben. In anderen Worten, wir erhalten den j-ten Spaltenvektor von $[\varphi]_{CB}$ aus den Koordinaten bezüglich der Basis C des Bildes des j-ten Basisvektors von B, d.h. die Eintragungen in der j-ten Spalten sind gerade die Koordinaten von $\varphi(b_j)$ bezüglich C. Für die Eintragung in der i-ten Zeile der j-ten Spalte erhalten wir aus (IV.19)

$$([\varphi]_{CB})_{ij} = ([\varphi(b_j)]_C)_i = c_i^*(\varphi(b_j)), \qquad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{IV.21}$$

wobei $C^* = (c_1^*, \dots, c_m^*)$ die zu C duale Basis von W^* bezeichnet.

IV.6.15. Satz (Matrixdarstellung linearer Abbildungen). *Seien V, W und U drei endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$. Weiters seien B, C und D geordnete Basen von V, W und U. Für jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ und jedes $v \in V$ gilt dann*

$$[\varphi(v)]_C = [\varphi]_{CB}[v]_B, \tag{IV.22}$$

die Koordinaten des Bildes $\varphi(v)$ können daher durch Multiplikation mit der Matrix $[\varphi]_{CB}$ aus den Koordinaten von v berechnet werden. Die Zuordnung

$$L(V, W) \cong M_{m\times n}(\mathbb{K}), \quad \varphi \leftrightarrow [\varphi]_{CB}, \tag{IV.23}$$

ist ein linearer Isomorphismus, wobei $n = \dim(V)$ und $m = \dim(W)$. Für beliebige $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in L(V, W)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt daher

$$[\varphi_1 + \varphi_2]_{CB} = [\varphi_1]_{CB} + [\varphi_2]_{CB} \quad \textit{und} \quad [\lambda\varphi]_{CB} = \lambda[\varphi]_{CB}.$$

Für jede weitere lineare Abbildung $\psi\colon W \to U$ haben wir

$$[\psi \circ \varphi]_{DB} = [\psi]_{DC}[\varphi]_{CB} \quad \textit{sowie} \quad [\mathrm{id}_V]_{BB} = I_n. \tag{IV.24}$$

Die lineare Abbildung φ ist genau dann invertierbar, wenn die Matrix $[\varphi]_{BC}$ invertierbar ist, in diesem Fall gilt

$$[\varphi^{-1}]_{BC} = [\varphi]_{CB}^{-1}. \tag{IV.25}$$

Für jede lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$ gilt weiters

$$\operatorname{rank}(\varphi) = \operatorname{rank}\bigl([\varphi]_{CB}\bigr). \tag{IV.26}$$

Bezeichnen B^* und C^* die zu B bzw. C dualen Basen von V^* und W^*, dann gilt für die Matrix der dualen Abbildung $\varphi^t\colon W^* \to V^*$

$$[\varphi^t]_{B^*C^*} = [\varphi]_{CB}^t. \tag{IV.27}$$

Beweis. Aus (IV.20) erhalten wir mit $x = [v]_B$ sofort

$$[\varphi]_{CB}[v]_B = \phi_C^{-1}(\varphi(\phi_B([v]_B)) = \phi_C^{-1}(\varphi(v)) = [\varphi(v)]_C,$$

also (IV.22). Beachte, dass

$$L(V, W) \cong L(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), \qquad \varphi \leftrightarrow \phi_C^{-1} \circ \varphi \circ \phi_B,$$

ein linearer Isomorphismus mit Umkehrabbildung $\phi_C \circ \sigma \circ \phi_B^{-1} \leftrightarrow \sigma$ ist, denn

$$\phi_C^{-1} \circ (\varphi_1 + \varphi_2) \circ \phi_B = \phi_C^{-1} \circ \varphi_1 \circ \phi_B + \phi_C^{-1} \circ \varphi_2 \circ \phi_B$$

und $\phi_C^{-1}\circ(\lambda\varphi)\circ\phi_B=\lambda(\phi_C^{-1}\circ\varphi\circ\phi_B)$ für alle $\varphi,\varphi_1,\varphi_2\in L(V,W)$ und $\lambda\in\mathbb{K}$, siehe Proposition II.3.18. Zusammen mit Satz II.4.4 folgt, dass (IV.23) einen linearen Isomorphismus bildet. Aus

$$\phi_D^{-1}\circ(\psi\circ\varphi)\circ\phi_B=\big(\phi_D^{-1}\circ\psi\circ\phi_C\big)\circ\big(\phi_C^{-1}\circ\varphi\circ\phi\big),\qquad \phi_B^{-1}\circ\mathrm{id}_V\circ\phi_B=\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n},$$

und Satz II.4.4 erhalten wir nun auch (IV.24). Beachte, dass φ genau dann invertierbar ist, wenn $\phi_C^{-1}\circ\varphi\circ\phi_B$ invertierbar ist, und dass in diesem Fall

$$\phi_B^{-1}\circ\varphi^{-1}\circ\phi_C=\big(\phi_C^{-1}\circ\varphi\circ\phi_B\big)^{-1}$$

gilt. Zusammen mit Satz II.4.4 sehen wir daher, dass φ genau dann invertierbar ist, wenn $[\varphi]_{CB}$ invertierbar ist, und dass in diesem Fall (IV.25) gilt.

Nach Definition des Rangs einer Matrix gilt $\operatorname{rank}([\varphi]_{CB})=\operatorname{rank}(\phi_C^{-1}\circ\varphi\circ\phi_B)$, die Gleichung (IV.26) folgt daher aus Proposition IV.2.23.

Seien nun $B^*=(b_1^*,\dots,b_n^*)$ und $C^*=(c_1^*,\dots,c_m^*)$ die zu $B=(b_1,\dots,b_n)$ bzw. $C=(c_1,\dots,c_m)$ dualen Basen von V^* und W^*. Mit (IV.21) erhalten wir

$$\begin{aligned}\big([\varphi^t]_{B^*C^*}\big)_{ij}=b_i^{**}(\varphi^t(c_j^*))=b_i^{**}(c_j^*\circ\varphi)=\iota_V(b_i)(c_j^*\circ\varphi)&\\=(c_j^*\circ\varphi)(b_i)=c_j^*(\varphi(b_i))=([\varphi]_{CB})_{ji}=([\varphi]_{CB}^t)_{ij},&\end{aligned}$$

wobei $B^{**}=(b_1^{**},\dots,b_n^{**})$ die zu B^* duale Basis von V^{**} bezeichnet, für die ja $\iota_V(b_i)=b_i^{**}$ gilt, siehe Lemma IV.6.7. Dies zeigt (IV.27). □

IV.6.16. Bemerkung. Bezeichnen $B=(e_1,\dots,e_n)$ und $C=(e_1,\dots,e_m)$ die Standardbasen von $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$, dann stimmt der Isomorphismus aus Satz IV.6.15, $L(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m)\cong M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $\varphi\leftrightarrow[\varphi]_{CB}$, mit dem in Satz II.4.4 besprochenen Isomorphismus überein. In diesem Fall gilt nämlich $\phi_B=\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$ und $\phi_C=\mathrm{id}_{\mathbb{K}^m}$. Die Matrix einer linearen Abbildung $\varphi\colon\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$ bezüglich der Standardbasen von $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ stimmt also mit der in Satz II.4.4 besprochenen Matrix überein.

IV.6.17. Bemerkung. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$, $\dim(V)=n$, und B eine geordnete Basis von V. Dann ist die Zuordnung

$$\operatorname{end}(V)\cong M_{n\times n}(\mathbb{K}),\qquad \varphi\leftrightarrow[\varphi]_{BB}$$

ein Isomorphismus von $\mathbb{K}$-Algebren, der sich zu einem Gruppenisomorphismus

$$\mathrm{GL}(V)\cong\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\qquad \varphi\leftrightarrow[\varphi]_{BB}$$

einschränkt. Dies folgt sofort aus Satz IV.6.15.

IV.6.18. Beispiel. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\pi\colon V\to V$ ein Projektor. Sei $b_1,\dots,b_k$ eine Basis von $\operatorname{img}(\pi)$ und $b_{k+1},\dots,b_n$ eine Basis von

$\ker(\pi)$. Da $V = \operatorname{img}(\pi) \oplus \ker(\pi)$ ist $B := (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von V und

$$[\pi]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad [\pi']_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\pi' = \mathrm{id}_V - \pi$ den komplementären Projektor auf $\ker(\pi)$ längs $\operatorname{img}(\pi)$ bezeichnet. Für die Spiegelung $\sigma = \pi - \pi'$ an $\operatorname{img}(\pi)$ längs $\ker(\pi)$ und die dazu komplementäre Spiegelung $\sigma' = -\sigma = \pi' - \pi$ an $\ker(\pi)$ längs $\operatorname{img}(\pi)$ haben wir

$$[\sigma]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}, \quad [\sigma']_{BB} = \begin{pmatrix} -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

IV.6.19. Beispiel. Wir betrachten den reellen Vektorraum der glatten Funktionen, $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Die Ableitung definiert eine lineare Abbildung

$$C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to (\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f \mapsto f',$$

denn $(f+g)' = f' + g'$ und $(\lambda f)' = \lambda f'$, für alle $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Nach Beispiel III.2.22 sind die beiden Funktionen $\sin, \cos \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ linear unabhängig, spannen also einen 2-dimensionalen Teilraum $W := \langle \sin, \cos \rangle \subseteq C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ auf. Da $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$, schränkt sich die Ableitung zu einer linearen Abbildung $D\colon W \to W$, $D(f) := f'$, ein. Für die Matrix von D bezüglich der geordneten Basis $B = (\sin, \cos)$ von W erhalten wir

$$[D]_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit (IV.24) folgt daraus etwa

$$[D \circ D]_{BB} = [D]_{BB}[D]_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

was genau $(D \circ D)(\sin) = \sin'' = -\sin$ und $(D \circ D)(\cos) = \cos'' = -\cos$ entspricht.

