Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Einführung in die lineare Algebra und Geometrie

Wintersemester 2011/12, LVN 250018

am 9. März 2012, 2-stündig

1. (5 Punkte) Bestimme die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 9 & 13 \\ -3 & -4 & -6 & -7 \end{pmatrix}.$$

2. (4 Punkte) Was verstehen wir unter einer Basis eines Vektorraums? Was ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum? Was ist die Dimension eines endlich-dimensionalen Vektorraums? Gib jeweils genaue Definitionen.

3. (2 Punkte) Gib eine Basis des Vektorraums $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ aller reellen (2×3)-Matrizen an. Was ist seine Dimension?

4. (5 Punkte) Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlichen-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Dimensionen von V, W, $\ker(\varphi)$ und $\operatorname{img}(\varphi)$? Verwende dies um zu zeigen, dass eine lineare Abbildung $\psi\colon V \to V$ genau dann injektiv ist, wenn sie surjektiv ist.

5. (2 Punkte) Sei $0 \neq x \in \mathbb{R}^4$. Bestimme den Rang der (4×4)-Matrix $(0|x|2x|3x)$.

6. (4 Punkte) Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch?

- Für jede lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ gilt $\operatorname{rank}(\varphi) \geq 2$.
- Für jede lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ gilt $\operatorname{rank}(\varphi) \leq 3$.
- Es existiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ mit $\operatorname{rank}(\varphi) = 2$.
- Jede lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ mit $\operatorname{rank}(\varphi) = 3$ ist injektiv.

7. (2 Punkte) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig in V. Zeige, dass dann wenigstens einer dieser Vektoren als Linearkombination der restlichen geschrieben werden kann.

8. (4 Punkte) Bestimme die Dimension und ein minimales Gleichungssystem des folgenden affinen Teilraums von $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 14 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \\ 18 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

9. (2 Punkte) Zwei quadratische Matrizen $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ werden ähnlich genannt, falls eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ existiert, sodass $B = SAS^{-1}$. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf der Menge der $(n \times n)$-Matrizen definiert.

10. (5 Punkte) Erkläre wie lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen mit Hilfe von Basen durch Matrizen beschrieben werden können. Wieviel Zeilen und Spalten haben diese Matrizen? Wie verhalten sie sich bezüglich Addition und Komposition linearer Abbildungen? Wie hängt der Rang der Matrix mit dem Rang der zugehörigen linearen Abbildung zusammen? Was geschieht bei Basiswechsel?

11. (5 Punkte) Formuliere und beweise den Austauschsatz von Steinitz.

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 9 & 13 \\ -3 & -4 & -6 & -7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Siehe Skriptum

3. Die folgenden Matrizen bilden eine Basis von $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Dimension gilt daher: $\dim M_{2\times 3}(\mathbb{R}) = 6$.

4. Es gilt $\dim(V) = \dim \ker(\varphi) + \dim \operatorname{img}(\varphi)$, siehe Skriptum IV.2.11.

5. Für $0 \neq x \in \mathbb{R}^4$ gilt: $\operatorname{rank}(0|x|2x|3x) = 1$.

6. falsch, wahr, wahr, wahr

7. Da die Vektoren linear abhängig sind, existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, die nicht alle verschwinden, sodass $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$. Wähle i so, dass $\lambda_i \neq 0$. Es folgt

$$v_i = -\lambda_i^{-1}\lambda_1 v_1 - \cdots - \lambda_i^{-1}\lambda_{i-1}v_{i-1} - \lambda_i^{-1}\lambda_{i+1}v_{i+1} - \cdots - \lambda_i^{-1}\lambda_n v_n,$$

also lässt sich v_i als Linearkombination der restlichen Vektoren schreiben.

8. Mit Spaltenumformungen finden wir folgende Basis des zugehörigen linearen Teilraums:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der affine Teilraum hat daher Dimension 3. Ein minimales Gleichungssystem ist:

$$\begin{array}{rrrrcr} -2x_1 & +x_2 & & & = & -3 \\ -3x_1 & & -4x_3 & +x_4 & = & -5 \end{array}$$

9. Aus $B = SAS^{-1}$ folgt $A = (S^{-1})B(S^{-1})^{-1}$, wobei auch S^{-1} invertierbar ist. Dies zeigt, dass die Relation symmetrisch ist. Wegen $A = I_n A I_n^{-1}$ ist sie auch reflexsiv. Schließlich folgt aus $B = SAS^{-1}$ und $C = TBT^{-1}$ auch $C = (TS)A(TS)^{-1}$, wobei S, T und daher auch TS invertierbar sind. Damit ist auch die Transitivität gezeigt.

10. Siehe Skriptum IV.6.

11. siehe Sktiptum IV.1.4.