59. Verifiziere den Satz von Caley–Hamilton anhand folgender Matrix,

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

d.h. bestimme das charakteristische Polynom p von A und berechne $p(A)$.

60. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, d.h. $p = (\lambda_1 - z)^{m_1} \cdots (\lambda_k - z)^{m_k}$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte und $m_1, \dots, m_k$ ihre algebraischen Vielfachheiten bezeichnen. Beweise erneut den Satz von Caley–Hamilton, d.h. $p(A) = 0$, nun in Matrixschreibweise. *Anleitung:*

(1) Nach Satz VI.3.7 über die Primärzerlegung existiert $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, sodass

$$B := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \cdots & * \\ & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in M_{m_i\times m_i}(\mathbb{K}).$$

(2) Wie sehen die Diagonaleinträge des i-ten Diagonalblocks von $(B - \lambda_i I_n)$ aus?
(3) Wie sieht der i-te Diagonalblock von $(B - \lambda_i I_n)^{m_i}$ aus?
(4) Schließe daraus, dass $p(B) = (\lambda_1 I_n - B)^{m_1} \cdots (\lambda_k I_n - B)^{m_k} = 0$.
(5) Folgere $p(A) = 0$.

61. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Weiters sei $\psi\colon V \to V$ linear und kommutiere mit φ, d.h. $\varphi\psi = \psi\varphi$. Zeige, $\psi(\tilde{E}_\lambda) \subseteq \tilde{E}_\lambda$, wobei $\tilde{E}_\lambda$ den verallgemeinerten Eigenraum zu einem Eigenwert λ von φ bezeichnet.

62. Seien $\varphi, \psi\colon V \to V$ zwei kommutierende nilpotente lineare Abbildungen. Zeige, dass dann auch $\varphi + \psi$ nilpotent ist. Gib zwei (nicht kommutierende) nilpotente Abbildungen an, deren Summe nicht nilpotent ist.

63. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine diagonalisierbare lineare Abbildung. Weiters sei $V = W \oplus W'$ eine invariante Zerlegung, d.h. $\varphi(W) \subseteq W$ und $\varphi(W') \subseteq W'$. Zeige, dass dann auch die Einschränkungen $\varphi|_W\colon W \to W$ und $\varphi|_{W'}\colon W' \to W'$ diagonalisierbar sind.

64. Zeige, dass die einzige diagonalisierbare und nilpotente lineare Abbildung die Nullabbildung ist.

65. Seien $\varphi, \psi\colon V \to V$ zwei kommutierende diagonalisierbare lineare Abbildungen. Zeige, dass φ und ψ gleichzeitige diagonalisierbar sind, d.h. es existiert eine Basis B von V, sodass $[\varphi]_{BB}$ und $[\psi]_{BB}$ Diagonalmatrizen sind.

66. Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimme eine diagonalisierbare Matrix D sowie eine nilpotente Matrix N, sodass $A = D + N$ und $DN = ND$.

67. Zeige folgende Formel für die k-te Potenz eines $(n \times n)$-Jordanblocks:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \cdots & \binom{k}{n}\lambda^{k-n-1} \\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \ddots & \vdots \\ & & \lambda^k & \ddots & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} \\ & & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ & & & & \lambda^k \end{pmatrix}$$

Hinweis: Induktion nach k.

68. Bestimme die Jordan'sche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 & -1 \\ & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

sowie eine invertierbar Matrix S, sodass $S^{-1}AS$ Normalform hat.

69. Bestimme die Jordan'sche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ & & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 3 & 0 & 1 & 2 \\ & & & & 3 & 0 & 0 \\ & & & & & 3 & 1 \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

sowie eine invertierbar Matrix S, sodass $S^{-1}AS$ Normalform hat.