Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Einführung in die lineare Algebra und Geometrie

Wintersemester 2011/12, LVN 250018

am 25. Mai 2012, 2-stündig

1. (5 Punkte) Betrachte die lineare Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $\psi(x) := Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 17 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimme $\operatorname{rank}(\psi)$, eine Basis von $\ker(\psi)$ und eine Basis von $\operatorname{img}(\psi)$.

2. (3 Punkte) Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Warum ist jede injektive lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ surjektiv?

3. (2 Punkte) Was verstehen wir unter dem Rang einer linearen Abbildung und was unter dem Rang einer Matrix?

4. (3 Punkte) Seien $\varphi\colon U \to V$ und $\psi\colon V \to W$ zwei lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Zeige $\operatorname{rank}(\psi \circ \varphi) \le \operatorname{rank}(\psi)$.

5. (5 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $y \in \mathbb{K}^m$. Zeige, dass das inhomogene Gleichungssystem $Ax = y$ genau dann eine Lösung $x \in \mathbb{K}^n$ besitzt, wenn $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|y)$ gilt.

6. (3 Punkte) Zeige, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind und ergänze sie zu einer Basis von $\mathbb{R}^6$.

7. (2 Punkte) Betrachte die beiden Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ und $g(x) = e^{2x}$. Zeige, dass f und g (im Vektorraum aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) linear unabhängig sind.

8. (2 Punkte) Zeige $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ für je zwei Matrizen $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$. Dabei bezeichnet $\operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^k C_{ii}$ die Spur von $C \in M_{k\times k}(\mathbb{K})$.

9. (3 Punkte) Sei $\varphi\colon V \to U$ eine lineare Abbildung, und seien W bzw. W' zwei Teilräume von V, sodass:

$$\dim(V) = 7, \qquad \dim(U) = 8, \qquad \operatorname{rank}(\varphi) = 6,$$
$$\dim(W) = 3, \qquad \dim(W') = 4, \qquad \dim(W + W') = 5.$$

Bestimme folgende Dimensionen:

$$\dim(V^*) = \qquad \dim(L(V,U)) = \qquad \dim(V/W) =$$
$$\dim(W \cap W') = \qquad \dim(\operatorname{img}(\varphi)) = \qquad \dim(\ker(\varphi)) =$$

10. (5 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass die Menge der symmetrischen Matrizen,

$$M_{n\times n}^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K}) := \left\{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \;\middle|\; A^t = A \right\},$$

einen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ bildet. Bestimme die Dimensionen von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und $M_{n\times n}^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$.

11. (3 Punkte) Zwei symmetrische Matrizen, $A, B \in M_{n\times n}^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$, werden kongruent genannt, falls $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ existiert, sodass $B = S^t A S$. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf $M_{n\times n}^{\mathrm{sym}}(\mathbb{K})$ definiert.

12. (4 Punkte) Gib bei den folgenden Aussagen an, ob sie wahr oder falsch sind.

(a) Es existiert eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^5$ mit $\operatorname{rank}(\varphi) = 6$.

(b) Jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge ist selbst linear unabhängig.

(c) Es existieren Teilräume V und W von $\mathbb{R}^4$, sodass $\dim(V \cap W) = 1$ und $\dim(V) = 3 = \dim(W)$.

(d) Es existiert eine surjektive lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$.

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1. Wir bringen die Matrix auf reduzierte Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 17 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 17 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen eine Basis von $\ker(\psi)$ ab:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch Spaltenumformungen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 17 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

also bildet

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $\operatorname{img}(\psi)$. Insbesondere ist $\operatorname{rank}(\psi) = 3$.

2. Da $\varphi\colon V \to V$ injektiv ist, liefert es einen Isomorphismus $V \cong \operatorname{img}(\varphi)$, also $\dim(V) = \dim(\operatorname{img}(\varphi))$. Da $\operatorname{img}(\varphi) \subseteq V$ folgt $\operatorname{img}(\varphi) = V$, also ist φ surjektiv.

