Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Einführung in die lineare Algebra und Geometrie

Wintersemester 2011/12, LVN 250018

am 1. Februar 2013, 2-stündig

1 (4 Punkte)**.** Sei W ein Teilraum eines Vektorraums V. Was verstehen wir unter dem Quotientenraum V/W, und was unter der kanonischen Projektion, $\pi\colon V \to V/W$. Erkläre auch, wie die Vektorraumoperationen auf V/W erklärt sind.

2 (4 Punkte)**.** Bestimme die Inverse der komplexen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{i} & 3\mathbf{i} & 1+3\mathbf{i} \\ 1+\mathbf{i} & 2+2\mathbf{i} & 3+4\mathbf{i} \end{pmatrix}.$$

3 (5 Punkte)**.** Sei $\pi\colon V \to V$ ein Projektor. Zeige $V = \operatorname{img}(\pi) \oplus \ker(\pi)$.

4 (3 Punkte)**.** Betrachte die Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^x, \qquad g(x) = x + 2x^2, \qquad h(x) = \sin(x).$$

Sind diese linear unabhängig im Vektorraum aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$? Begründe die Antwort!

5 (5 Punkte)**.** Erkläre den Zusammenhang zwischen linearen Abbildungen und Matrizen.

6 (2 Punkte)**.** Wann werden zwei Teilräume eines Vektorraums komplementär genannt?

7 (7 Punkte)**.** Betrachte folgende beiden Teilräume von $\mathbb{R}^4$,

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\1\\4\\6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\3\\10\\16 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{und} \qquad W' = \left\langle \begin{pmatrix} 1\\1\\3\\4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\\3\\8\\11 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Zeige, dass W und W' komplementär sind. Bestimme die Matrix (bez. der Standardbasis) der Spiegelung an W längs W'.

8 (2 Punkte)**.** Was verstehen wir unter der Dimension eines Vektorraums?

9 (4 Punkte)**.** Betrachte die Matrix

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R}).$$

Zeige, dass $\{X \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{R}) : JX = XJ\}$ einen Teilraum von $M_{2n\times 2n}(\mathbb{R})$ bildet und bestimme seine Dimension.

10 (2 Punkte)**.** Was verstehen wir unter dem Rang einer linearen Abbildung.

11 (2 Punkte)**.** Bestimme die Ränge der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1. siehe Skriptum, Abschnitt II.6.

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{i} & 3\mathbf{i} & 1+3\mathbf{i} \\ 1+\mathbf{i} & 2+2\mathbf{i} & 3+4\mathbf{i} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 8-\mathbf{i} & 2\mathbf{i} & -2+3\mathbf{i} \\ -2-\mathbf{i} & -\mathbf{i} & 1 \\ -1+\mathbf{i} & 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}$$

3. Sei $\pi\colon V \to V$ ein Projektor, d.h. $\pi^2 = \pi$. Für jedes $v \in V$ gilt $v = \pi(v) + (v - \pi(v))$, wobei $\pi(v) \in \operatorname{img}(\pi)$ und $v - \pi(v) \in \ker(\pi)$, denn $\pi(v - \pi(v)) = \pi(v) - \pi^2(v) = \pi(v) - \pi(v) = 0$. Dies zeigt $V = \operatorname{img}(\pi) + \ker(\pi)$. Es gilt aber auch $\operatorname{img}(\pi) \cap \ker(\pi) = \{0\}$, denn für $v \in \operatorname{img}(\pi) \cap \ker(\pi)$ existiert $w \in V$ mit $v = \pi(w)$ und daher $0 = \pi(v) = \pi(\pi(w)) = \pi(w) = v$. Zusammenfassend folgt $V = \operatorname{img}(\pi) \oplus \ker(\pi)$, vgl. Proposition II.5.8 im Skriptum.

4. Seien $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ und $\lambda f + \mu g + \nu h = 0$. Einsetzen von $x = 0$ liefert $\lambda = 0$. Einsetzen von $x = \pi$ liefert $\mu = 0$. Einsetzen von $x = \pi/2$ liefert $\nu = 0$. Dies zeigt, dass f, g, h linear unabhängig sind.

5. siehe Skriptum.

6. Siehe Skriptum, Definition II.5.6.

7. Bezeichne E die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ und B die Basis

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Bezeichnet $\sigma\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ die gesuchte Spiegelung, dann gilt daher

$$[\sigma]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \quad T_{EB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 10 & 3 & 8 \\ 6 & 16 & 4 & 11 \end{pmatrix},$$

und eine Rechnung zeigt:

$$T_{EB}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 2 & -5 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt auch, dass B tatsächlich eine Basis bildet, W und W' also komplementär sind. Die gesuchte Matrix ist daher

$$
\begin{aligned}
[\sigma]_{EE} = T_{EB}[\sigma]_{BB}T_{BE} = T_{EB}[\sigma]_{BB}T_{EB}^{-1} \\
= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 10 & 3 & 8 \\ 6 & 16 & 4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 6 & 2 & -5 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 2 \\ -4 & -12 & -1 & 4 \\ -4 & -16 & -4 & 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

8. siehe Skriptum

9. Die Gleichung $JX = XJ$ ist linear in X, also bildet die Lösungsmenge einen Teilraum. Schreiben wir $X = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$, dann ist die Gleichung $JX = XJ$ zu

$$\begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

also zu

$$\begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & -A \\ D & -C \end{pmatrix}$$

äquivalent. Es gilt daher $JX = XJ$ genau dann, wenn $A = D$ und $C = -B$. Die Dimension des Lösungsraums ist daher $2n^2$.

10. siehe Skriptum

11. die Ränge sind 2 und 3.