Übungen zu "Lineare Algebra und Geometrie 1"

Sommersemester 2012

Stefan Haller

1. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne $V := F(M_{n\times n}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ den Vektorraum aller $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Zeige, dass folgende Teilmengen Teilräume von V bilden:
(a) $\{\delta \in V : \delta \text{ ist linear in der } k\text{-ten Spalte}\}$.
(b) $\{\delta \in V : \delta \text{ ist multilinear, d.h. linear in jeder Spalte}\}$
(c) $\{\delta \in V : \text{stimmen die } k\text{-te und } l\text{-te Spalte von } A \text{ überein, so gilt } \delta(A) = 0\}$.
(d) $\{\delta \in V : \text{stimmen zwei benachbarte Sp. von } A \text{ überein, so gilt } \delta(A) = 0\}$.
(e) $\{\delta \in V : \text{stimmen zwei Spalten von } A \text{ überein, so gilt } \delta(A) = 0\}$.
(f) $\{\delta \in V : \text{sind die Spalten von } A \text{ linear abhängig, so gilt } \delta(A) = 0\}$.
(g) $\{\delta \in V : \delta \text{ ist multilinear und alternierend}\}$
Hinweis: Für jede Teilmenge $X \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist $\{\delta \in V \mid \forall x \in X : \delta(x) = 0\}$ ein Teilraum von V.

2. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper in dem $2 \neq 0$ gilt. Weiters sei $n \in \mathbb{N}$ und $\delta \colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ multilinear. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
(a) Sind zwei Spalten von A gleich, so gilt $\delta(A) = 0$.
(b) Bei Vertauschung zweier Spalten von A wechselt $\delta(A)$ das Vorzeichen.
Gib eine multilineare Abbildung $\delta \colon M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ an, die (b) aber nicht (a) erfüllt.

3. Berechne folgende Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & 0 & 4 & 13 \\ 2 & -1 & 2 & 17 \\ 3 & -1 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

4. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ berechne die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & & & \\ \sin\alpha & \cos\alpha & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 7 \end{vmatrix}$$

5. Berechne die Determinante folgender $(n \times n)$-Matrix:

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

6. Zeige $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, für alle $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Gib zwei Matrizen A und B an, für die $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ gilt.

7. Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $D \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$. Zeige:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D) = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

8. Zeige

$$\det \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} = 0,$$

wobei die Sternchen beliebige Eintragungen bezeichnen.

9. Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $D \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$. Berechne

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \det \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Dies lässt sich auf Aufgabe 7 zurückführen.

10. Seien $a, b, c \in \mathbb{K}$ und betrachte folgende $(n \times n)$-Determinante:

$$D_n := \begin{vmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{vmatrix}$$

Zeige, dass die Rekursionsgleichung

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$$

gilt und berechne damit die $(n \times n)$-Determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

11. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

einmal mit der Cramer'schen Regel und einmal mit Zeilenumformungen.

12. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -11 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

einmal mit der Cramer'schen Regel und einmal mit Zeilenumformungen.

13. Berechne die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

einmal mit Hilfe der Formel in Bemerkung V.2.5 und einmal mit Zeilenumformungen.

14. Mit der Notation von Satz V.2.3 zeige, dass auch $\tilde{A}A = \det(A)I_n$ gilt, selbst wenn A nicht invertierbar ist.

15. Sei A eine $(n \times n)$-Matrix mit ganzzahligen Eintragungen und $\det(A) = \pm 1$. Zeige, dass dann auch die Inverse von A nur ganzzahlige Eintragungen besitzt. Zeige auch umgekehrt: haben A und die Inverse von A nur ganzzahlige Eintragungen, dann muss schon $\det(A) = \pm 1$ gelten. Gib auch eine invertierbare Matrix mit ganzzahligen Eintragungen an, deren Inverse nicht ganzzahlig ist.

16. Sei $A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix. Verwende die Cramer'sche Regel um die Gleichungssysteme $Ax = e_i$ zu lösen, $1 \leq i \leq n$. Leite daraus erneut die Formel $A^{-1} = \det(A)^{-1}\tilde{A}$ aus Satz V.2.3 für invertierbare A her.