IV.6.20. Beispiel. Betrachte den $(n+1)$-dimensionalen Vektorraum $V = \mathbb{R}[z]_{\leq n}$ mit geordneter Basis $B = (1, z, z^2, z^3, \dots, z^n)$, siehe Beispiel III.3.10. Die Ableitung definiert eine lineare Abbildung $D\colon W \to W$, $D(p) := p'$, denn es gilt $(p+q)' = p' + q'$ und $(\lambda p)' = \lambda p'$, für alle $p, q \in \mathbb{R}[z]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Da $D(z^k) = kz^{k-1}$, ist die Matrix von D bezüglich der Basis B durch

$$[D]_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R}).$$

gegeben. Sezten wir $n = 3$ und betrachten die lineare Abbildung

$$P\colon \mathbb{R}[z]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[z]_{\leq 3}, \qquad P(p) := 4p + 3p' + 2p'' = (4\,\mathrm{id} + 3D + 2D^2)(p),$$

dann erhalten wir mit den Rechenreglen aus Satz IV.6.15 sofort

$$\begin{aligned}[P]_{BB} &= 4I_n + 3[D]_{BB} + 2([D]_{BB})^2 \\ &= 4\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&3 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&3 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 4&3&4&0 \\ 0&4&6&12 \\ 0&0&4&9 \\ 0&0&0&4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Da diese Matrix invertierbar ist, gibt es also zu jedem Polynom $q \in \mathbb{R}[z]_{\leq 3}$ genau ein Polynom $p \in \mathbb{R}[z]_{\leq 3}$ für das $4p + 3p' + 2p'' = q$ gilt. Durch Inversion der Matrix $[P]_{BB}$ ließe sich dieses Polynom p auch sofort berechnen.

Seien nun $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $\tilde{B} = (\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n)$ zwei geordnete Basen von V. Unter der *Matrix zum Basiswechsel von B nach $\tilde{B}$* verstehen wir die Matrix

$$T_{\tilde{B}B} := [\mathrm{id}_V]_{\tilde{B}B} \in M_{n\times n}(\mathbb{K}).$$

Nach Definition stimmt der j-te Spaltenvektor von $T_{\tilde{B}B}$ mit $[b_j]_{\tilde{B}}$ überein. Für den Eintrag in der i-ten Zeile der j-ten Spalte gilt daher

$$(T_{\tilde{B}B})_{ij} = ([b_j]_{\tilde{B}})_i = \tilde{b}_i^*(b_j), \qquad 1 \leq i, j \leq n,$$

wobei $\tilde{B}^* = (\tilde{b}_1^*, \dots, \tilde{b}_n^*)$ die zu $\tilde{B}$ duale Basis bezeichnet.

IV.6.21. Korollar (Basiswechsel). *Seien V und W zwei endlich-dimensionale Vektorräume über $\mathbb{K}$. Weiters seien B und $\tilde{B}$ zwei geordnete Basen von V und C und $\tilde{C}$ zwei geordnete Basen von W. Die Basiswechselmatrizen sind stets invertierbar mit Inverser*

$$T_{\tilde{B}B}^{-1} = T_{B\tilde{B}} \tag{IV.28}$$

Für jedes $v \in V$ gilt

$$[v]_{\tilde{B}} = T_{\tilde{B}B}[v]_B, \tag{IV.29}$$

wir erhalten also die Koordinaten von v bezüglich der Basis $\tilde{B}$ durch Multiplikation mit der Matrix $T_{\tilde{B}B}$ aus den Koordinaten bezüglich B. Für jede Abbildung $\varphi\colon V \to W$ gilt

$$[\varphi]_{\tilde{C}\tilde{B}} = T_{\tilde{C}C}[\varphi]_{CB}T_{B\tilde{B}}. \tag{IV.30}$$

Für die Basiswechselmatrix der dualen Basen gilt

$$T_{B^*\tilde{B}^*} = T^t_{\tilde{B}B}. \tag{IV.31}$$

Beweis. Da die identische Abbildung id_V offensichtlich invertierbar ist, muss auch $T_{\tilde{B}B} = [\mathrm{id}_V]_{\tilde{B}B}$ invertierbar sein und mit (IV.25) erhalten wir

$$T^{-1}_{\tilde{B}B} = [\mathrm{id}_V]^{-1}_{\tilde{B}B} = [\mathrm{id}_V^{-1}]_{B\tilde{B}} = [\mathrm{id}_V]_{B\tilde{B}} = T_{B\tilde{B}},$$

also (IV.28). Gleichung (IV.29) folgt aus (IV.22), denn

$$[v]_{\tilde{B}} = [\mathrm{id}_V(v)]_{\tilde{B}} = [\mathrm{id}_V]_{\tilde{B}B}[v]_B = T_{\tilde{B}B}[v]_B.$$

Aus (IV.24) folgt

$$[\varphi]_{\tilde{C}\tilde{B}} = [\mathrm{id}_W \circ \varphi \circ \mathrm{id}_V]_{\tilde{B}\tilde{C}} = [\mathrm{id}_W]_{\tilde{C}C}[\varphi]_{CB}[\mathrm{id}_V]_{B\tilde{B}} = T_{\tilde{C}C}[\varphi]_{CB}T_{B\tilde{B}},$$

also (IV.30). Schließlich erhalten wir aus (IV.27) auch

$$T_{B^*\tilde{B}^*} = [\mathrm{id}_{V^*}]_{B^*\tilde{B}^*} = [\mathrm{id}_V^*]_{B^*\tilde{B}^*} = [\mathrm{id}_V]^t_{\tilde{B}B},$$

womit auch (IV.31) gezeigt wäre. □

IV.6.22. Bemerkung. Sei $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ und bezeichne $E = (e_1, \dots, e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$. Dann gilt offenbar

$$T_{EB} = (b_1|\cdots|b_n),$$

und mit Korollar IV.6.21 erhalten wir erneut, vgl. Bemerkung IV.6.10,

$$[x]_B = T_{BE}[x]_E = T^{-1}_{EB}x = (b_1|\cdots|b_n)^{-1}x$$

für jedes $x \in \mathbb{K}^n$, denn $[x]_E = x$. Für die duale Basis gilt $[b_i^*]_{B^*} = e_i$, also

$$([b_j^*]_{E^*})^t = \big(T_{E^*B^*}[b_j^*]_{B^*}\big)^t = \big(T^t_{BE}e_i\big)^t = e_i^t T_{BE} = e_i^t(b_1|\cdots|b_n)^{-1},$$

d.h. die Matrix die dem linearen Funktional $b_i^* \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ entspricht, $b_i^* = \psi_{a_i}$, $a_i \in M_{1\times n}(\mathbb{K})$, ist gerade die i-te Zeile von $(b_1|\cdots|b_n)^{-1}$. Auch dies haben wir weiter oben schon festgehalten, vgl. Bemerkung IV.6.3. Ist $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $\varphi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\varphi(x) = Ax$, dann gilt offenbar $[\varphi]_{EE} = A$, vgl. Bemerkung IV.6.16. Ist $C = (c_1, \dots, c_n)$ eine weitere Basis von $\mathbb{K}^n$ so erhalten wir mittels Korollar IV.6.21

$$[\varphi]_{CB} = T^{-1}_{EC}[\varphi]_{EE}T_{EB} = (c_1|\cdots|c_n)^{-1}A(b_1|\cdots|b_n).$$

IV.6.23. Beispiel. Betrachte die beiden geordneten Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad E = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

von $\mathbb{R}^3$. Offensichtlich gilt dann

$$T_{EB} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

Nach (IV.28) folgt

$$T_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -9 & 5 & -2 \\ -6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies erlaubt es nun die Koordinaten eines Vektors in $\mathbb{R}^3$ bzüglich der Basis B zu bestimmen. Betrachten wir etwa $x = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 9 \\ 13 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3$, dann gilt $[x]_E = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 9 \\ 13 \end{smallmatrix}\right)$ also

$$[x]_B = T_{BE}[x]_E = \begin{pmatrix} -9 & 5 & -2 \\ -6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

d.h. $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 9 \\ 13 \end{smallmatrix}\right) = 1\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) + 2\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + 3\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$. Betrachte wir die lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -7x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ 13x_2 - 6x_3 \\ 12x_2 - 5x_1 \end{pmatrix},$$

dann gilt offenbar

$$[\varphi]_{EE} = \begin{pmatrix} -7 & 4 & -2 \\ 0 & 13 & -6 \\ 0 & 12 & -5 \end{pmatrix}.$$

Mit (IV.30) können wir nun auch die Matrix von φ bezüglich B berechnen,

$$\begin{aligned} [\varphi]_{BB} &= T_{BE}[\varphi]_{EE}T_{EB} \\ &= \begin{pmatrix} -9 & 5 & -2 \\ -6 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 4 & -2 \\ 0 & 13 & -6 \\ 0 & 12 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir verstehen dadurch die Abbildung φ besser, es handelt sich um eine Spiegelung am Teilraum $\left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$ längs des Teilraums $\left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle$.

IV.6.24. Beispiel. Wir wollen eine lineare Abbildung $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bestimmen, die die Punkte auf der Geraden $\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ unverändern lässt und auf Punkten der Gerade $\langle \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) \rangle$ durch Multiplikation mit -1 wirkt. Beachte, dass die beiden Vektoren $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden. Nach Proposition III.3.2 gibt es also eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ für die $\sigma\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $\sigma\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) = -\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$ gilt. Für ihre Matrix bezüglich der Basis $B = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right))$ gilt offenbar $[\sigma]_{BB} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Bezeichnet $E = (\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right))$ die Standardbasis dann gilt $T_{EB} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$ und daher $T_{BE} = T_{EB}^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, siehe (IV.25). Mit (IV.24) folgt

$$[\sigma]_{EE} = T_{EB}[\sigma]_{BB}T_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 & 6 \\ -20 & 11 \end{pmatrix}$$

die gesuchte Abbildung ist daher durch $\sigma\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) := \left(\begin{smallmatrix} -11x_1 + 6x_2 \\ -20x_1 + 11x_2 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben.

