34. Bestimme alle Eigenwerte und Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{K}$. Ist A diagonalisierbar?

35. Sei $q \in \mathbb{K}[z]$ ein Polynom und D eine Dreiecksmatrix,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad \text{Zeige} \quad q(D) = \begin{pmatrix} q(\lambda_1) & * & \cdots & * \\ & q(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & q(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

36. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ eine diagonalisierbare lineare Abbildung und $q \in \mathbb{K}[z]$ ein Polynom. Zeige, dass dann auch $q(\varphi)$ diagonalisierbar ist und bestimme das Spektrum von $q(\varphi)$.

37. Erkläre warum die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ nicht diagonalisierbar ist. Zeige, dass sie über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sehr wohl diagonalisierbar ist, bestimme ihre Eigenwert und Eigenräume sowie eine invertierbare Matrix S, sodass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

38. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ linear, $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von φ und $E_\lambda = \ker(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ der entsprechende Eigenraum. Darüber hinaus, sei $\psi\colon V \to V$ eine weitere lineare Abbildung, die mit φ kommutiert, d.h. $\varphi\psi = \psi\varphi$. Zeige, dass ψ die Eigenräume von φ invariant lässt, d.h. $\psi(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$.

39. Betrachte die Folge $0, 1, 2, 7, 20, 61, 182, \ldots$ Genauer sei

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Bestimme eine explizite Formel für x_n. Gehe dabei wie in Beispiel VI.1.26 vor.

40. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Eigenwerten und Eigenräumen von A und denen von μA, wobei $0 \neq \mu \in \mathbb{K}$?

(b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Eigenwerten und Eigenräumen von A und denen von A^{-1}, falls A invertierbar ist.

(c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Eigenwerten von A und denen von A^t?

Gehe jeweils auch auf die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten ein.

41. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Zeige

$$\tfrac{d}{dt}\Big|_0 \det(I_n + tA) = \operatorname{tr}(A).$$

Hinweis: Es existiert $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, sodass $S^{-1}AS$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Erkläre warum obige Formel auch für reelle Matrizen $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ richtig bleibt.

42. Zeige, dass jedes Polynom der Form $p = p_0 + p_1 z + \cdots + p_{n-1} z^{n-1} + (-1)^n z^n$, wobei $p_i \in \mathbb{K}$, als charakteristisches Polynom einer Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ auftritt. Berechne dazu das charakteristische Polynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1}p_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & (-1)^{n-1}p_{n-2} \\ & & 1 & (-1)^{n-1}p_{n-1} \end{pmatrix}$$

mittels Induktion nach n.

43. Zeige, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dicht in $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ liegt, d.h. in jeder Umgebung einer Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ gibt es invertierbare Matrizen. Betrachte dazu die Familie von Matrizen $A - t$, $t \in \mathbb{R}$, und zeige, dass es beliebig kleine t gibt für die $A - t$ invertierbar ist.

44. Sei p eine Primzahl. Zeige, dass der Körper $\mathbb{Z}_p$ nicht algebraisch abgeschlossen ist. *Hinweis: Betrachte das Polynom $q = 1 + (z-1)(z-2)\cdots(z-p)$.*

45. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\pi\colon V \to V$ ein Projektor, d.h. $\pi^2 = \pi$. Bestimme alle Eigenwerte und Eigenräume sowie das charakteristische Polynom von π. Gib jeweils auch die geometrische und algebraische Vielfachheit der Eigenwerte an.

46. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, betrachte den Vektorraum der glatten Funktionen, $V := C^\infty(I, \mathbb{R})$, und bezeichne $D\colon V \to V$, $D(f) := f'$, den Ableitungsoperator. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $f_\lambda \in V$, $f_\lambda(x) := e^{\lambda x}$. Zeige, dass f_λ Eigenvektor von D ist und bestimme den Eigenwert.

47. Sei $P \in M_{n\times n}(\mathbb{K}[z])$ eine Matrix von Polynomen. Zeige, dass $\det(P)$ linear in jeder Spalte ist, d.h. für beliebige Polynome $p_{ij}, \tilde{p}_{ij}, q \in \mathbb{K}[z]$ gilt

$$\det\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j}+\tilde{p}_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nj}+\tilde{p}_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & \tilde{p}_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & \tilde{p}_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

und

$$\det\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & qp_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & qp_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = q\det\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Zeige weiters $\det(P^t) = \det(P)$, vgl. Aufgabe 21, und schließe daraus, dass $\det(P)$ auch linear in jeder Spalte ist.