70. Bestimme die Jordan'sche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -7 & -33 & -22 & 33 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 9 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & -8 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

sowie eine invertierbar Matrix S, sodass $S^{-1}AS$ Normalform hat.

71. Bestimme die Jordan'schen Normalformen folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 10 & 4 & 1 \\ -20 & -15 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 24 & -12 \\ -1 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & 0 \\ 18 & 1 & 1 & 1 \\ -23 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Matrizen sind ähnlich zueinander?

72. Betrachte einen Jordanblock der Form

$$A = J_{2m}(\alpha, \beta) := \begin{pmatrix} \begin{matrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{matrix} & I_2 & & \\ & \begin{matrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{matrix} & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ & & & \begin{matrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{matrix} \end{pmatrix} \in M_{2m \times 2m}(\mathbb{R}),$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$. Bestimme

$$\dim \ker\Big(\big((A - \alpha I_{2m})^2 + \beta^2 I_{2m} \big)^r \Big),$$

für jedes $r \in \mathbb{N}$.

73. Bestimme die eindeutige Primfaktorzerlegung des reellen Polynoms

$$p = z^{10} - z^9 + 6z^8 - 6z^7 + 9z^6 - 9z^5 + 4z^4 - 4z^3 \in \mathbb{R}[z].$$

Fasse dann p als komplexes Polynom auf, $p \in \mathbb{C}[z]$, und bestimme seine Primfaktorzerlegung über $\mathbb{C}$. *Hinweis: Die Nullstellen sind* $0, 1, \pm\mathbf{i}, \pm 2\mathbf{i}$.

74. Zeige, dass das Polynom $p \in \mathbb{Q}[z]$, $p = z^3 + 2$, irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

75. Für jede komplexe Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ sei $\bar{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ jene Matrix, die wir erhalten indem wir jeden Eintrag durch seinen komplex konjugierten ersetzen, d.h. $\bar{A}_{i,j} = \overline{A_{i,j}}$. Zeige:

(a) $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$, für alle $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.
(b) $\overline{\lambda A} = \bar{\lambda}\bar{A}$, für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.
(c) $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$, für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ und $B \in M_{n\times k}(\mathbb{C})$.

76. Bestimme die relle Jordan'sche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{6\times 6}(\mathbb{R}).$$

77. Bestimme das Minimalpolynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & & & & & & \\ & 5 & 1 & & & & & \\ & & 5 & 0 & & & & \\ & & & 5 & 1 & & & \\ & & & & 5 & 0 & & \\ & & & & & 5 & 1 & \\ & & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & & & 5 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Das Minimalpolynom ist ein Teiler des charakteristischen Polynoms.

78. Bestimme das Minimalpolynom $m_A \in \mathbb{K}[z]$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} J_{m_{1,1}}(\lambda_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J_{m_{1,n_1}}(\lambda_1) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & J_{m_{k,1}}(\lambda_k) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J_{m_{k,n_k}}(\lambda_k) \end{pmatrix},$$

wobei $k, n_i, m_{i,j} \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ und $J_m(\lambda)$ den Jordanblock der Größe m mit Eigenwert λ bezeichnet. Zeige weiters:

$$\deg(m_A) = \sum_{i=1}^{k} \max\{m_{i,j} \mid j = 1, \ldots, n_i\}.$$