IV.6.25. Beispiel. Betrachte die beiden geordneten Basen

$$B = (1, z, z^2, z^3) \qquad \text{und} \qquad \tilde{B} = \big(1, z+1, (z+1)^2, (z+1)^3\big)$$

des Vektorraums $\mathbb{K}[z]_{\leq 3}$. Dann gilt

$$T_{B\tilde{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T_{\tilde{B}B} = T_{B\tilde{B}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ist etwa $p = 3 + z - 7z^2 + 9z^3$, dann folgt

$$[p]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}, \text{also} \quad [p]_{\tilde{B}} = T_{\tilde{B}B}[p]_B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 42 \\ -34 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Gleichung bedeutet gerade $p = -14+42(z+1)-34(z+1)^2+9(z+1)^3$.

Wir beenden diesen Abschnitt mit folgender Anwendung:

IV.6.26. Satz. *Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ paarweise verschieden und $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann existiert ein eindeutiges Polynom $p \in \mathbb{K}[z]_{\leq n}$, sodass $p(x_i) = y_i$ für alle $i = 0, \dots, n$. Insbesondere besitzt jedes nicht-triviale Polynom n-ten Grades, $0 \neq p \in \mathbb{K}[z]_{\leq n}$, höchstens n verschiedene Nullstellen in $\mathbb{K}$. Darüber hinaus ist die sogenannte* Vandermonde-Matrix*,*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{K}),$$

invertierbar.

Beweis. Für das Polynom

$$p := \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i(z-x_0)(z-x_1)\cdots(z-x_{i-1})(z-x_{i+1})\cdots(z-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \in \mathbb{K}[z]_{\leq n}$$

gilt offensichtlich $p(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$. Die lineare Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{K}[z]_{\leq n} \to \mathbb{K}^{n+1}, \quad \phi(p) := \begin{pmatrix} p(x_0) \\ p(x_1) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{pmatrix},$$

ist also surjektiv. Nach Korollar IV.2.11 ist ϕ daher ein Isomorphismus, denn $\dim(\mathbb{K}[z]_{\leq n}) = n + 1 = \dim(\mathbb{K}^{n+1})$. Die Injektivität von ϕ bedeutet aber gerade, dass das Polynom p durch seine Werte $p(x_0), \dots, p(x_n)$ eindeutig bestimmt ist.

Bezeichnet $E = (e_0, \dots, e_n)$ die Standardbasis von $\mathbb{K}^{n+1}$ und $B = (1, z, z^2, \dots, z^n)$ die Basis der Monome in $\mathbb{K}[z]_{\leq n}$, dann gilt offenbar

$$[\phi]_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{K}).$$

Da ϕ invertierbar ist, muss also auch die Vandermonde-Matrix invertierbar sein, siehe Satz IV.6.15. □

Aus dem vorangehenden Satz erhalten wir sofort:

IV.6.27. Korollar. *Ist $\mathbb{K}$ ein Körper mit unendlich vielen Elementen, dann ist die Abbildung $\mathbb{K}[z] \to F(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, die einem Polynom p die Polynomfunktion $x \mapsto p(x)$, $x \in \mathbb{K}$, zuordnet injektiv. In diesem Fall ist ein Polynom also völlig durch die entsprechende Polynomfunktion bestimmt.*

IV.6.28. Bemerkung. Für endliche Körper $\mathbb{K}$ bleibt das vorangehende Resultat nicht richtig. In diesem Fall ist nämlich $F(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ endlich-dimensional, aber $\dim(\mathbb{K}[z]) = \infty$, es kann daher keine injektive Abbildung $\mathbb{K}[z] \to F(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ geben.

Die Tatsache, dass ein nicht-triviales Polynom n-ten Grades, $0 \neq p \in \mathbb{K}[z]_{\leq n}$, höchstens n verschiedene Nullstellen haben kann lässt sich auch auf andere Art beweisen. Ist nämlich $x_0 \in \mathbb{K}$ Nullstelle von p, dann liefert Polynomdivision ein nicht-triviales Polynom $0 \neq q \in \mathbb{K}[z]_{\leq n-1}$, sodass $p = (z - x_0)q$. Ist $x_1 \in \mathbb{K}$ eine weitere Nullstelle von p und $x_0 \neq x_1$, dann muss x_1 eine Nullstelle von q sein und wir können einen weiteren Linearfaktor abspalten. Da der Grad des Polynoms q strikt kleiner als der Grad von p ist, folgt daraus, dass p höchstens n verschiedene Nullstellen haben kann.

Literatur

[1] A. Cap, Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie. Skriptum zur gleichnamigen Vorlesung aus dem Sommeremester 2011. Erhältlich unter `http://www.mat.univie.ac.at/~cap/files/Linalg.pdf`
[2] W. H. Greub, *Linear algebra.* Third edition. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **97**. Springer-Verlag, New York, 1967.
[3] K. Jänich, *Lineare Algebra.* Springer Verlag, 2008.
[4] K. Jänich, *Topologie.* Springer Verlag, Berlin–Heidelberg, 1990.
[5] S. Lang, *Linear algebra.* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1987.
[6] S. Roman, *Advanced linear algebra.* Graduate Texts in Mathematics **135**, Springer, New York, 2008.
[7] H. Schichl und R. Steinbauer, *Einführung in das mathematische Arbeiten.* Springer Verlag, 2009.
[8] G. Strang, *Linear algebra and its applications.* Academic Press, New York–London, 1980.

Übungen zu “Einführung in die lineare Algebra und Geometrie”

Wintersemester 2011/12

Stefan Haller

1. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_{ij} \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,

$$\psi\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

linear ist, d.h. für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\psi(x + \tilde{x}) = \psi(x) + \psi(\tilde{x}) \quad \text{und} \quad \psi(\lambda x) = \lambda\psi(x).$$

2. Sei $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung, d.h. es gelte $\psi(x+\tilde{x}) = \psi(x)+\psi(\tilde{x})$ und $\psi(\lambda x) = \lambda\psi(x)$, für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Menge

$$L := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) = 0\}$$

einen Teilraum bildet, d.h. für alle $x, \tilde{x} \in L$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $x+\tilde{x} \in L$ und $\lambda x \in L$. Zeige weiters, dass auch

$$W := \operatorname{img}(\psi) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n : \psi(x) = y\}$$

ein Teilraum ist, d.h. für alle $y, \tilde{y} \in W$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $y+\tilde{y} \in W$ und $\lambda y \in W$.

3. Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & = & y_1 \\ 2x_1 & +5x_2 & +8x_3 & +3x_4 & = & y_2 \\ 3x_1 & +8x_2 & +14x_3 & +8x_4 & = & y_3 \\ & +3x_2 & +8x_3 & +14x_4 & = & y_4 \end{array}$$

für jedes $y \in \mathbb{R}^4$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{R}^4$ besitzt und bestimme diese Lösung. Was bedeutet dies für die Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \qquad \psi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 \\ 3x_1 + 8x_2 + 14x_3 + 8x_4 \\ +3x_2 + 8x_3 + 14x_4 \end{pmatrix}?$$

4. Für welche $y \in \mathbb{R}^4$ besitzt das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & -3x_2 & 2x_3 & = & y_1 \\ 4x_1 & -6x_2 & -4x_3 & = & y_2 \\ 6x_1 & -9x_2 & -6x_3 & = & y_3 \\ -2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & y_4 \end{array}$$

wenigstens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^3$. Gib ein Gleichungssystem mit möglichst wenigen Gleichungen für die Menge dieser y an.

5. Betrachte das homogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & & & +4x_4 & +5x_5 & = & 0 \\ x_1 & +2x_2 & & +10x_4 & +13x_5 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & +3x_3 & +5x_4 & +8x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & +16x_4 & +21x_5 & = & 0 \end{array}$$

Bestimme eines Basis des Lösungsraums

$$L := \big\{x \in \mathbb{R}^5 \mid x \text{ genügen allen vier Gleichungen oben}\big\},$$

d.h. bestimme Vektoren $b_1, \dots, b_l \in L$, sodass sich jedes $x \in L$ in der Form

$$x = s_1 b_1 + \cdots + s_l b_l$$

schreiben lässt, für eindeutig bestimmte Skalare $s_1, \dots, s_l \in \mathbb{R}$. *Hinweis:* $l = 2$. Gib auch ein Gleichungssystem für L an, das nur aus drei Gleichungen besteht.

6. Sei $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear, d.h. es gelte $\psi(x + \tilde{x}) = \psi(x) + \psi(\tilde{x})$ und $\psi(\lambda x) = \lambda\psi(x)$, für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Für $y \in \mathbb{R}^m$ betrachte

$$L_y := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) = y\}$$

und setze $L := L_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \psi(x) = 0\}$. Weiters sei $\xi_y \in L_y$. Zeige, dass die Abbildung

$$\phi_y\colon L \xrightarrow{\cong} L_y, \quad \phi_y(x) := \xi_y + x,$$

eine Bijektion ist und schließe daraus

$$L_y = \{\xi_y + x \mid \psi(x) = 0\} = \xi_y + L.$$

Was bedeutet dies für ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen in n Variablen?

7. Sei $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear und $\xi \in \mathbb{R}^m$. Zeige, dass die Abbildung

$$\phi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad \phi(x) := \xi + \psi(x),$$

affin ist, d.h. es gilt

$$\phi\big(\lambda x + (1-\lambda)\tilde{x}\big) = \lambda\phi(x) + (1-\lambda)\phi(\tilde{x}),$$

für alle $x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Wann ist ϕ linear?

8. Bestimme alle komplexen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrcr} z_1 & +\mathbf{i}z_2 & +(1+\mathbf{i})z_3 & = & \mathbf{i}-1 \\ (2+\mathbf{i})z_1 & +(-3+\mathbf{i})z_2 & +2\mathbf{i}z_3 & = & -5 \end{array}$$

d.h. bestimme alle $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ die den beiden Gleichungen genügen.

9. Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcl} \mathbf{i}z_1 & +2\mathbf{i}z_2 & +(1+\mathbf{i})z_3 & = & w_1 \\ (1+\mathbf{i})z_1 & +(2+\mathbf{i})z_2 & +(3+2\mathbf{i})z_3 & = & w_2 \\ (2+\mathbf{i})z_1 & +(4+2\mathbf{i})z_2 & +(1+2\mathbf{i})z_3 & = & w_3 \end{array}$$

für jedes $w \in \mathbb{C}^3$ eine eindeutige Lösung $z \in \mathbb{C}^3$ besitzt und bestimme diese Lösung. Was bedeutet dies für die Abbildung

$$\psi\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \qquad \psi\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{i}z_1 + 2\mathbf{i}z_2 + (1+\mathbf{i})z_3 \\ (1+\mathbf{i})z_1 + (2+\mathbf{i})z_2 + (3+2\mathbf{i})z_3 \\ (2+\mathbf{i})z_1 + (4+2\mathbf{i})z_2 + (1+2\mathbf{i})z_3 \end{pmatrix}?$$

10. Bestimme alle rationalen Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{6}x_2 + \tfrac{2}{3}x_3 &= \tfrac{1}{3} \\ \tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + \tfrac{5}{6}x_3 &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}$$

d.h. bestimme alle $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Q}^3$, die dieses System lösen.

11. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $\mathbb{K}^n$ bezüglich komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet, vgl. Beispiel II.1.3 aus der Vorlesung.

12. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_p$, wobei p eine Primzahl bezeichnet. Aus wievielen Elementen besteht der Vektorraum $\mathbb{K}^n$?

13. Sei X eine Menge und V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Zeige, dass die Menge aller Abbildungen $X \to V$ bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet. *Hinweis: In der Vorlesung haben wir bereits die Vektorraumaxiome (V1) – (V3) und (V6) überprüft, siehe Beispiel II.1.6. Zeige nun analog, dass auch die restlichen Axiome gelten.*

14. Sei X eine Menge und $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige, dass die punktweise Multiplikation $\mathbb{K}$-wertiger Funktionen $X \to \mathbb{K}$ folgende Eigenschaften besitzt:

(a) $f(gh) = (fg)h$
(b) $fg = gf$
(c) $1f = f = f1$, wobei $1\colon X \to \mathbb{K}$ die konstante Einsfunktion bezeichnet.
(d) $f(g_1 + g_2) = fg_1 + fg_2$ und $f(\lambda g) = \lambda(fg)$
(e) $(f_1 + f_2)g = f_1 g + f_2 g$ und $(\lambda f)g = \lambda(fg)$

für beliebige Funktionen $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2, h\colon X \to \mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Die Menge aller Funktion $X \to \mathbb{K}$ bildet daher eine kommutative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins, vgl. Bemerkung II.1.7 aus der Vorlesung.

15. Zeige, dass $\mathbb{K}[z]$, d.h. die Menge der Polynome mit Koeffizienten in einem Körper $\mathbb{K}$, tatsächlich einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet. Zeige weiters, dass die Multipikation von Polynomen folgende Eigenschaften besitzt:

(a) $p(qr) = (pq)r$

(b) $pq = qp$
(c) $1p = p = p1$, wobei $1 = 1 + 0z + 0z^2 + \cdots$ das Einspolynom bezeichnet.
(d) $r(p+q) = rp + rq$ und $p(\lambda q) = \lambda(pq)$
(e) $(p+q)r = pr + qr$ und $(\lambda p)q = \lambda(pq)$

für beliebige Polynome $p, q, r \in \mathbb{K}[z]$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Somit ist $\mathbb{K}[z]$ eine kommutative $\mathbb{K}$-Algebra mit Eins. *Hinweis: In der Vorlesung haben wir bereits die Assoziativität bewiesen, vgl. Bemerkung II.1.9.*

16. Welche der folgenden Teilmengen sind Teilräume von $\mathbb{R}^2$?

$$\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 7\right\} \qquad \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\right\}$$
$$\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\right\} \qquad \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 0\right\}$$
$$\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\right\} \qquad \left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \text{ und } x - y = 0\right\}$$

17. Wieviele Elemente hat der Teilraum

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{K}^3 \,\middle|\, x + y + z = 0 \right\},$$

über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ und wieviele im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3$?

18. Zeige, dass die Menge der 1-periodischen Funktionen,

$$\left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, \forall x \in \mathbb{R} : f(x+1) = f(x) \right\},$$

einen Teilraum von $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bildet.

19. Seien W_1 und W_2 zwei Teilräume eines Vektorraums V. Zeige, dass die Vereinigung $W_1 \cup W_2$ genau dann einen Teilraum von V bildet, wenn $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$ gilt.

20. Sei W_i, $i \in I$, eine Familie von Teilräumen eines Vektorraums V, sodass für je zwei $i, j \in I$ stets $W_i \subseteq W_j$ oder $W_j \subseteq W_i$ gilt. Zeige, dass in dieser Situation $\bigcup_{i \in I} W_i$ einen Teilraum von V bildet.

21. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \varphi\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 0 \qquad \psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \psi(v) = -v$$
$$\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \rho\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}xy\\2x\end{pmatrix} \qquad \kappa\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \kappa\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x^3\\y^3\end{pmatrix}$$
$$\chi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad \chi\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) = x - y + z \qquad f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x + 7$$

22. Sei $\varphi\colon V \to W$ eine Abbildung zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Zeige, dass φ genau dann linear ist, wenn es folgender Bedingung genügt:

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}\, \forall v_1, v_2 \in V : \varphi(v_1 + \lambda v_2) = \varphi(v_1) + \lambda\varphi(v_2)$$

23. Sei $\varphi\colon V \to W$ eine Abbildung zwischen $\mathbb{Q}$-Vektorräumen. Zeige, dass φ genau dann linear ist, wenn es folgende Eigenschaft besitzt:

$$\forall v, w \in V : \varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$$

Hinweis: Zeige zunächst $\varphi(nv) = n\varphi(v)$, für alle $n \in \mathbb{N}$ und $v \in V$.

24. Sei V ein Vektorraum und $g\colon Y \to X$ eine Abbildung. Zeige, dass die Zuordnung $F(X,V) \to F(Y,V)$, $f \mapsto f \circ g$, eine lineare Abbildung ist. Schließe daraus, dass für jede Teilmenge $A \subseteq X$, die Abbildung $F(X,V) \to F(A,V)$, $f \mapsto f|_A$, linear ist. Folgere daraus auch, dass für jedes $x \in X$, die sogenannte Evaluationsabbildung, $\mathrm{ev}_x\colon F(X,V) \to V$, $\mathrm{ev}_x(f) := f(x)$, linear ist.

25. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Betrachte die beiden Abbildungen

$$\varphi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2, \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \psi\colon \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^2, \psi\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x \\ x+y \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass φ und ψ beide lineare Isomorphismen sind, und bestimme ihre Umkehrabbildungen. Zeige auch $\varphi \circ \psi \neq \psi \circ \varphi$, und schließe daraus, dass die Gruppe $\mathrm{GL}(\mathbb{K}^2)$ nicht abelsch ist.

26. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und betrachte den Teilraum

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \,\middle|\, 7x - y + 8z = 0 \right\}$$

von $\mathbb{K}^3$. Konstruiere einen linearen Isomorphismus $\mathbb{K}^2 \cong W$.

27. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und betrachte den Teilraum

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3 \,\middle|\, \begin{array}{rcl} x + 2y + 3z & = & 0 \\ 2x + 5y + z & = & 0 \end{array} \right\}$$

von $\mathbb{K}^3$. Konstruiere einen linearen Isomorphismus $\mathbb{K} \cong W$.

28. Sei W ein Teilraum eines Vektorraums V. Zeige, dass

$$\{\varphi \in \mathrm{end}(V) \mid \varphi(W) \subseteq W\}$$

einen Teilraum von $\mathrm{end}(V)$ bildet, der auch abgeschlossen unter der Komposition linearer Abbildungen ist. Zeige auch, dass

$$\{\varphi \in \mathrm{GL}(V) \mid \varphi(W) = W\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ bildet.

29 (Fünferlemma). Freiwilliges Beispiel! Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\rho_1"', "\cong"] & V_2 \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\rho_2"', "\cong"] & V_3 \arrow[r, "\varphi_3"] \arrow[d, "\rho_3"] & V_4 \arrow[r, "\varphi_4"] \arrow[d, "\cong"', "\rho_4"] & V_5 \arrow[d, "\cong"', "\rho_5"] \\
W_1 \arrow[r, "\psi_1"] & W_2 \arrow[r, "\psi_2"] & W_3 \arrow[r, "\psi_3"] & W_4 \arrow[r, "\psi_4"] & W_5
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm linearer Abbildungen zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen mit exakten Zeilen. Genauer, sollen die folgenden Voraussetzungen erfüllt sein:

(a) $V_1, \ldots, V_5$ und $W_1, \ldots, W_5$ sind $\mathbb{K}$-Vektorräume.
(b) $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$, $\psi_1, \ldots, \psi_4$ und $\rho_1, \ldots, \rho_5$ sind lineare Abbildungen.
(c) Das Diagramm kommutiert, d.h. für $i = 1, 2, 3, 4$ gilt

$$\rho_{i+1} \circ \varphi_i = \psi_i \circ \rho_i.$$

(d) Die Zeilen sind exakt, d.h. für $i = 1, 2, 3$ gilt

$$\operatorname{img}(\varphi_i) = \ker(\varphi_{i+1}) \quad \text{und} \quad \operatorname{img}(\psi_i) = \ker(\psi_{i+1}).$$

Zeige nun: Sind ρ_1, ρ_2, ρ_4 und ρ_5 Isomorphismen, dann muss auch ρ_3 ein Isomorphismus sein.

