Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Einführung in die lineare Algebra und Geometrie

Wintersemester 2011/12, LVN 250018

am 5. Oktober 2012, 2-stündig

1 (7 Punkte)**.** Betrachte die lineare Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^5$, $\psi(x) = Ax$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 7 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 11 & 12 & 3 & 8 \\ 3 & 6 & 10 & 10 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestimme $\operatorname{rank}(\psi)$, eine Basis von $\operatorname{img}(\psi)$ und eine Basis von $\ker(\psi)$. Gib auch minimale Gleichungssysteme für $\operatorname{img}(\psi)$ und $\ker(\psi)$ an. Bestimme komplementäre Teilräume zu $\operatorname{img}(\psi)$ und $\ker(\psi)$.

2 (5 Punkte)**.** Betrachte die beiden komplementären Teilräume von $\mathbb{R}^4$,

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \text{und} \quad W' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad \mathbb{R}^4 = W \oplus W'.$$

Bestimme die Matrix (bez. der Standardbasis) der Spiegelung an W längs W'.

3 (3 Punkte)**.** Was verstehen wir unter dem Kern einer linearen Abbildung? Zeige, dass eine lineare Abbildung genau dann injektiv ist, wenn sie trivialen Kern hat.

4 (3 Punkte)**.** Seien $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m\times k}(\mathbb{R})$, $C \in M_{k\times l}(\mathbb{R})$. Zeige

$$(AB)C = A(BC).$$

Gib zwei Matrizen E und F an, für die $EF \neq FE$ gilt.

5 (2 Punkte)**.** Sei $\varphi\colon V \to W$ linear. Zeige,

$$V/\ker(\varphi) \cong \operatorname{img}(\varphi).$$

6 (5 Punkte)**.** Seien W_1 und W_2 zwei Teilräume eines endlich dimensionalen Vektorraums V. Formuliere und beweise die Gleichung, die die Dimensionen von W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ und $W_1 + W_2$ in Beziehung bringt.

7 (5 Punkte)**.** Erkläre den Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen.

8 (5 Punkte)**.** Formuliere und beweise den Austauschsatz von Steinitz.

9 (5 Punkte)**.** Gib jeweils an ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Hat eine Matrix Rang k, dann sind je k Zeilen linear unabhängig.

(b) Sind $\varphi, \psi\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ lineare Abbildungen mit $\operatorname{rank}(\varphi) \leq 3$ und $\operatorname{rank}(\psi) \leq 3$, dann gilt auch $\operatorname{rank}(\psi \circ \varphi) \leq 3$.

(c) Jede linear unabh. Teilmenge von $\mathbb{R}^5$ enthält ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^5$.

(d) Es existiert eine surjektive lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$.

(e) Besitzt eine Matrix $A \in M_{2\times 3}(\mathbb{R})$ eine Rechtsinverse, so besitzt sie auch eine Linksinverse.

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1. Durch Zeilenumformungen erhalten wir:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&3&1&2\\1&3&5&6&1&4\\2&4&7&7&3&4\\3&7&11&12&3&8\\3&6&10&10&4&6\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&2&3&3&1&2\\0&1&2&3&0&2\\0&0&1&1&1&0\\0&1&2&3&0&2\\0&0&1&1&1&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&2&3&3&1&2\\0&1&2&3&0&2\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&2&0&0&-2&2\\0&1&0&1&-2&2\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&0&-2&2&-2\\0&1&0&1&-2&2\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Daraus erhalten wir $\operatorname{rank}(\psi)=3$, ein minimales Gleichungssystem für $\ker(\psi)$,

$$\begin{array}{cccccccc}x_1&&&-2x_4&+2x_5&-2x_6&=&0\\&x_2&&+x_4&-2x_5&+2x_6&=&0\\&&x_3&+x_4&+x_5&&=&0\end{array}$$

eine Basis für $\ker(\psi)$,

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}2\\-2\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

und einen zu $\ker(\psi)$ komplementären Teilraum,

$$V=\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\rangle=\big\{x\in\mathbb{R}^6 : x_4=x_5=x_6=0\big\}.$$

Durch Spaltenumformungen erhalten wir:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&3&1&2\\1&3&5&6&1&4\\2&4&7&7&3&4\\3&7&11&12&3&8\\3&6&10&10&4&6\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&2&3&0&2\\2&0&1&1&1&0\\3&1&2&3&0&2\\3&0&1&1&1&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\2&0&1&1&1&0\\3&1&0&0&0&0\\3&0&1&1&1&0\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0\\2&0&1&0&0&0\\3&1&0&0&0&0\\3&0&1&0&0&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\2&0&1&0&0&0\\2&1&0&0&0&0\\3&0&1&0&0&0\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\2&1&0&0&0&0\\1&0&1&0&0&0\end{pmatrix}$$

Daraus erhalten wir eine Basis für $\operatorname{img}(\psi)$,

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\\1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},$$

einen zu $\operatorname{img}(\psi)$ komplementären Teilraum,

$$W=\langle\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\rangle=\big\{y\in\mathbb{R}^5 : y_1=y_2=y_3=0\big\},$$

sowie ein minimales Gleichungssystem für $\operatorname{img}(\psi)$,

$$\begin{array}{ccccccc}-2y_1&-y_2&&+y_4&&=&0\\-y_1&&-y_3&&+y_5&=&0\end{array}$$

2. Bezeichne E die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ und B die Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet $\sigma \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die gesuchte Spiegelung, dann gilt daher

$$[\sigma]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad T_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 4 & 10 \\ 4 & 11 & 6 & 16 \end{pmatrix},$$

und eine Rechnung zeigt:

$$T_{EB}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -5 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Matrix ist daher

$$\begin{aligned} [\sigma]_{EE} &= T_{EB}[\sigma]_{BB}T_{BE} = T_{BE}^{-1}[\sigma]_{BB}T_{BE} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 2 & -5 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \\ -3 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 8 & 4 & 10 \\ 4 & 11 & 6 & 16 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 15 & 36 & 16 & 36 \\ -4 & -9 & -4 & -8 \\ -14 & -36 & -15 & -36 \\ 4 & 10 & 4 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. Siehe Definition II.3.21 und Proposition II.3.22 im Skriptum.

4. Für $(AB)C = A(BC)$, siehe Proposition II.4.3 im Skriptum. Die Matrizen $E = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $F = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ erfüllen $EF = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = FE$.

5. Siehe Korollar II.6.6 im Skriptum.

6. Siehe Satz IV.2.1 im Skriptum.

7. Siehe Skriptum.

8. Siehe Satz IV.1.4 im Skriptum.

9. (a) falsch
(b) wahr, denn $\operatorname{rank}(\psi \circ \varphi) \leq \operatorname{rank}(\psi) = 3$.
(c) falsch
(d) falsch
(e) falsch, etwa besitzt $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ eine Rechtsinverse, $AA^t = I_2$, aber keine Linksinverse.