Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Einführung in die lineare Algebra und Geometrie

Wintersemester 2011/12, LVN 250018

Beispieltest am 29. Jänner 2012, 2-stündig

1. (2 Punkte) Seien W und W' zwei Teilräume eines Vektorraums V mit Dimensionen: $\dim(V) = 17$, $\dim(W) = 5$, $\dim(W') = 7$, $\dim(W \cap W') = 3$. Berechne:

$$\dim(W + W') = \qquad\qquad \dim(V/W) =$$

2. (4 Punkte) Bestimme die Inverse der Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

3. (3 Punkte) Zeige, dass die folgenden Vektoren linear unabhängig sind und ergänze sie zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 17 \\ 23 \\ 25 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 11 \\ 20 \end{pmatrix}$$

4. (3 Punkte) Für quadratische Matrizen A und B sei $[A, B] := AB - BA$. Zeige nun, dass für je drei quadratische Matrizen $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ die sogenannte Jacobi Gleichung gilt:

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$$

5. (2 Punkte) Gib eine präzise Definition des Begriffs der linearen Abbildung.

6. (2 Punkte) Wieviele 1-dim. Teilräume besitzt der $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum $(\mathbb{Z}_2)^3$?

7. (4 Punkte) Gib bei den folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch sind?

- Jede Teilmenge eines Erzeugendensystems ist ein Erzeugendensystem.
- Jede injektive lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ ist auch surjektiv.
- Jede linear unabhängige Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ ist endlich.
- Jede linear unabhängige Teilmenge enthält ein Erzeugendensystem.

8. (5 Punkte) Erkläre den Zusammenhang zwischen Matrizen und linearen Abbildungen.

9. (2 Punkte) Gib eine präzise Definition für den Begriff der Dimension eines Vektorraums.

10. (4 Punkte) Betrachte folgende beiden Teilräume von $\mathbb{R}^4$:

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{und} \qquad W' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Zeige $\mathbb{R}^4 = W \oplus W'$ und bestimme die Matrix (bezüglich der Standardbasis) der Projektion auf W längs W'.

11. (6 Punkte) Formuliere und beweise den Austauschsatz von Steinitz.

12. (3 Punkte) Es seien V und W zwei endlich-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, sodass $\dim(V) = \dim(W)$. Zeige, dass V und W isomorph sind.

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**