Hinweis zur Surjektivität von ρ_3: Beginne etwa wie folgt: Sei $w_3 \in W_3$ beliebig. Da ρ_4 surjektiv ist, existiert $v_4 \in V_4$ mit $\rho_4(v_4) = \psi_3(w_3)$. Wegen der Kommutativität des rechten Quadrats, folgt $\rho_5(\varphi_4(v_4)) = \psi_4(\rho_4(v_4)) = \psi_4(\psi_3(w_3)) = 0$, denn aufgrund der Exaktheit bei W_4 gilt $\psi_4 \circ \psi_3 = 0$. Da ρ_5 injektiv ist, erhalten wir $\varphi_4(v_4) = 0$, also $v_4 \in \ker(\varphi_4)$. Wegen der Exaktheit bei V_4 existiert $v_3 \in V_3$ mit $\varphi_3(v_3) = v_4$. Wegen der Kommutativität des Diagramms folgt $\psi_3(w_3 - \rho_3(v_3)) = 0$, d.h. $w_3 - \rho_3(v_3) \in \ker(\psi_3)$. Verwende nun die Exaktheit bei W_3 und die Surjektivität von ρ_2 um ein Element $\tilde{v}_3 \in V_3$ mit $\rho_3(\tilde{v}_3) = w_3$ zu konstruieren.

Hinweis zur Injektivität von ρ_3: Zeige, dass ρ_3 trivialen Kern hat. Sei dazu $v_3 \in V_3$ so, dass $\rho_3(v_3) = 0$. Da ρ_4 injektiv ist, lässt sich daraus $\varphi_3(v_3) = 0$ folgern, also $v_3 \in \ker(\varphi_3)$. Verwende nun die Exaktheit bei V_3 ... dann die Exaktheit bei W_2 ... die Surjektivität von ρ_1 ... und schließlich die Exaktheit bei V_2.

30. Sofern diese definiert sind, berechne die Produkte AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB und CC folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Bestimme auch $A^4 = AAAA$.

31. Zeige, dass die folgenden Matrizen über den Körpern $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ invertierbar sind und bestimme ihre Inversen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Matrizen sind über den Körpern $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ und $\mathbb{Z}_7$ invertierbar?

32. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Unter einer *Diagonalmatrix* verstehen wir eine Matrix $D \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ der Gestalt

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

d.h. $a_{ij} = 0$ falls $i \neq j$. Zeige, dass die Diagonalmatrizen einen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bilden, der auch abgeschlossen unter Matrizenmultiplikation ist. Zeige, dass für zwei Diagonalmatrizen D und D' stets $DD' = D'D$ gilt. Formuliere ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für die Invertierbarkeit von Diagonalmatrizen. Wie sieht im invertierbaren Fall die Inverse aus?

33. Zeige, dass die folgenden beiden Matrizen (über jedem Körper) invertierbar sind und berechne ihre Inversen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

34. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Unter einer *oberen Dreiecksmatrix* verstehen wir eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, die folgende Gestalt hat

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

d.h. $a_{ij} = 0$ für alle $1 \leq j < i \leq n$. Zeige, dass die oberen Dreiecksmatrizen einen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bilden, der auch abgeschlossen unter Matrizenmultiplikation ist. Zeige weiters, dass eine obere Dreiecksmatrix genau dann invertierbar ist, wenn alle Diagonalelemente a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$, verschieden von 0 sind und, dass in diesem Fall die Inverse Matrix wieder eine obere Dreiecksmatrix bildet. Was kann über die Diagonalelemente der Inversen ausgesagt werden?

35. Betrachte die Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = i+1, \text{ und} \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Berechne $A^k = A \cdots A$, für jedes $k \in \mathbb{N}$. *Hinweis: Vielleicht ist es hilfreich dies zunächst für kleine n, etwa* $A = \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$ *oder* $A = \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0 \end{smallmatrix}\right)$ *durchzuführen.*

36. Unter der Spur einer quadratischen Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ verstehen wir den Skalar $\operatorname{tr}(A) := a_{11} + \cdots + a_{nn}$, d.h. die Summe der Diagonaleinträge. Berechne

$$\operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass die Spur eine surjektive lineare Abbildung $\operatorname{tr}\colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definiert. Zeige auch $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, $\operatorname{tr}(A^t) = \operatorname{tr}(A)$ und $\operatorname{tr}(I_n) = n$, für je zwei Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

37. Zeige, dass die Verknüpfung

$$M_{n\times n}(\mathbb{K}) \times M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to M_{n\times n}(\mathbb{K}), \quad (A, B) \mapsto [A, B] := AB - BA,$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) $[A_1 + A_2, B] = [A_1, B] + [A_2, B]$ und $[\lambda A, B] = \lambda[A, B]$.
(b) $[A, B_1 + B_2] = [A, B_1] + [A, B_2]$ und $[A, \lambda B] = \lambda[A, B]$.
(c) $[A, B] = -[B, A]$ und $[A, A] = 0$.
(d) $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$. (Jacobi-Identität)
(e) $[A, B]^t = -[A^t, B^t]$
(f) $\operatorname{tr}\big([A, B]C\big) = \operatorname{tr}\big(A[B, C]\big)$

Dabei sind $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Der Ausdruck $[A, B] = AB - BA$ wird als *Kommutator* der Matrizen A und B bezeichnet. Zeige auch, dass der Kommutator zweier schiefsymmetrischer Matrizen wieder schiefsymmetrisch ist, d.h. aus $A^t = -A$ und $B^t = -B$ folgt stets $[A, B]^t = -[A, B]$.

38. Betrachte die reellen (2×2)-Matrizen,

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeige $[H,E]=2E$, $[H,F]=-2F$ und $[E,F]=H$, wobei $[A,B]=AB-BA$ den Kommutator bezeichnet, vgl. Aufgabe 37. Zeige auch $[[H,H],E]\neq[H,[H,E]]$ und schließe daraus, dass die Verknüpfung $(A,B)\mapsto[A,B]$ nicht assoziativ ist.

39. Seien $n_1,n_2,m_1,m_2,k_1,k_2\in\mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned} A&\in M_{n_1\times m_1}(\mathbb{K}), & B&\in M_{n_1\times m_2}(\mathbb{K}),\\ C&\in M_{n_2\times m_1}(\mathbb{K}), & D&\in M_{n_2\times m_2}(\mathbb{K}),\\[1em] E&\in M_{m_1\times k_1}(\mathbb{K}), & F&\in M_{m_1\times k_2}(\mathbb{K}),\\ G&\in M_{m_2\times k_1}(\mathbb{K}), & H&\in M_{m_2\times k_2}(\mathbb{K}). \end{aligned}$$

Setze $n:=n_1+n_2$, $m:=m_1+m_2$, $k:=k_1+k_2$ und betrachte die Blockmatrizen

$$\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in M_{n\times m}(\mathbb{K}) \quad\text{und}\quad \begin{pmatrix} E & F\\ G & H\end{pmatrix}\in M_{m\times k}(\mathbb{K}).$$

Zeige folgende Formel für das Matrizenprodukt:

$$\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F\\ G & H\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AE+BG & AF+BH\\ CE+DG & CF+DH\end{pmatrix}$$

Berechne damit

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r\\ -I_r & 0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 0 & I_r\\ -I_r & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & I_r\\ -I_r & 0\end{pmatrix},$$

wobei $I_r\in M_{r\times r}(\mathbb{K})$ die $(r\times r)$-Einheitsmatrix bezeichnet.

40. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ und $n:=n_1+n_2$. Zeige, dass

$$\left\{\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}\in M_{n\times n}(\mathbb{K})\,\middle|\, A\in M_{n_1\times n_1}(\mathbb{K}),\ D\in M_{n_2\times n_2}(\mathbb{K}),\ B\in M_{n_1\times n_2}(\mathbb{K})\right\}$$

einen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bildet, der auch abgeschlossen unter Matrizenmultiplikation ist. Zeige, dass diese Matrizen genau den linearen Abbildungen $\psi\colon\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^n$ entsprechen, für die $\psi(\mathbb{K}^{n_1})\subseteq\mathbb{K}^{n_1}$ gilt, wobei wir $\mathbb{K}^{n_1}$ in offensichtlicher Weise als Teilraum von $\mathbb{K}^n$ auffassen. Zeige, auch dass eine Matrix dieser Form invertierbar ist, falls A und D beide invertierbar sind und, dass in diesem Fall

$$\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1}\\ 0 & D^{-1}\end{pmatrix}$$

gilt. Schließe daraus, dass

$$\left\{\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}\in M_{n\times n}(\mathbb{K})\,\middle|\, A\in\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{K}),\ D\in\mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{K}),\ B\in M_{n_1\times n_2}(\mathbb{K})\right\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ bildet, vgl. Aufgabe 28. *Hinweis: Aufgabe 39.*

41. Zeige, dass die folgende Matrix über jedem Körper invertierbar ist und bestimme ihre Inverse

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Verwende Aufgabe 40 und Beispiel II.4.8 aus der Vorlesung.

42. Ist $p \in \mathbb{K}[z]$ ein Polynom, d.h. $p = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$ mit Koeffizienten $p_i \in \mathbb{K}$, und ist $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine quadratische Matrix, dann können wir A in p einsetzen und erhalten eine Matrix $p(A) \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$,

$$p(A) := p_0 I_n + p_1 A + p_2 A^2 + p_3 A^3 + \cdots$$

Für beliebige $p, q \in \mathbb{K}[z]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ und $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zeige

$$(p+q)(A) = p(A) + q(A), \quad (\lambda p)(A) = \lambda p(A) \quad \text{sowie} \quad (pq)(A) = p(A)q(A).$$

Was bedeutet dies für die Zuordnung $\mathbb{K}[z] \to F(M_{n\times n}(\mathbb{K}), M_{n\times n}(\mathbb{K}))$, die einem Polynom $p \in \mathbb{K}[z]$ die Abbildung $M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $A \mapsto p(A)$, zuordnet? Berechne auch $p(A)$, wobei $p = 2 - 3z + z^2$ und $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

43. Für Vektoren $x, y \in \mathbb{K}^3$ wird ihr Kreuzprodukt $x \times y \in \mathbb{K}^3$ durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

definiert. Zeige, dass das Kreuzprodukt folgenden Rechenregeln genügt:
(a) $x \times (y + \tilde{y}) = x \times y + x \times \tilde{y}$ und $x \times (\lambda y) = \lambda(x \times y)$.
(b) $(x + \tilde{x}) \times y = x \times y + \tilde{x} \times y$ und $(\lambda x) \times y = \lambda(x \times y)$.
(c) $x \times y = -y \times x$ und $x \times x = 0$.
(d) $(x \times y) \times z + (y \times z) \times x + (z \times x) \times y = 0$. (Jacobi-Identität)
(e) $(x \times y)^t z = x^t (y \times z)$.
(f) $(x \times y) \times z = (z^t x) y - (y^t z) x$. (Graßmann-Identität)
(g) $x^t (x \times y) = 0 = y^t (x \times y)$.
Dabei sind $x, \tilde{x}, y, \tilde{y}, z \in \mathbb{K}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

44. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{K}^3 \to M_{3\times 3}(\mathbb{K}), \quad \varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_3 \\ -x_1 & 0 & x_2 \\ -x_3 & -x_2 & 0 \end{pmatrix}$$

einen linearen Isomorphismus auf den Teilraum der schiefsymmetrischen Matrizen definiert. Für beliebige $x, y \in \mathbb{K}^3$ zeige weiters

$$\varphi(x \times y) = [\varphi(x), \varphi(y)].$$

Dabei bezeichnet $[\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi(x)\varphi(y) - \varphi(y)\varphi(x)$ den Kommutator von Matrizen, vgl. Aufgabe 37.

45. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Zeige $W + W' = \mathbb{K}^4$, wobei:

$$W := \{x \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}$$
$$W' := \{x \in \mathbb{K}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

46. Seien W, W_1, W_2 und W_3 vier Teilräume eines Vektorraums V. Zeige

(a) $W_1 + W_2 = W_2 + W_1$

(b) $W_1 + (W_2 + W_3) = (W_1 + W_2) + W_3$

(c) $W + \{0\} = W$

(d) $W_1 + W_2 = W_2 \Leftrightarrow W_1 \subseteq W_2$

Warum bildet die Menge aller Teilräume mit dieser Verknüpfung + i.A. keine Gruppe? Gib einen Vektorraum V an, für den dies doch der Fall ist.

47. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und betrachte folgende Teilräume von $\mathbb{K}^5$,

$$W := \{x \in \mathbb{K}^5 \mid x_4 = x_5 = 0\} \quad \text{und} \quad W' := \{x \in \mathbb{K}^5 \mid x_1 = x_2 = x_3 = 0\},$$

wobei $x_i \in \mathbb{K}$ die Komponenten des Vektors $x \in \mathbb{K}^5$ bezeichnen. Zeige

$$\mathbb{K}^5 = W \oplus W'.$$

Bestimme die Matrizen zur Projektion auf W längs W', zur Projektion auf W' längs W, zur Spiegelung an W längs W' und zur Spiegelung an W' längs W.

48. Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varepsilon\colon V \to \mathbb{K}$ linear und $g \in V$, sodass $\varepsilon(g) \neq 0$. Zeige, dass V innere direkte Summe der Teilräume $E := \{v \in V : \varepsilon(v) = 0\}$ und $G := \{\lambda g : \lambda \in \mathbb{K}\}$ ist. Gib auch Formeln für die Projektion auf E längs G, die Projektion auf G längs E und die Spiegelung an E längs G an. *Hinweis: Dies ist eine Verallgemeinerung von Beispiel II.5.10 aus der Vorlesung.*

49. Zeige, dass die Menge der spurfreien Matrizen, d.h.

$$W := \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) : \operatorname{tr}(A) = 0\},$$

einen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bildet. Zeige auch, dass die Vielfachen der Einheitsmatrix,

$$W' := \{\lambda I_n : \lambda \in \mathbb{K}\},$$

einen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bilden. Unter der Annahme $n \neq 0 \in \mathbb{K}$ zeige weiters

$$M_{n\times n}(\mathbb{K}) = W \oplus W',$$

und gib Formeln für die Projektion auf W längs W' sowie die Projektion auf W' längs W an.

50. Es sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ in dem $2 \neq 0$ gilt. Weiters sei $\sigma\colon V \to V$ linear, sodass $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_V$. Zeige, dass V innere direkte Summe der beiden Teilräume $W_+ = \{v \in V : \sigma(v) = v\}$ und $W_- = \{v \in V : \sigma(v) = -v\}$ ist. Zeige auch, dass die Projektion auf W_+ längs W_- und die Projektion auf W_- längs W_+ durch $\pi_+ = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_V + \sigma)$ bzw. $\pi_- = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_V - \sigma)$ gegeben sind. Inwiefern ist diese eine Verallgemeinerung von Beispiel II.5.12 aus der Vorlesung?

51. Betrachte die beiden Teilräume

$$W_1 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+y=0 \right\} \quad \text{und} \quad W_2 := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x-2y=0 \right\}.$$

Zeige $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^2$ und bestimme die Matrix der Projektion auf W_1 längs W_2 sowie die Matrix der Projektion auf W_2 längs W_1. Bestimme auch die Matrix der Spiegelung an W_1 längs W_2 sowie die Matrix der Spiegelung an W_2 längs W_1.

52. Betrachte die beiden Teilräume

$$W_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x+y=0 \\ y+z=0 \end{matrix} \right\} \quad \text{und} \quad W_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+z=0 \right\}.$$

Zeige $W_1 \oplus W_2 = \mathbb{R}^3$ und bestimme die Matrix der Projektion auf W_1 längs W_2 sowie die Matrix der Projektion auf W_2 längs W_1. Bestimme auch die Matrix der Spiegelung an W_1 längs W_2 sowie die Matrix der Spiegelung an W_2 längs W_1.

53. Für einen Teilraum W eines Vektorraums V zeige dass $V/W = \{0\}$ genau dann gilt, wenn $V = W$.

54. Sei $W := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ und bezeichne $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/W$ die kanonische Projektion. Zeige $\pi(u) = \pi(v)$ und $\pi(u) \neq \pi(w)$, wobei:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

55. Sei W ein Teilraum eines Vektorraums V und $\varphi\colon V \to V$ linear, sodass $\varphi(W) \subseteq W$. Zeige, dass es genau eine lineare Abbildung $\bar{\varphi}\colon V/W \to V/W$ gibt, sodass $\pi \circ \varphi = \bar{\varphi} \circ \pi$, wobei $\pi\colon V \to V/W$ die kanonische Projektion bezeichnet.

56. Sind A und B zwei Teilmengen eines Vektorraums V, dann gilt für die lineare Hülle i.A. $\langle A \cap B \rangle \neq \langle A \rangle \cap \langle B \rangle$. Erläutere dies an einem Beispiel.

57. Welche der folgenden Teilmengen bilden Erzeugendensysteme der angegebenen Vektorräume?

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 16 \\ 17 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ x \end{smallmatrix}\right) : x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{i} \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{C}^2$$

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{i} \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -\mathbf{i} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -\mathbf{i} \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{C}^2$$

58. Zeige, dass die folgenden Teilmengen linear abhängig sind und gib jeweils ein Element an, das sich als Linearkombination der restlichen schreiben lässt:

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^2 \qquad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -3 \\ 6 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{R}^4 \qquad \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ \mathbf{i} \\ 4-\mathbf{i} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 7+7\mathbf{i} \\ \mathbf{i}-1 \\ 5+3\mathbf{i} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\mathbf{i} \end{smallmatrix}\right) \right\} \subseteq \mathbb{C}^2$$

59. Zeige, dass die folgenden Teilmengen linear unabhängig sind:

$$\left\{\left(\begin{smallmatrix}9\\7\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}6\\5\end{smallmatrix}\right)\right\}\subseteq\mathbb{R}^2 \qquad \left\{\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$$

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^4 \qquad \left\{\begin{pmatrix}\mathbf{i}\\0\\1+\mathbf{i}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2+7\mathbf{i}\\3-\mathbf{i}\\5\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{C}^3$$

60. Fasse $V=\mathbb{R}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$ auf und zeige, dass $\{1,\sqrt{2}\}\subseteq V$ eine linear unabhängige Teilmenge bildet.

61. Welche der folgenden Teilmengen bilden Basen der angegebenen Vektorräume?

$$\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\7\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}2\\13\end{smallmatrix}\right)\right\}\subseteq\mathbb{R}^2 \qquad \left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$$

$$\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\\mathbf{i}\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{i}\\\mathbf{i}\end{smallmatrix}\right)\right\}\subseteq\mathbb{C}^2 \qquad \left\{1,1+z,1+2z+z^2\right\}\subseteq\mathbb{R}[z]_{\leq 2}$$

62. Erweitere den Vektor $\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.

63. Zeige, dass jede endliche totalgeordnete Menge ein eindeutiges Maximum besitzt. *Hinweis: Induktion nach der Anzahl der Elemente.*

64. Sei W ein Teilraum eines Vektorraums V. Zeige, dass ein zu W komplementärer Teilraum M in V existiert, d.h. $W\oplus M=V$, wie folgt:

(a) Sei U ein Teilraum von V, $W\cap U=\{0\}$ und $v\in V\setminus(W+U)$. Zeige, dass $U':=\langle v\rangle+U$ ein Teilraum von V ist, für den $U'\supsetneq U$ und $W\cap U'=\{0\}$ gilt.

(b) Die Mengeninklusion $\subseteq$ definiert eine Halbordnung auf der Menge

$$X=\big\{U\bigm| U \text{ ist Teilraum von } V \text{ und } W\cap U=\{0\}\big\}.$$

Zeige, dass jede Kette in X eine obere Schranke besitzt. *Hinweis: Für jede totalgeordnete Teilmenge $K\subseteq X$ ist $S:=\bigcup_{U\in K}U$ ein Teilraum von V für den $W\cap S=\{0\}$ gilt, vgl. Aufgabe 20.*

(c) Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element $M\in X$. Zeige mit Hilfe von (a), dass $W\oplus M=V$ gilt.

65. Seien $U\xrightarrow{\varphi}V\xrightarrow{\psi}W$ linear und $U^*\xleftarrow{\varphi^t}V^*\xleftarrow{\psi^t}W^*$ die dazu dualen Abbildungen. Zeige

$$\operatorname{img}(\varphi)=\ker(\psi)\quad\Leftrightarrow\quad\operatorname{img}(\varphi^t)=\ker(\psi^t).$$

Hinweis: Verwende Satz III.4.10 aus der Vorlesung.

