Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Einführung in die lineare Algebra und Geometrie

Wintersemester 2011/12, LVN 250018

am 20. April 2012, 2-stündig

1. (2 Punkte) Wann werden zwei Teilräume W und W' eines Vektorraums V komplementär genannt?

2. (5 Punkte) Betrachte folgende beiden Teilräume von $\mathbb{R}^4$:

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad W' = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Zeige $W \oplus W' = \mathbb{R}^4$ und bestimme die Matrix (bezüglich der Standardbasis) der Projektion auf W längs W'.

3. (3 Punkte) Definiere die Begriffe "lineare Unabhängigkeit", "Erzeugendensystem" und "Basis".

4. (4 Punkte) Bestimme eine Basis des Lösungsraums folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrcl}
2x_1 & +2x_2 & +12x_3 & +8x_4 & & +6x_6 & = & 0 \\
2x_1 & +6x_2 & +16x_2 & & -4x_5 & +2x_6 & = & 0 \\
2x_1 & +2x_2 & +12x_3 & +8x_4 & +2x_5 & +12x_6 & = & 0 \\
-x_1 & -x_2 & -6x_3 & -4x_4 & +5x_5 & +12x_6 & = & 0
\end{array}$$

5. (3 Punkte) Zwei Matrizen $A, B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$ werden äquivalent genannt, falls invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ existieren, sodass $B = SAT$. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf $M_{n\times m}(\mathbb{K})$ definiert.

6. (2 Punkte) Was verstehen wir unter dem Rang einer linearen Abbildung und was unter dem Rang einer Matrix?

7. (2 Punkte) Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen, und $\psi \in \mathrm{GL}(W)$. Zeige $\mathrm{rank}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{rank}(\varphi)$.

8. (3 Punkte) Zeige, dass die Menge der symmetrischen (3×3)-Matrizen,

$$\left\{ A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \;\middle|\; A^t = A \right\},$$

einen Teilraum von $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ bildet und bestimme seine Dimension.

9. (4 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $y \in \mathbb{K}^m$. Zeige, dass das inhomogene Gleichungssystem $Ax = y$ genau dann eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ besitzt, wenn $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|y)$ gilt.

10. (4 Punkte) Betrachte den von den Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

aufgespannten Teilraum $V := \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle$ von $\mathbb{R}^4$. Bestimme $\dim(V)$ sowie eine Basis von V, die aus gewissen der Vektoren v_i besteht.

11. (5 Punkte) Bestimme die Matrix (bezüglich der Standardbasis) einer linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, für die

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Ist φ invertierbar? Wieviele solche lineare Abbildungen φ gibt es?

12. (3 Punkte) Sei $\varphi\colon V \to U$ eine lineare Abbildung, und seien W bzw. W' zwei Teilräume von V, sodass:

$$\dim(V) = 11, \qquad \dim(U) = 7, \qquad \operatorname{rank}(\varphi) = 6,$$
$$\dim(W) = 8, \qquad \dim(W') = 5, \qquad \dim(W \cap W') = 3.$$

Bestimme folgende Dimensionen:

$$\dim(V^*) = \qquad \dim(L(V,U)) = \qquad \dim(V/W) =$$
$$\dim(W + W') = \qquad \dim(\operatorname{img}(\varphi)) = \qquad \dim(\ker(\varphi)) =$$

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1. siehe Skriptum, Definition II.5.6

2. Die vier Vektoren, die W und W' aufspannen, bilden eine Basis von $\mathbb{R}^4$, denn die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1&1&0&1 \\ 2&3&1&2 \\ 0&0&1&2 \\ 0&0&2&5 \end{pmatrix}$ ist invertierbar mit Inverser $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3&-1&7&-3 \\ -2&1&-5&2 \\ 0&0&5&-2 \\ 0&0&-2&1 \end{pmatrix}$. Da diese vier Vektoren $\mathbb{R}^4$ aufspannen gilt $W + W' = \mathbb{R}^4$, und da sie linear unabhängig sind ist $W \cap W' = \{0\}$. Insgesamt also $W \oplus W' = \mathbb{R}^4$. Es bezeichne B die geordnete Basis von $\mathbb{R}^4$, die aus den vier Spalten der Matrix A besteht. Für die Projektion π auf W längs W' gilt daher $[\pi]_{BB} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$. Bezeichnet E die Standardbasis, dann erhalten wir für die Basiswechselmatrizen $T_{EB} = A$ und $T_{BE} = T_{EB}^{-1} = A^{-1}$. Für die Matrix von π bezüglich der Standardbasis folgt $[\pi]_{EE} = T_{EB}[\pi]_{BB}T_{BE} = A[\pi]_{BB}A^{-1}$, also

$$[\pi]_{EE} = \begin{pmatrix} 1&1&0&1 \\ 2&3&1&2 \\ 0&0&1&2 \\ 0&0&2&5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3&-1&7&-3 \\ -2&1&-5&2 \\ 0&0&5&-2 \\ 0&0&-2&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&2&-1 \\ 0&1&-1&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}.$$

3. siehe Skriptum, Kapitel III.

