Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Einführung in die lineare Algebra und Geometrie

Wintersemester 2011/12, LVN 250018

am 10. Februar 2012, 2-stündig

1. (2 Punkte) Sei $A \in M_{9\times 7}(\mathbb{R})$ eine reelle (9×7)-Matrix mit $\operatorname{rank}(A) = 4$. Bestimme die Dimensionen der beiden Teilräume

$$L := \{x \in \mathbb{R}^7 \mid Ax = 0\}, \qquad W := \{y \in \mathbb{R}^9 \mid \exists x \in \mathbb{R}^7 : Ax = y\}$$

und gib jeweils an, aus wievielen Gleichungen minimale lineare Gleichungssysteme für L und W bestehen.

2. (5 Punkte) Bestimme die Inverse der Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 4 & -2 \\ 4 & -8 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

3. (3 Punkte) Es bezeichne $W \subseteq \mathbb{R}^5$ den von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 9 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Teilraum. Bestimme $\dim(W)$ und eine Basis von W. Gib auch ein minimales lineares Gleichungssystem für W an.

4. (3 Punkte) Sei W ein Teilraum eines Vektorraums V. Was verstehen wir unter dem Quotientenraum V/W, und was ist die sogenannte kanonische Projektion $\pi\colon V \to V/W$? Erkläre auch wie die Vektorraumoperationen auf V/W definiert sind.

5. (4 Punkte) Gib bei den folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch sind?

a) Es existiert eine injektive lineare Abbildung $\mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^8$.
b) Jede surjektive lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^9$ ist auch injektiv.
c) Jedes Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ ist endlich.
d) Ist A eine Matrix mit Rang k, dann sind je k Zeilen von A linear abhängig.

6. (3 Punkte) Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, sodass $AB = I_n$. Erkläre warum dann auch $BA = I_n$ gilt.

7. (3 Punkte) Sei W ein Teilraum eines endlich-dimensionalen Vektorraums V. Zeige, dass dann auch W endlich-dimensional ist und $\dim(W) \leq \dim(V)$ gilt.

8. (4 Punkte) Betrachte folgende Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass $B = (b_1, b_2, b_3)$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bildet und bestimme die Basiswechselmatrizen T_{EB} und T_{BE} wobei $E = (e_1, e_2, e_3)$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Bestimme auch die Matrix $[\varphi]_{BB}$ der linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \varphi\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10x + 5y - 2z \\ -25x + 13y - 5z \\ -15x + 9y - 3z \end{pmatrix},$$

bezüglich der Basis B.

9. (3 Punkte) Was verstehen wir unter dem Kern einer linearen Abbildung? Zeige, dass eine lineare Abbildung genau dann injektiv ist, wenn sie trivialen Kern hat.

10. (3 Punkte) Zeige, dass die Menge der schiefsymmetrischen (3×3)-Matrizen,

$$\{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\},$$

einen Teilraum von $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ bildet und bestimme seine Dimension.

11. (2 Punkte) Gib zwei Teilräume W_1 und W_2 von $\mathbb{R}^4$ an, sodass:

$$\dim(W_1) + \dim(W_2) = \dim(\mathbb{R}^4), \quad \text{aber} \quad W_1 + W_2 \neq \mathbb{R}^4.$$

12. (5 Punkte) Zeige, dass jeder Vektorraum eine Basis besitzt.

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1. Es gilt $\dim(W) = \operatorname{rank}(A) = 4$, jedes minimale lineare Gleicghungssystem für W besteht aus $9 - \dim(W) = 9 - 4 = 5$ Gleichungen. Es gilt $\dim(L) = 7 - \operatorname{rank}(A) = 7 - 4 = 3$, jedes minimale lineare Gleichungssystem für L besteht aus $\operatorname{rank}(A) = 4$ Gleichungen.

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 & -3 \\ 3 & -5 & 4 & -2 \\ 4 & -8 & 6 & -5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 16 & -5 & -3 & 1 \\ 8 & -3 & -2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Durch Spaltenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 8 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 9 & -3 & 6 \\ 5 & -2 & 13 & -2 & 4 \\ 4 & -3 & 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die ersten drei Spalten der rechten Matrix bilden daher eine Basis von W, es gilt somit $\dim(W) = 3$. Auch ein minimales Gleichungssystem für W lässt sich ablesen:

$$\begin{array}{rrrrl} -\frac{5}{2}x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & +x_3 & & = 0 \\ -\frac{1}{2}x_1 & -\frac{3}{2}x_2 & & +x_4 & = 0 \end{array}$$

4. siehe Skriptum, II.6

5. a) wahr; b) wahr; c) falsch; d) falsch

6. siehe Skriptum, IV.2.13

7. siehe Skriptum, IV.1.20

8. Es gilt:

$$T_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \qquad T_{BE} = (T_{EB})^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ 10 & -5 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[\varphi]_{EE} = \begin{pmatrix} -10 & 5 & -2 \\ -25 & 13 & -5 \\ -15 & 9 & -3 \end{pmatrix}, \qquad [\varphi]_{BB} = T_{BE}\,[\varphi]_{EE}\,T_{EB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9. siehe Skriptum, II.3.21 und II.3.22.

10. Sei $V := \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) : A^t = -A\}$. Sind $A, B \in V$, dann gilt $(A+B)^t = A^t + B^t = (-A) + (-B) = -(A+B)$, also auch $A + B \in V$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt weiters $(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda(-A) = -(\lambda A)$, also auch $\lambda A \in V$. Dies zeigt, dass V einen Teilraum bildet. Jede schiefsymmetrische Matrix lässt sich in der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

schreiben, für eindeutig bestimmte $a, b, c \in \mathbb{R}$. Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

bilden daher eine Basis von V, es gilt somit $\dim(V) = 3$.

11. Etwa $W_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$ und $W_2 = \langle e_1, e_3 \rangle$. Es gilt $\dim(W_1) = 2 = \dim(W_2)$, also $\dim(W_1) + \dim(W_2) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, aber $W_1 + W_2 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle \neq \mathbb{R}^4$.

12. siehe Skriptum, III.3.22