66. a) Sei $\pi\colon V\to V$ ein Projektor, d.h. $\pi\circ\pi=\pi$. Zeige, dass dann auch die duale Abbildung $\pi^t\colon V^*\to V^*$ ein Projektor ist, und beschreibe dessen Bild und Kern. b) Seien nun W_1 und W_2 zwei komplementäre Teilräume von V, d.h. $V=W_1\oplus W_2$. Weiters bezeichne $\pi_1\colon V\to W_1$ die damit assoziierte Projektion auf W_1 längs W_2 und $\pi_2\colon V\to W_2$ die Projektion auf W_2 längs W_1. Nach Satz III.4.9 ist dann auch $V^*=W_1^\circ\oplus W_2^\circ$. Zeige, dass π_1^t mit der Projektion auf W_2° längs W_1° übereinstimmt, und analog für π_2^t.

67. Sei V ein Vektorraum und $\in \mathbb{N}_0$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) $\dim(V) = n$.
(b) Es existieren n linear unabhängige Vektoren, und je $n+1$ Vektoren in V sind linear abhängig.
(c) Es existiert ein Erzeugendensystem von V mit n Vektoren, und je $n-1$ Vektoren erzeugen V nicht.

68. Sei X eine n-elementige Menge. Zeige $\dim(F(X, \mathbb{K})) = n$.

69. Sei X eine Menge mit unendlich vielen Elementen. Zeige, dass $F(X, \mathbb{K})$ unendlich-dimensional ist. *Hinweis: Für jedes $x \in X$ betrachte die Funktion $e_x \colon X \to \mathbb{K}$, $e_x(x) := 1$, $e_x(y) := 0$ falls $y \neq x$, und zeige, dass die Menge $\{e_x \mid x \in X\}$ linear unabhängig in $F(X, \mathbb{K})$ ist.*

70. Zeige: Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann linear unabhängig, wenn ihr Kreuzprodukt $z := x \times y$ verschieden von Null ist. In diesem Fall bilden die Vektoren x, y, z eine Basis von $\mathbb{R}^3$. *Hinweis: Es genügt die lineare Unabhängigkeit zu zeigen.* In diesem Fall gilt weiters

$$\left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3 & = & 0 \\ y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3 & = & 0 \end{matrix} \right\} = \big\{ \lambda z \bigm| \lambda \in \mathbb{R} \big\},$$

sowie

$$\big\{ \lambda x + \mu y \bigm| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \big\} = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z_1u_1 + z_2u_2 + z_3u_3 \right\}.$$

Hinweis: In beiden Fällen folgt eine Inklusion sofort aus $x^tz = 0 = y^tz$, siehe Aufgabe 43. Die Gleichheit folgt dann aus Dimensionsgründen.

71. Seien W_1 und W_2 zwei verschiedene $(n-1)$-dimensionale Teilräume von $\mathbb{K}^n$. Zeige $W_1 + W_2 = \mathbb{K}^n$ und $\dim(W_1 \cap W_2) = n - 2$. *Hinweis: Beispiel IV.2.6.*

72. Sei V ein Vektorraum und $\alpha, \beta \in V^*$ zwei nicht-triviale lineare Funktionale, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Zeige, dass die Hyperebenen $\ker(\alpha)$ und $\ker(\beta)$ genau dann übereinstimmen, wenn $\lambda \in \mathbb{K}$ existiert, sodass $\beta = \lambda\alpha$.

73. Sei $0 \to W \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{\psi} U \to 0$ eine kurze exakte Sequenz linearer Abbildungen, d.h. φ sei injektiv, ψ surjektiv und $\operatorname{img}(\varphi) = \ker(\psi)$. Zeige, dass V genau dann endlich-dimensional ist, wenn W und U beide endlich-dimensional sind, und in diesem Fall gilt

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(U).$$

Hinweis: Zeige $U \cong V/\operatorname{img}(\varphi)$, $W \cong \operatorname{img}(\varphi)$ und verwende Korollar IV.2.8.

74 (Kodimension und Durchschnitt). Ein Teilraum W eines Vektoraums V hat endliche *Kodimension in V,* falls V/W endlich-dimensional ist. In diesem Fall wird $\operatorname{codim}_V(W) := \dim(V/W)$ die *Kodimension von W in V genannt.* Seien nun W_1 und W_2 zwei Teilräume von V. Zeige, dass $W_1 \cap W_2$ genau dann endliche Kodimension in V hat, wenn W_1 und W_2 beide endliche Kodimension in V haben. Zeige weiters, dass in diesem Fall auch $W_1 + W_2$ endliche Kodimension in V hat und es gilt

$$\operatorname{codim}_V(W_1 \cap W_2) + \operatorname{codim}_V(W_1 + W_2) = \operatorname{codim}_V(W_1) + \operatorname{codim}_V(W_2).$$

Im transversalen Fall, d.h. wenn $W_1 + W_2 = V$ gilt, erhalten wir

$$\operatorname{codim}_V(W_1 \cap W_2) = \operatorname{codim}_V(W_1) + \operatorname{codim}_V(W_2).$$

Hinweis: $\operatorname{codim}_V(W) = \dim(V/W) = \dim(W^\circ)$, *Satz IV.2.1 und Satz III.4.9.*

75. Erläutere die Gleichungen

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n \quad \text{und} \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n.$$

Hinweis: $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, *siehe auch Beispiel IV.1.12.*

76. Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V. Zeige, dass $b_1, \mathbf{i}b_1, b_2, \mathbf{i}b_2, \dots, b_n, \mathbf{i}b_n$ eine Basis des V zugrundeliegenden reellen Vektorraums $V^{\mathbb{R}}$ bildet, vgl. Bemerkung IV.2.21, und schließe daraus $\dim_{\mathbb{R}}(V^{\mathbb{R}}) = 2\dim_{\mathbb{C}}(V)$.

77. Führe die Details in Bemerkung IV.2.22 aus.

78. Es sei V ein reeller Vektorraum und $J\colon V \to V$ linear mit $J \circ J = -\operatorname{id}_V$. Zeige, dass V bezüglich der Skalarmultiplikation

$$\mathbb{C} \times V \xrightarrow{\cdot} V, \qquad (a + b\mathbf{i})v := av + bJ(v),$$

zu einem komplexen Vektorraum wird. Schließe daraus, dass dies nur möglich ist, wenn $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ gerade ist. *Hinweis: Für den letzten Teil verwende Aufgabe 76.*

79. Sei

$$\{0\} \xrightarrow{\varphi_{-1}=0} V_0 \xrightarrow{\varphi_0} V_1 \xrightarrow{\varphi_1} V_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \to V_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} V_n \xrightarrow{\varphi_n=0} \{0\}$$

eine Folge linearer Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen, sodass $\varphi_i \circ \varphi_{i-1} = 0$, für jedes i. Schließe daraus $\operatorname{img}(\varphi_{i-1}) \subseteq \ker(\varphi_i)$ und definiere Vektorräume $H_i := \ker(\varphi_i)/\operatorname{img}(\varphi_{i-1})$. Zeige nun

$$\sum_i (-1)^i \dim(V_i) = \sum_i (-1)^i \dim(H_i).$$

Hinweis: Verwende $\operatorname{img}(\varphi_i) \cong V_i/\ker(\varphi_i)$ *und Korollar IV.2.8.*

80. Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$. Zeige

$$\operatorname{rank}(TAS) = \operatorname{rank}(A).$$

Hinweis: Betrachte die mit den Matrizen assoziierten linearen Abbildungen und verwende Proposition IV.2.23.

81. Sei W ein Teilraum eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, und bezeichne $\iota\colon V \to V^{**}$, $\iota(v)(\alpha) = \alpha(v)$, die natürliche Abbildung, $v \in V$, $\alpha \in V^*$. Zeige $\iota(W) = W^{\circ\circ}$. *Hinweis: Proposition III.4.13.*

82. Seien $\varphi\colon V \to W$ und $\psi\colon W \to U$ zwei lineare Abbildungen mit endlichem Rang. Zeige, dass dann auch $\psi \circ \varphi\colon V \to U$ endlichen Rang hat und

$$\operatorname{rank}(\psi\circ\varphi) \leq \min\bigl\{\operatorname{rank}(\psi), \operatorname{rank}(\varphi)\bigr\}$$

gelten muss. Schließe daraus, dass für je zwei Matrizen $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n\times l}(\mathbb{K})$ folgende Ungleichung gilt:

$$\operatorname{rank}(AB) \leq \min\bigl\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\bigr\}$$

83. Bestimme die Dimension sowie eine Basis des von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0\\1\\2\\-1\\-1\\2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0\\1\\2\\1\\7\\4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0\\2\\4\\0\\6\\6 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0\\3\\6\\-5\\-11\\4 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0\\4\\8\\0\\12\\15 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Teilraums $W = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\rangle \subseteq \mathbb{R}^6$. Gib ein minimales Gleichungssystem für W an. Bestimme eine Basis von W, die aus gewissen der Vektoren v_i besteht. Gib schließlich auch ein Komplement von W an und beschreibe dieses mit einer Basis und durch ein Gleichungssystem. *Hinweis: siehe Beispiel IV.3.17.*

84. Zeige, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\-1\\2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2\\3\\-1\\6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3\\3\\-3\\6 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4\\4\\-2\\8 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 6\\11\\0\\24 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^4$ bilden, und bestimme vier dieser Vektoren v_i, die eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden. *Hinweis: siehe Beispiel IV.3.22.*

85. Zeige, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1\\-1\\1\\-1\\1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1\\2\\1\\2\\1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1\\2\\3\\1\\2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig in $\mathbb{R}^5$ sind und erweitere sie zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$. *Hinweis: Siehe Beispiel IV.3.18.*

