48. Sei $P = (p_1|\cdots|p_n) \in M_{n\times n}(\mathbb{K}[z])$ eine Matrix von Polynomen. Zeige $\det(p_{\sigma(1)}|\cdots|p_{\sigma(n)}) = \operatorname{sign}(\sigma)\det(P) \in \mathbb{K}[z]$, für jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

49. Seien $P, Q \in M_{n\times n}(\mathbb{K}[z])$ zwei Matrizen, deren Eintragungen Polynome sind. Zeige $\det(PQ) = \det(P)\det(Q) \in \mathbb{K}[z]$ auf zwei Arten: Für unendliche Körper unter Verwendung von $(\det(P))(\lambda) = \det(P(\lambda))$, $\lambda \in \mathbb{K}$, und dann für beliebige Körper. *Anleitung für den zweiten Teil:*

1.) Zeige, dass $\det(PQ)$ und $\det(P)\det(Q)$ beide linear in jeder Spalte von Q sind, siehe Aufgabe 47, und schließe daraus, dass es o.B.d.A. genügt Matrizen der Form $Q = (e_{i_1}|\cdots|e_{i_n})$ zu betrachten.
2.) Zeige, dass $\det(PQ) = 0 = \det(Q)$, falls Q zwei gleiche Spalten besitzt, und schließe daraus, dass es o.B.d.A. genügt Permutationsmatrizen $Q = (e_{\sigma(1)}|\cdots|e_{\sigma(n)})$ zu betrachten, wobei $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
3.) Verwende Aufgabe 48 um den Beweis abzuschließen.

50. Zeige, dass für jede Matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ die Relation

$$\det(A) = \tfrac{1}{2}\Big(\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\Big)$$

gilt und analog für $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{K})$

$$\det(A) = \tfrac{1}{6}\Big(\operatorname{tr}(A)^3 - 3\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(A^2) + 2\operatorname{tr}(A^3)\Big).$$

Hinweis: Es genügt dies für algebraisch abgeschlossene Körper, d.h. triangulierbare Matrizen, zu zeigen.

51. Betrachte die Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 3, \quad \sigma(3) = 4, \quad \ldots \quad \sigma(n-1) = n, \quad \sigma(n) = 1,$$

und die assoziierte Permutationsmatrix

$$A = (e_{\sigma(1)}|\cdots|e_{\sigma(n)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{C}),$$

Bestimme alle komplexen Eigenwerte von A sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheit. Ist A diagonalisierbar? *Freiwillge Zusatzaufgabe: Bestimme eine Eigenbasis von A.*

52. Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zwei Matrizen von denen mindestens eine invertierbar ist. Zeige, dass A und B die selben Eigenwerte mit den gleichen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben.

53. Welche der folgenden reellen Matrizen sind triangulierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gib im triangulierbaren Fall jeweils invertierbare Matrizen S an, sodass $S^{-1}AS$, $S^{-1}BS$, etc. obere Dreiecksgestalt besitzt.

54. Wie in der vorangehenden Aufgabe nun mit den reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 18 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 8 & 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

55. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) φ ist triangulierbar, d.h. es existiert eine Basis B von V, sodass $[\varphi]_{BB}$ obere Dreiecksgestalt hat.

(b) Es existieren Teilräume $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V$ mit $\dim(V_i) = i$ und $\varphi(V_i) \subseteq V_i$, für jedes $i = 1, \dots, n$.

56. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Zeige, dass φ genau dann triangulierbar ist, wenn $\varphi^t\colon V^* \to V^*$ triangulierbar ist. Schließe daraus, dass eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ genau dann triangulierbar ist, wenn die transponierte Matrix $A^t \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ triangulierbar ist.

57. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Für jede der Matrizen

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 &&&& \\ & \lambda & 1 &&& \\ && \lambda & 1 && \\ &&& \lambda & 1 & \\ &&&& \lambda & 1 \\ &&&&& \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 &&&& \\ & \lambda & 1 &&& \\ && \lambda & 0 && \\ &&& \lambda & 1 & \\ &&&& \lambda & 1 \\ &&&&& \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 &&&& \\ & \lambda & 0 &&& \\ && \lambda & 1 && \\ &&& \lambda & 1 & \\ &&&& \lambda & 1 \\ &&&&& \lambda \end{pmatrix}$$

bestimme die Dimensionen der Teilräume

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda) \subseteq \ker\big((A-\lambda)^2\big) \subseteq \cdots \subseteq \ker\big((A-\lambda)^N\big) = \tilde{E}_\lambda$$

sowie das minimale N für das $\ker\big((A-\lambda)^N\big) = \tilde{E}_\lambda$ gilt, wobei A jeweils eine der Matrizen bezeichnet.

58. Für $\varepsilon \in \mathbb{K}$ zeige:

$$S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & 1 && \\ & \lambda & \ddots & \\ && \ddots & 1 \\ &&& \lambda \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon && \\ & \lambda & \ddots & \\ && \ddots & \varepsilon \\ &&& \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad S = \begin{pmatrix} 1 &&& \\ & \varepsilon && \\ && \ddots & \\ &&& \varepsilon^{n-1} \end{pmatrix}$$