4. Wir bringen die Koeffizientenmatrix durch Zeilenumformungen auf reduzierte Zeilenstufenform,

$$\begin{pmatrix} 2&2&12&8&0&6 \\ 2&6&16&0&-4&2 \\ 2&2&12&8&2&12 \\ -1&-1&-6&-4&5&12 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&1&6&4&0&3 \\ 0&4&4&-8&-4&-4 \\ 0&0&0&0&2&6 \\ 0&0&0&0&5&15 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&1&6&4&0&3 \\ 0&1&1&-2&-1&-1 \\ 0&0&0&0&1&3 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1&0&5&6&0&1 \\ 0&1&1&-2&0&2 \\ 0&0&0&0&1&3 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix},$$

und lesen eine Basis b_1, b_2, b_3 des Lösungsraums ab:

$$b_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Die Relation ist reflexsiv, denn $A = I_nAI_m$, $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, und $I_m \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$. Die Relation ist symmetrisch, denn aus $B = SAT$ mit $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $T \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ folgt $A = S^{-1}BT^{-1}$, $S^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $T^{-1} \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$. Die Relation ist transitiv, denn aus $B = S_1AT_1$ und $C = S_2BT_2$ mit $S_1, S_2 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $T_1, T_2 \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ folgt $C = (S_2S_1)A(T_1T_2)$, wobei $S_2S_1 \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $T_1T_2 \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$.

6. siehe Skriptum, Definitionen IV.2.19 bzw. IV.3.1.

7. Es gilt $\operatorname{img}(\psi \circ \varphi) = \psi(\varphi(V)) = \psi(\operatorname{img}(\varphi))$, also ist die Einschränkung $\psi|_{\operatorname{img}(\varphi)} \colon \operatorname{img}(\varphi) \to \operatorname{img}(\psi \circ \varphi)$ surjektiv. Da $\psi \in \mathrm{GL}(W)$ ist diese Einschränkung auch injektiv und liefert daher einen linearen Isomorphismus $\operatorname{img}(\varphi) \cong \operatorname{img}(\psi \circ \varphi)$. Folglich gilt $\operatorname{rank}(\varphi) = \dim(\operatorname{img}(\varphi)) = \dim(\operatorname{img}(\psi \circ \varphi)) = \operatorname{rank}(\psi \circ \varphi)$. Siehe auch Proposition IV.2.23 im Vorlesungsskriptum.

8. Bezeichne $V = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{K}) \mid A^t = A\}$. Sind $A, B \in V$, dann gilt $(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$, also $A + B \in V$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt weiters $(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A$, also auch $\lambda A \in V$. Dies zeigt, dass V einen Teilraum bildet. Jede symmetrische (3×3)-Matrix lässt sich in der Form

$$\begin{pmatrix} a & e & g \\ e & b & f \\ g & f & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix} + e\begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix} + g\begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}$$

schreiben, für eindeutig bestimmte $a, b, c, e, f, g \in \mathbb{R}$. Die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}$$

bilden daher eine Basis von V, es gilt somit $\dim(V) = 6$.

9. siehe Skriptum, Satz IV.4.1.

10. Mittels Zeilenumformungen erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & -3 & -1 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist $\dim(V) = 3$, und die Vektoren v_1, v_3, v_4 bilden eine Basis von V.

11. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1&0&1\\0&1&3\\1&2&6 \end{pmatrix}$ ist invertierbar mit Inverser $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0&-2&1\\-3&-5&3\\1&2&-1 \end{pmatrix}$. Folglich bilden die Spalten von A eine Basis B von $\mathbb{R}^3$. Bezeichnet E die Standardbasis, dann gilt $[\varphi]_{EB} = \begin{pmatrix} 1&4&2\\2&5&1\\3&6&0 \end{pmatrix}$. Die gesuchte Matrix ist daher

$$[\varphi]_{EE} = [\varphi]_{EB} T_{BE} = [\varphi]_{EB} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1&4&2\\2&5&1\\3&6&0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0&-2&1\\-3&-5&3\\1&2&-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10&-18&11\\-14&-27&16\\-18&-36&21 \end{pmatrix}$$

Die lineare Abbildung φ ist nicht invertierbar, denn $\operatorname{rank}([\varphi]_{EB}) = 2 < 3$. Da B eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bildet, gibt es nur eine solche lineare Abbildung φ.

12. Nach den bekannten Dimensionsformeln gilt:

$$\begin{aligned} \dim(V^*) &= \dim(V) = 11 \\ \dim(L(V,U)) &= \dim(V) \cdot \dim(U) = 77 \\ \dim(V/W) &= \dim(V) - \dim(W) = 3 \\ \dim(W + W') &= \dim(W) + \dim(W') - \dim(W \cap W') = 10 \\ \dim(\operatorname{img}(\varphi)) &= \operatorname{rank}(\varphi) = 6 \\ \dim(\ker(\varphi)) &= \dim(V) - \dim(\operatorname{img}(\varphi)) = 5 \end{aligned}$$