86. Es bezeichne W den Teilraum aller $y \in \mathbb{R}^6$, für die das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrcl} 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & +6x_4 & +10x_5 & = & y_1 \\ 3x_1 & +x_2 & +x_3 & +5x_4 & +7x_5 & = & y_2 \\ 5x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +11x_4 & +17x_5 & = & y_3 \\ 7x_1 & +3x_2 & +x_3 & +11x_4 & +15x_5 & = & y_4 \\ 11x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +21x_4 & +31x_5 & = & y_5 \\ 13x_1 & +8x_2 & +9x_3 & +30x_4 & +47x_5 & = & y_6 \end{array}$$

lösbar ist. Bestimme $\dim(W)$ und eine Basis von W. Gib auch ein minimales Gleichungssystem für W an. *Hinweis: Siehe Beispiel IV.3.23.*

87. Bezeichne $L \subseteq \mathbb{R}^6$ den Lösungsraum des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrcl} x_1 & -x_2 & +x_3 & +2x_4 & -2x_5 & +2x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +4x_4 & -4x_5 & +4x_6 & = & 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +3x_4 & -3x_5 & +3x_6 & = & 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +5x_4 & -5x_5 & +5x_6 & = & 0 \end{array}$$

Bestimme $\dim(L)$ und eine Basis von L. Gib auch ein minimales Gleichungssystem für L an. Bestimme auch ein minimales Gleichungssystem für L, das aus einigen der ursprünglichen Gleichungen besteht. Bestimme ein Komplement von L und beschreibe es mit Hilfe einer Basis als auch durch ein Gleichungssystem. *Hinweis: Siehe Beispiel IV.3.19.*

88. Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrrrcr} 3x_1 & -3x_2 & -3x_3 & -12x_4 & -12x_5 & = & -21 \\ x_1 & -3x_2 & -5x_3 & -18x_4 & -20x_5 & = & -41 \\ 2x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +6x_5 & = & 15 \\ -x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +16x_4 & +17x_5 & = & 35 \end{array}$$

und gib diese in Parameterform an. Bestimme auch ein minimales Gleichungssystem für den Lösungsraum. Welche Dimension hat dieser? *Hinweis: Siehe Beispiel IV.4.2.*

89. Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & +x_2 & +3x_3 & +3x_4 & +5x_5 & = & 37 \\ x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +6x_4 & +8x_5 & = & 60 \\ 2x_1 & +x_2 & +4x_3 & +3x_4 & +8x_5 & = & 59 \\ -x_1 & -3x_2 & -7x_3 & -9x_4 & -8x_5 & = & -59 \end{array}$$

Gib auch eine Basis des Lösungsraums für das assoziierte homogene System an.

90. Bestimme die Dimension des affinen Teilraums

$$E = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ 9 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$$

von $\mathbb{R}^5$. Gib auch ein minimales Gleichungssystem für E an. *Hinweis: Siehe Beispiel IV.4.4.*

91. Bestimme die Inversen folgender reeller Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

92. Bestimme die Inverse folgender komplexer Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 3 & 2+\mathbf{i} \\ 2\mathbf{i} & 7 & -\mathbf{i} \\ -1 & -1+4\mathbf{i} & 7+\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

93. Bestimme die Inversen folgender Matrizen über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

94. Zeige, dass die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden. *Hinweis: Siehe Beispiel IV.5.2.*

95. Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = & y_1 \\ & x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & y_2 \\ & x_2 & +4x_3 & +9x_4 & = & y_3 \\ & x_2 & +8x_3 & +27x_4 & = & y_4 \end{array}$$

für alle $y_1, y_2, y_3, y_4 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar ist und gib diese Lösung an. *Hinweis: Siehe Beispiel IV.5.6.*

96. Es sei A eine invertierbare Matrix mit rationalen Einträgen. Erkläre warum dann auch die Inverse, A^{-1}, nur rationale Einträge besitzt. Gib eine invertierbare (2×2)-Matrix mit ganzzahligen Einträgen an, deren Inverse nicht-ganzzahlige Einträge hat.

97. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Weiters seien B und C zwei geordnete Basen von V und es bezeichnen B^* bzw. C^* die dazu dualen Basen von V^*. Zeige, dass aus $B^* = C^*$ schon $B = C$ folgt. *Hinweis: Betrachte die zu B^* und C^* dualen Basen B^{**} und C^{**} von V^{**} und verwende Lemma IV.6.7 aus der Vorlesung.*

98. Zeige, dass $B = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bildet, wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Basiswechselmatrix T_{BE}, wobei $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ die Standardbasis bezeichnet, und berechne damit die Koordinaten $[v]_B$ folgender Vektoren bezüglich B:

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

99. Zeige, dass $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bildet, wobei

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Matrix (bezüglich der Standardbasis) einer linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, für die $\varphi(b_1) = b_1$, $\varphi(b_2) = 2b_2$ und $\varphi(b_3) = 3b_3$ gilt. Wieviele solche Abbildungen φ gibt es? *Hinweis: Ohne Rechnung lassen sich $[\varphi]_{BB}$ und T_{EB} angeben, wobei $E = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.*

100. Zeige, dass die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\mathbb{R}^4$ bilden. Schließe daraus, dass $\mathbb{R}^4$ direkte Summe der beiden Teilräume $W = \langle b_1, b_2 \rangle$ und $W' = \langle b_3, b_4 \rangle$ ist, $\mathbb{R}^4 = W \oplus W'$. Bestimme die Matrix (bezüglich der Standardbasis) des damit assoziierten Projektors $\pi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ auf W längs W'. Berechne damit auch die Matrix des komplementären Projektors, sowie die Matrizen der beiden damit assoziierten Spiegelungen. *Hinweis: Ohne Rechnung lassen sich $[\pi]_{BB}$ und T_{EB} angeben, wobei $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ bezeichnet.*

101. Zeige, dass die Funktionen $f_1(x) := \sin(2x)$, $f_2(x) := \cos(2x)$, $f_3(x) := \sin(3x)$ und $f_4(x) := \cos(3x)$ linear unabhängig in $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ sind und daher eine Basis $B = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ des von ihnen aufgespannten Teilraums $V := \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle \subseteq F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bilden. Zeige, dass die Ableitung eine lineare Abbildung $D\colon V \to V$, $D(f) := f'$, liefert, und bestimme die Matrix $[D]_{BB}$ von D bezüglich B.

102. Zeige, dass die Polynome

$$\begin{aligned} h_0 &= 1 \\ h_1 &= z \\ h_2 &= z^2 - 1 \\ h_3 &= z^3 - 3z \\ h_4 &= z^4 - 6z^2 + 3 \end{aligned}$$

eine Basis $H = (h_0, h_1, h_2, h_3, h_4)$ von $\mathbb{R}[z]_{\leq 4}$ bilden. Bestimme die Matrix $[L]_{HH}$ der linearen Abbildung

$$L\colon \mathbb{R}[z]_{\leq 4} \to \mathbb{R}[z]_{\leq 4}, \qquad D(p) := p'' - zp'.$$

Berechne den Rang der linearen Abbildung L und gib eine Basis ihres Kerns an. Bestimme jenes Polynom $p \in \mathbb{R}[z]_{\leq 4}$ für das $[p]_H = (1,0,1,0,1)^t$ gilt. Berechne auch die Koordinaten $[q]_H$ des Polynoms $q = z^4 + 2z^3 - 6z^2 - 6z - 6$.

103. Betrachte die drei linearen Funktionale $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\gamma_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 2y + 3z, \quad \gamma_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 4y + 9z, \quad \gamma_3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x + 8y + 27z.$$

Zeige, dass $C = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ eine Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$ bildet. Bestimme eine Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$ von $\mathbb{R}^3$, deren duale Basis mit C übereinstimmt, $B^* = C$. *Hinweis: Ohne Rechnung lässt sich die Basiswechselmatrix $T_{E^*C} = T_{E^*B^*}$ angeben, wobei E^* die zur Standardbasis $E = (e_1, e_2, e_3)$ duale Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$ bezeichnet. Berechne daraus T_{EB}, siehe Korollar IV.6.21, und lies die Basis B ab.*

104. Es sei $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix. Zeige, dass geordnete Basen B und C von $\mathbb{K}^n$ existieren, sodass $T_{CB} = S$ gilt, wobei T_{CB} die Basiswechselmatrix bezeichnet. *Hinweis: Wir können für B (oder C) die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$ verwenden.*

105 (Äquivalente Matrizen). Zwei Matrizen $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ werden äquivalent genannt, falls invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ existieren, sodass $B = TAS$. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf der Menge der $(m \times n)$-Matrizen definiert. Zeige weiters: Ist $\psi \colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, $C, \tilde{C}$ geordnete Basen von V und $D, \tilde{D}$ geordnete Basis von W, dann sind die Matrizen $[\psi]_{DC}$ und $[\psi]_{\tilde{D}\tilde{C}}$ ähnlich. Zeige auch, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) A und B sind äquivalent.
(b) B lässt sich aus A durch Zeilen- und Spaltenumformungen gewinnen.
(c) Es existieren Basen C von $\mathbb{K}^m$ und D von $\mathbb{K}^n$, sodass $B = [\psi_A]_{DC}$, wobei ψ_A die lineare Abbildung $\psi_A \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\psi_A(x) = Ax$, bezeichnet.
(d) A und B haben gleichen Rang.

Schließe daraus, dass jede Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ äquivalent zu einer Matrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ ist, wobei $k = \mathrm{rank}(A)$.

106 (Ähnliche Matrizen). Zwei quadratische Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ werden ähnlich genannt, falls eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ existiert, sodass $B = SAS^{-1}$. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf der Menge der $(n \times n)$-Matrizen definiert. Zeige weiters: Ist $\varphi \colon V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums V und sind B bzw. C zwei geordnete Basen von V, dann sind die Matrizen $[\varphi]_{BB}$ und $[\varphi]_{CC}$ ähnlich. Zeige auch, dass für fixes $\lambda \in \mathbb{K}$ die beiden Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ nicht ähnlich sind. *Hinweis: Sind A und B zwei ähnliche Matrizen, dann sind auch $A - \lambda I$ und $B - \lambda I$ ähnliche Matrizen.*