17. Zeige, dass die Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_n$ genau $n!$ Elemente besitzt. Wieviele Elemente hat die Untergruppe $A_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\}$?

18. Schreibe alle Elemente von $\mathfrak{S}_4$ an, bestimme ihre Vorzeichen (Signum) und schreibe damit die Leibniz'sche Formel für (4×4)-Matrizen an.

19. Berechne die (4×4)-Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \end{vmatrix},$$

einmal mit Leibniz' Formel und einmal mit Zeilen- bzw. Spaltenumformungen.

20. Zeige, dass

$$\phi\colon \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \qquad \phi(\sigma) := \bigl(e_{\sigma(1)}|e_{\sigma(2)}|\cdots|e_{\sigma(n)}\bigr),$$

einen Gruppenhomomorphismus bildet, d.h. es gilt $\phi(\sigma\circ\sigma') = \phi(\sigma)\phi(\sigma')$, für je zwei Permutationen $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$. Schließe daraus

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \det\bigl(e_{\sigma(1)}|e_{\sigma(2)}|\cdots|e_{\sigma(n)}\bigr),$$

für jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. *Hinweis:* Die rechte Seite definiert einen Homomorphismus $\mathfrak{S}_n \to \{1, -1\}$, der alle Transpositionen auf -1 abbildet, vgl. Lemma V.3.2. Dies ermöglicht folgende direkte Herleitung der Leibniz'schen Formel, erkläre dabei jedes Gleichheitszeichen:

$$\det(A) = \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} A_{1,i_1}\cdots A_{n,i_n}\det\bigl(e_{i_1}|\cdots|e_{i_n}\bigr)$$
$$= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} A_{1,\sigma(1)}\cdots A_{n,\sigma(n)}\det\bigl(e_{\sigma(1)}|\cdots|e_{\sigma(n)}\bigr) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)A_{1,\sigma(1)}\cdots A_{n,\sigma(n)}$$

21. Zeige, dass für jede Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ die Gleichung

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)A_{1,\sigma(1)}\cdots A_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)A_{\sigma(1),1}\cdots A_{\sigma(n),n}$$

gilt. Leite daraus und der Leibniz'schen Formel erneut $\det(A) = \det(A^t)$ her.

22. Zeige, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ offen in $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ ist. Zeige, dass $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ abgeschlossen in $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ ist. *Hinweis:* Die Determinantenfunktion ist stetig.

23. Seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi \in \mathrm{end}(V)$, B eine geordnete Basis von V und $[\varphi]_{BB} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ die Matrix von φ bezüglich B. Zeige, dass $\mathrm{tr}\bigl([\varphi]_{BB}\bigr)$ nicht von der Basis B abhängt und daher

$$\mathrm{tr}\colon \mathrm{end}(V) \to \mathbb{K}, \qquad \mathrm{tr}(\varphi) = \mathrm{tr}\bigl([\varphi]_{BB}\bigr).$$

wohldefiniert ist. Zeige auch:

(a) Die Spur ist linear, d.h. $\mathrm{tr}(\varphi_1 + \varphi_2) = \mathrm{tr}(\varphi_1) + \mathrm{tr}(\varphi_2)$ und $\mathrm{tr}(\lambda\varphi) = \lambda\,\mathrm{tr}(\varphi)$.
(b) $\mathrm{tr}(\psi\circ\varphi) = \mathrm{tr}(\varphi\circ\psi)$.
(c) $\mathrm{tr}(\varphi^t) = \mathrm{tr}(\varphi)$.
(d) $\mathrm{tr}(\mathrm{id}_V) = \dim(V)$.

für $\varphi, \psi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{end}(V)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. *Hinweis:* Gehe wie in Korollar V.4.2 vor.

24. Seien W und W' zwei komplementäre Teilräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, d.h. $V = W \oplus W'$. Weiters bezeichne $\pi\colon V \to V$ die Projektion auf W längs W' und $\sigma\colon V \to V$ die Spiegelung an W längs W'. Berechne $\mathrm{tr}(\pi)$ und $\det(\sigma)$. Berechne auch $\det(\lambda\,\mathrm{id}_V)$, wobei $\lambda \in \mathbb{K}$.