3. $\operatorname{rank}(\varphi) = \dim(\operatorname{img}(\varphi))$, siehe Skriptum, Definitionen IV.2.19 bzw. IV.3.1.

4. Offensichtlich gilt $\operatorname{img}(\psi \circ \varphi) \subseteq \operatorname{img}(\psi)$, also $\dim(\operatorname{img}(\psi \circ \varphi)) \leq \dim(\operatorname{img}(\psi))$ und daher $\operatorname{rank}(\psi \circ \varphi) \leq \operatorname{rank}(\psi)$.

5. Siehe Skriptum, Satz IV.4.1.

6. Wir fassen die Vektoren zu einer Matrix zusammen und bringen diese mittels Spaltenumformungen auf Spaltenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass v_1, v_2, v_3 linear unabhängig in $\mathbb{R}^6$ sind. Auch lesen wir daraus ab, dass $v_1, v_2, v_3, e_4, e_5, e_6$ eine Basis von $\mathbb{R}^6$ bildet, wobei e_i die Einheitsvektoren bezeichnen.

7. Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sodass $\lambda f + \mu g = 0$. Einsetzen von 0 und 1 liefert:

$$0 = (\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = \lambda e^0 + \mu e^0 = \lambda + \mu$$
$$0 = (\lambda f + \mu g)(1) = \lambda f(1) + \mu g(1) = \lambda e^1 + \mu e^2$$

Subtrahieren wir e-mal die erste Gleichung von der zweiten erhalten wir $0 = \mu(e^2 - e)$ also $\mu = 0$, denn $e^2 - e \neq 0$. Mit Hilfe der ersten Gleichung folgt dann auch $\lambda = 0$, also sind f und g linear unabhängig.

8. Durch direkte Rechnung erhalten wir

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{m} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} B_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} B_{ji} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (BA)_{jj} = \operatorname{tr}(BA).$$

9. Nach den bekannten Dimensionsformeln gilt:

$$\begin{aligned}
\dim(V^*) &= \dim(V) = 7 \\
\dim(L(V,U)) &= \dim(V) \cdot \dim(U) = 56 \\
\dim(V/W) &= \dim(V) - \dim(W) = 4 \\
\dim(W \cap W') &= \dim(W) + \dim(W') - \dim(W + W') = 2 \\
\dim(\operatorname{img}(\varphi)) &= \operatorname{rank}(\varphi) = 6 \\
\dim(\ker(\varphi)) &= \dim(V) - \dim(\operatorname{img}(\varphi)) = 1
\end{aligned}$$

10. Sind A und B zwei symmetrische $(n \times n)$-Matrizen und ist $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt $(A+B)^t = A^t + B^t = A + B$ sowie $(\lambda A)^t = \lambda A^t = \lambda A$. Somit sind auch $A+B$ und λA symmetrisch, also bildet $M^{\mathrm{sym}}_{n\times n}(\mathbb{K})$ einen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Bezeichne $E_{ij} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ jene Matrix, deren einizge von Null verschiedene Eintragung eine Eins in der i-ten Zeil und j-ten Spalte ist. Dann bildet E_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, eine Basis von $M_{n\times n}(\mathbb{K})$, es gilt daher $\dim(M_{n\times n}(\mathbb{K})) = n^2$. Weiters ist $E_{11}, \dots, E_{nn}, E_{ij} + E_{ji}$, $1 \leq i < j \leq n$, eine Basis von $M^{\mathrm{sym}}_{n\times n}(\mathbb{K})$, also $\dim(M^{\mathrm{sym}}_{n\times n}(\mathbb{K})) = n(n+1)/2$.

11. Die Relation ist reflexsiv, denn $A = I_n^t A I_n$ und $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Die Relation ist symmetrisch, denn aus $B = S^t A S$ mit $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ folgt $A = (S^{-1})^t B S^{-1}$ und $S^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Die Relation ist transitiv, denn aus $B = S^t A S$ und $C = T^t B T$ mit $S, T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ folgt $C = (ST)^t A (ST)$, wobei $ST \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

12. (a) falsch; (b) wahr; (c) falsch; (d) falsch