Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Einführung in die lineare Algebra und Geometrie

Wintersemester 2011/12, LVN 250018

am 30. November 2012, 2-stündig

1 (5 Punkte)**.** Zeige

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

für je zwei invertierbare Matrizen A und B. Verwende dies um die Inverse folgender Matrix zu bestimmen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 (3 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Erkläre, warum jede injektive lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ auch surjektiv ist.

3 (2 Punkte)**.** Was verstehen wir unter dem Rang einer linearen Abbildung und dem Rang einer Matrix.

4 (2 Punkte)**.** Bestimme die Ränge der Matrizen

$$\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix},$$

wobei I_n die $(n \times n)$-Einheitsmatrix bezeichnet.

5 (5 Punkte)**.** Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $B \in M_{n\times l}(\mathbb{R})$. Zeige

$$\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank}(A) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank}(B).$$

6 (4 Punkte)**.** Seien W_1 und W_2 zwei endlich dimensionale Teilräume eines Vetorraums V. Formuliere und beweise die Formel, die die Dimensionen von W_1, W_2, $W_1 \cap W_2$ und $W_1 + W_2$ in Beziehung bringt.

7 (4 Punkte)**.** Betrachte die beiden komplementären Teilräume

$$W_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{und} \qquad W_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

von $\mathbb{R}^4$. Bestimme die Matrix (bezüglich der Standardbasis) einer linearen Abbidung $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, für die $\varphi(W_1) = W_2$ und $\varphi(W_2) = W_1$ gilt.

8 (4 Punkte)**.** Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}).$$

Zeige, dass $V := \{X \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : AX = XA\}$ einen linearen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ bildet und bestimme seine Dimension.

9 (3 Punkte)**.** Bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrcl} 2x_1 & +4x_2 & & +2x_4 & +6x_5 & = & 14 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +9x_4 & +5x_5 & = & 19 \\ 3x_1 & +6x_2 & +2x_3 & +11x_4 & +11x_5 & = & 33 \end{array}$$

10 (4 Punkte)**.** Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeige, dass das Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ besitzt, wenn $\operatorname{rank}(A|y) = \operatorname{rank}(A)$.

11 (4 Punkte)**.** Gib jeweils an ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) $\operatorname{rank}(A + B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$, für je zwei Matrizen $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
(b) $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W)$, für je zwei Teilräume V und W von $\mathbb{R}^n$.
(c) $\ker(\varphi+\psi) = \ker(\varphi)+\ker(\psi)$, für je zwei lineare Abbildungen $\varphi, \psi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
(d) $\pi \circ (\mathrm{id}_V - \pi) = 0$, für jeden Projektor $\pi \colon V \to V$.

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1. Für $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ gilt

$$\begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}A & 0 \\ 0 & B^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} = I_{n+m}$$

und analog

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BB^{-1} & 0 \\ 0 & AA^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{n+m}.$$

Weiters:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Da φ injektiv ist gilt $\ker(\varphi) = 0$. Aus der Dimensionsformel

$$\dim(V) = \dim\ker(\varphi) + \dim\mathrm{img}(\varphi)$$

erhalten wir daher

$$\dim\mathrm{img}(\varphi) = \dim(V).$$

Da $\mathrm{img}(\varphi) \subseteq V$ folgt $\mathrm{img}(\varphi) = V$, d.h. φ ist surjektiv.

3. Siehe Abschnitt IV.3 im Skriptum.

4.

$$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = n \qquad \text{und} \qquad \mathrm{rank}\begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix} = 2n.$$

5. Es bezeichnen $\phi_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\phi_A(x) = Ax$, $\phi_B \colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$, $\phi_B(x) = Bx$, und $\phi_{AB} \colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$, $\phi_{AB}(x) = ABx$, die mit den Matrizen A, B und AB assoziierten linearen Abbildungen. Dann gilt $\phi_{AB} = \phi_A \circ \phi_B$. Aus

$$\mathrm{img}(\phi_A \circ \phi_B) \subseteq \mathrm{img}(\phi_A)$$

folgt

$$\dim\mathrm{img}(\phi_A \circ \phi_B) \leq \dim\mathrm{img}(\phi_A),$$

also

$$\mathrm{rank}(\phi_{AB}) = \mathrm{rank}(\phi_A \circ \phi_B) \leq \mathrm{rank}(\phi_A),$$

und daher $\mathrm{rank}(AB) \leq \mathrm{rank}(A)$. Weiters ist

$$\mathrm{img}(\phi_A \circ \phi_B) = \phi_A(\mathrm{img}(\phi_B)),$$

also

$$\dim\mathrm{img}(\phi_A \circ \phi_B) \leq \dim\mathrm{img}(\phi_B),$$

somit

$$\operatorname{rank}(\phi_{AB}) = \operatorname{rank}(\phi_A \circ \phi_B) \leq \operatorname{rank}(\phi_B)$$

und daher $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(B)$.

6. Siehe Satz IV.2.1 im Skriptum.

7. Bezeichnet B die Basis

$$b_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\\4\end{smallmatrix}\right), \quad b_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\\2\end{smallmatrix}\right), \quad b_3 = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\2\\3\end{smallmatrix}\right), \quad b_4 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$$

von $\mathbb{R}^4$ und E die Standardbasis, dann gilt für die Basiswechselmatrizen:

$$T_{EB} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\3&1&2&0\\4&2&3&1\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad T_{BE} = T_{EB}^{-1} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&-2&1&0\\-2&1&0&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}.$$

Die durch $\varphi(b_1) = b_3$, $\varphi(b_2) = b_4$, $\varphi(b_3) = b_1$ und $\varphi(b_4) = b_2$ eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ erfüllt $\varphi(W_1) = W_2$, $\varphi(W_2) = W_1$ und hat Matrixdarstellung

$$[\varphi]_{BB} = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Ihre Matrix bezüglich der Standardbasis ist

$$[\varphi]_{EE} = T_{EB}[\varphi]_{BB}T_{BE} = \begin{pmatrix}-2&1&0&0\\-3&2&0&0\\-4&4&-2&1\\-4&4&-3&2\end{pmatrix}.$$

8. Die Gleichung $AX - XA = 0$ ist linear in X, somit bildet V einen linearen Teilraum. Für den Eintrag in i-ten Zeile und j-ten Spalte gilt

$$(AX - XA)_{ij} = (AX)_{ij} - (XA)_{ij} = iX_{ij} - jX_{ij} = (i-j)X_{ij}.$$

Somit $AX - XA = 0$, genau dann wenn $X_{ij} = 0$, für alle $i \neq j$, d.h. genau dann wenn X eine Diagonalmatrix ist. Somit ist V der Teilraum der Diagonalmatrizen, und daher $\dim(V) = n$.

9. Elementare Zeilenumformungen zeigen, dass das Gleichungssytem zu

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & +2x_2 & & +x_4 & +3x_5 & = & 7 \\ & & x_3 & +4x_4 & +x_5 & = & 6 \end{array}$$

äquivalent ist. Der affine Teilraum aller Lösungen ist daher

$$\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) + \left\langle \left(\begin{smallmatrix}3\\0\\1\\0\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\4\\-1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\-1\\0\\0\\0\end{smallmatrix}\right) \right\rangle.$$

10. Siehe Satz IV.4.1 im Spriptum.

11.

(a) falsch
(b) falsch
(c) falsch
(d) wahr