Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Einführung in die lineare Algebra und Geometrie

Wintersemester 2011/12, LVN 250018

am 6. Juli 2012, 2-stündig

1 (4 Punkte)**.** Bestimme die Dimension sowie ein minimales Gleichungssystem des folgenden affinen Teilraums von $\mathbb{R}^5$:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}5\\4\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\8\\5\\5\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\-8\\-4\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}10\\8\\4\\6\\4\end{pmatrix} \right\rangle .$$

2 (5 Punkte)**.** Bestimme die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & -1\\ 2 & 5 & 4 & -2\\ 3 & 8 & 8 & -2\\ 1 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}.$$

3 (3 Punkte)**.** Ergänze die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\-1\\3\\2\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\6\\3\\-6\end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$.

4 (3 Punkte)**.** Definiere die Begiffe "lineare Unabhängigkeit", "Erzeugendensystem" und "Basis".

5 (2 Punkte)**.** Was verstehen wir unter dem Rang einer linearen Abbildung und was unter dem Rang einer Matrix?

6 (2 Punkte)**.** Sei $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$. Bestimme die Ränge der Matrizen xx^t und x^tx.

7 (5 Punkte)**.** Sei $\pi\colon V \to V$ ein Projektor. Zeige $V = \operatorname{img}(\pi) \oplus \ker(\pi)$.

8 (2 Punkte)**.** Zeige, dass die beiden Funktionen $\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linear unabhängig im Vektorraum aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind.

9 (3 Punkte)**.** Bestimme eine Basis des Lösungsraums:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +4x_4 & +5x_5 & +6x_6 & = & 0\\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & +2x_5 & +3x_6 & = & 0 \end{array}$$

10 (3 Punkte)**.** Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $AB = I_n$. Erkläre warum dann auch $BA = I_n$ gilt.

11 (3 Punkte)**.** Bestimme die Matrix (bezüglich der Standardbasen) einer linearen Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \varphi\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}.$$

Wieviele solche Abbildungen φ gibt es?

12 (5 Punkte)**.** Gib jeweils an ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Sind V und W zwei 3-dimensionale Teilräume von $\mathbb{R}^5$, so gilt $\dim(V \cap W) \geq 1$.

(b) Sind $\varphi, \psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare Abbildungen mit $\operatorname{rank}(\varphi) \geq 2$ und $\operatorname{rank}(\psi) \geq 2$, dann gilt auch $\operatorname{rank}(\psi \circ \varphi) \geq 2$.

(c) Jede linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{R}^5$ ist endlich.

(d) Es existiert eine injektive lineare Abbildung $\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$.

(e) Für jede lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ gilt $\operatorname{rank}(\varphi) \leq 4$.

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1. Durch Spaltenumformungen erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & -5 & 10 \\ 4 & 8 & -8 & 8 \\ 3 & 5 & -4 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der affine Teilraum hat daher Dimension 3 und wird durch folgendes minimale Gleichungssystem beschrieben:

$$\begin{array}{cccccccc} -\frac{6}{5}x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & +x_3 & & +x_5 & = & \frac{39}{5} \\ -x_1 & & +x_3 & +x_4 & & = & 6 \end{array}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 3 & 8 & 8 & -2 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -10 & 5 & -2 \\ -4 & 7 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Einfache Spaltenumformungen zeigen,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle,$$

die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden daher eine Basis von $\mathbb{R}^5$.

4. Siehe Kapitel III im Skriptum.

5. Siehe Definition IV.2.19 im Skriptum.

6. Es gilt $\operatorname{rank}(xx^t) = 1 = \operatorname{rank}(x^t x)$.

7. Sei $\pi\colon V \to V$ ein Projektoir, d.h. $\pi^2 = \pi$. Für jedes $v \in V$ gilt $v = \pi(v) + (v - \pi(v))$, wobei $\pi(v) \in \operatorname{img}(\pi)$ und $v - \pi(v) \in \ker(\pi)$, denn $\pi(v - \pi(v)) = \pi(v) - \pi^2(v) = \pi(v) - \pi(v) = 0$. Dies zeigt $V = \operatorname{img}(\pi) + \ker(\pi)$. Es gilt aber auch $\operatorname{img}(\pi) \cap \ker(\pi) = \{0\}$, denn für $v \in \operatorname{img}(\pi) \cap \ker(\pi)$ existiert $w \in V$ mit $v = \pi(w)$ und daher $0 = \pi(v) = \pi(\pi(w)) = \pi(w) = v$. Zusammenfassend folgt $V = \operatorname{img}(\pi) \oplus \ker(\pi)$, vgl. Proposition II.5.8 im Skriptum.

8. Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, sodass $\lambda \sin + \mu \cos = 0$, d.h. $\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = 0$, für jedes $x \in \mathbb{R}$. Setzen wir $x = 0$ und $x = \pi/2$, erhalten wir

$$0 = \lambda \sin(0) + \mu \cos(0) = \mu \quad \text{und} \quad 0 = \lambda \sin(\pi/2) + \mu \cos(\pi/2) = \lambda.$$

Somit gilt $\lambda = 0 = \mu$, also sind sin und cos linear unabhängig.

9. Mittels Zeilenumformungen sehen wir, dass das Gleichungssystem äquivalent zu

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & & +x_5 & +2x_6 & = & 0 \\ & & & +x_4 & +x_5 & +x_6 & = & 0 \end{array}$$

ist. Eine Basis des Lösungsraums ist daher:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

10. Siehe Korollar IV.2.13 im Skriptum.

11. Es bezeichne E die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$, F die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ und B die Basis $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ von $\mathbb{R}^3$. Es gilt daher

$$[\varphi]_{FB} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die gesuchte Matrix folgt daher:

$$\begin{aligned} [\varphi]_{FE} = [\varphi]_{FB} T_{BE} = [\varphi]_{FB} T_{EB}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es gibt genau eine solche Abbildung φ.

12.

(a) wahr, denn aus der Dimensionsformel folgt:

$$\begin{aligned} \dim(V \cap W) &= \dim(V) + \dim(W) - \dim(V + W) \\ &= 6 - \dim(V + W) \geq 6 - 5 = 1. \end{aligned}$$

(b) falsch, betrachte etwa $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt $\operatorname{rank}(A) = 2 = \operatorname{rank}(B)$ aber $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}\left(\begin{smallmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{smallmatrix}\right) = 1$.

(c) wahr

(d) falsch

(e) wahr