25. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, W ein Teilraum von V und $\varphi\colon V \to V$ linear, sodass $\varphi(W) \subseteq W$. Zeige

$$\det(\varphi) = \det(\varphi|_W)\det(\bar{\varphi}),$$

wobei $\varphi|_W\colon W \to W$ die Einschränkung von φ bezeichnet, und $\bar{\varphi}$ die auf dem Quotientenraum V/W induzierte lineare Abbildung $\bar{\varphi}\colon V/W \to V/W$, $\bar{\varphi}([v]) = [\varphi(v)]$ bezeichnet. *Hinweis: Dies lässt sich durch geschickte Wahl einer Basis von V auf Aufgabe 7 zurückführen.*

26. Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass

$$\mathrm{GL}^+(V) := \{\varphi \in \mathrm{end}(V) : \det(\varphi) > 0\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ bildet.

27. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$. Zeige, dass der Homomorphismus $\det\colon \mathrm{GL}(V) \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ surjektiv ist.

28. Betrachte die beiden geordneten Basen $B = (b_1, b_2, b_3)$ und $B' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ von $\mathbb{R}^3$, wobei:

$$b_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}, \quad b'_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad b'_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}, \quad b'_3 = \begin{pmatrix}0\\7\\8\end{pmatrix}$$

Sind B und B' gleichorientiert? Welche dieser Basen ist bezüglich der Standardorientierung auf $\mathbb{R}^3$ positiv orientiert?

29. Zeige, dass für jedes $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ folgende Zahlen übereinstimmen:

(a) $\mathrm{rank}(A)$
(b) das größte k, für das es eine invertierbare $(k \times k)$-Untermatrix von A gibt
(c) das größte k, für das es eine $(k \times k)$-Untermatrix von A gibt, deren Determinante nicht verschwindet

Dabei verstehen wir unter einer $(k \times k)$-Untermatrix von A jede Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}$$

wobei $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$ und $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$ und a_{ij} die Eintragung von A in der i-ten Zeile und j-ten Spalte bezeichnet.

30. Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ (komplex) linear. Es bezeichne $V_\mathbb{R}$ den zugrundeliegenden reellen Vektorraum und $\varphi_\mathbb{R}\colon V_\mathbb{R} \to V_\mathbb{R}$ dieselbe Abbildung, aufgefasst als reell lineare Abbildung. Zeige

$$\det(\varphi_\mathbb{R}) = \left|\det(\varphi)\right|^2,$$

und schließe daraus, dass im invertierbaren Fall $\varphi_{\mathbb{R}}$ orientierungsbewahrend ist. *Hinweis: Ist $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Basis des komplexen Vektorraums V, dann bildet $\tilde{B} = (b_1, \mathbf{i}b_1, b_2, \mathbf{i}b_2, \ldots, b_n, \mathbf{i}b_n)$ eine Basis des reellen Vektorraums $V_{\mathbb{R}}$, und es gilt*

$$[\varphi_{\mathbb{R}}]_{\tilde{B}\tilde{B}} = \left(\begin{array}{cc|c|cc} x_{11} & -y_{11} & \cdots & x_{1n} & -y_{1n} \\ y_{11} & x_{11} & \cdots & y_{1n} & x_{1n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hline x_{n1} & -y_{n1} & \cdots & x_{nn} & -y_{nn} \\ y_{n1} & x_{n1} & \cdots & y_{nn} & x_{nn} \end{array}\right), \textit{wobei} \quad [\varphi]_{BB} = \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

und $z_{ij} = x_{ij} + \mathbf{i}y_{ij}$. Die gewünschte Gleichung lässt sich mittels Induktion nach n zeigen, für den Induktionsschritt betrachte zunächst den Fall $z_{21} = z_{31} = \cdots = z_{n1} = 0$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\operatorname{tr}(\varphi)$ und $\operatorname{tr}(\varphi_{\mathbb{R}})$?

31. Für jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ bezeichne $S_\sigma = (e_{\sigma(1)}|\cdots|e_{\sigma(n)})$ die entsprechende Permutationsmatrix.

a) Zeige:

$$(S_\sigma)^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} S_\sigma = \begin{pmatrix} \lambda_{\sigma(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

b) Sei D eine $(n \times n)$-Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen und A eine weitere $(n \times n)$-Matrix. Zeige, dass $AD = DA$ genau dann gilt, wenn A eine Diagonalmatrix ist. Zeige anhand eines Beispiels, dass die Voraussetzung an die Diagonaleinträge von D wirklich notwendig ist.

c) Sei D eine $(n \times n)$-Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen und S eine invertierbare Matrix, sodass auch $S^{-1}DS$ eine Diagonalmatrix bildet. Zeige, dass dann S von der Form $S = AS_\sigma$ sein muss, wobei A eine invertierbar $(n \times n)$-Diagonalmatrix bezeichnet und $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. *Hinweis: Zeige zunächst mit Hilfe von a), dass o.B.d.A. $S^{-1}DS = D$ angenommen werden kann, und verwende dann b).*

32. Bestimme alle Eigenwerte und Eigenräume folgender reeller Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Matrizen sind diagonalisierbar? Gib im diagonalisierbaren Fall Matrizen S an, sodass $S^{-1}AS$ bzw. $S^{-1}BS$ Diagonalmatrizen bilden.

33. Wie im vorangehenden Beispiel nun für die reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 20 & 30 \\ -2 & -12 & -18 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -8 & 6 \\ 0 & -15 & 11 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$