79. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Zeige, dass die Menge der Bilinearformen auf V bezüglich der Operationen

$$(\beta_1 + \beta_2)(v, w) := \beta_1(v, w) + \beta_2(v, w), \qquad (\lambda\beta)(v, w) = \lambda\beta(v, w).$$

einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet. Zeige weiters, dass die Menge der symmetrischen Bilinearformen ein Teilraum ist. Formuliere und beweise die analoge Aussage für Sesquilinearformen (Hermitesche Formen).

80. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to \mathbb{K}$ eine Abbildung, die linear in der ersten Eintragung und symmetrisch ist, d.h. es gelte

$$\beta(v + v', w) = \beta(v, w) + \beta(v', w), \quad \beta(\lambda v, w) = \lambda\beta(v, w), \quad \beta(w, v) = \beta(v, w),$$

für alle $v, v', w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeige, dass β eine symmetrische Bilinearform ist, d.h. zeige, dass β dann auch linear in der zweiten Eintragung sein muss. Formuliere und beweise die analoge Aussage für Hermitesche Formen.

81. Bestimme die Matrix (bezüglich der Standardbasis) der symmetrischen Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ mit quadratischer Form:

$$q\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 7xz - 6yz.$$

82. Sei $\beta\colon V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform mit assoziierter quadratischer Form $q(v) = \beta(v, v)$. Zeige, dass q der sogenannte *Parallelogrammgleichung* genügt, d.h. für alle $v, w \in V$ gilt

$$q(v + w) + q(v - w) = 2q(v) + 2q(w).$$

Formuliere und beweise die analoge Aussage für Hermitesche Formen.

83. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform. Zeige, dass

$$O(V, \beta) := \bigl\{\varphi \in \mathrm{GL}(V) \bigm| \forall v, w \in V : \beta(\varphi(v), \varphi(w)) = \beta(v, w)\bigr\}$$

bezüglich Komposition von Abbildungen eine Gruppe bildet. Zeige weiters, dass im Fall $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$,

$$O(V, \beta) = \bigl\{\varphi \in \mathrm{GL}(V) \bigm| \forall v \in V : q(\varphi(v)) = q(v)\bigr\},$$

wobei $q(v) = \beta(v, v)$ die assozierte quadratische Form bezeichnet. Formuliere und beweise die analoge Aussage für Hermitesche Formen.

84. Sei $\varphi\colon W \to V$ eine lineare Abbildung und $\beta\colon V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform. Zeige, dass $\varphi^*\beta$,

$$\varphi^*\beta\colon W \times W \to \mathbb{K}, \qquad (\varphi^*\beta)(w_1, w_2) := \beta\bigl(\varphi(w_1), \varphi(w_2)\bigr),$$

eine symmetrische Bilinearform auf W definiert. Zeige:

$$(\varphi \circ \psi)^*\beta = \psi^*(\varphi^*\beta) \qquad \text{und} \qquad (\mathrm{id}_V)^*\beta = \beta$$

für jede weitere lineare Abbildung $\psi \colon U \to W$, sowie

$$\varphi^*(\beta_1 + \beta_2) = \varphi^*\beta_1 + \varphi^*\beta_2 \qquad \text{und} \qquad \varphi^*(\lambda\beta) = \lambda\varphi^*\beta$$

für symmetrische Bilinearformen β, β_1, β_2 auf V und $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeige weiters:

(a) Ist β positiv/negativ semidefinit, dann ist $\varphi^*\beta$ positiv/negativ semidefinit.
(b) Ist β positiv/negativ def. und φ injektiv, dann ist $\varphi^*\beta$ positiv/negativ def.
(c) Ist β nicht-degeneriert und φ injektiv, dann ist auch $\varphi^*\beta$ nicht degeneriert.
(d) $\iota^*\beta = \beta|_W$, wobei $\iota \colon W \to V$ die Inklusion eines Teilraums bezeichnet.
(e) $O(V, \beta) = \{\varphi \in \mathrm{GL}(V) \mid \varphi^*\beta = \beta\}$.

Formuliere und beweise analoge Eigenschaften Hermitescher Formen.

85 (Frobeniushomomorphismus). Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit endlicher Charakteristik, $p = \mathrm{char}(\mathbb{K})$. Zeige, dass die Abbildung

$$F \colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \qquad F(x) = x^p,$$

ein Körperhomomorphismus ist, d.h. es gilt

$$F(x + y) = F(x) + F(y) \qquad \text{und} \qquad F(xy) = F(x)F(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{K}$. Für die Fixpunktmenge von F zeige weiters,

$$\mathrm{Fix}(F) := \{x \in \mathbb{K} \mid F(x) = x\} = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}.$$

Hinweis: Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt $n^p \equiv n \mod (p)$, *für jede Primzahl* p *und alle* $n \in \mathbb{Z}$. *Auch ist* $\binom{p}{i}$ *durch* p *teilbar, für alle* $0 < i < p$.

86. Sei $\beta \colon V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform und $W := \ker(\beta)$. Zeige, dass

$$\bar{\beta} \colon V/W \times V/W \to \mathbb{K}, \qquad \bar{\beta}([v], [v']) := \beta(v, v'),$$

eine wohldefinierte symmetrische Bilinearform definiert, die nicht-degeneriert ist.

87. Zwei symmetrische Matrizen $A, B \in M^{\mathrm{sym}}_{n \times n}(\mathbb{K})$ werden *kongruent* genannt, falls $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ existiert, sodass $B = S^t A S$. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf $M^{\mathrm{sym}}_{n \times n}(\mathbb{K})$ ist. Formuliere und beweise die analoge Aussage für Hermitesche Formen.

88. Sei V ein endlich dimensionaler komplexer Vektorraum. Weiters seien β und β' zwei symmetrische Bilinearformen auf V mit $\mathrm{rank}(\beta) = \mathrm{rank}(\beta')$. Zeige, dass ein linearer Isomorphismus $\varphi \colon V \to V$ existiert, sodass $\beta' = \varphi^*\beta$, d.h. $\beta'(v, w) = \beta(\varphi(v), \varphi(w))$, für alle $v, w, \in V$. *Hinweis: Satz VII.1.25.*

89. Für jede der folgenden symmetrischen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{i} & 2 \\ 0 & 2 & -4 - 7\mathbf{i} \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 8 & 13 & 18 \\ 11 & 18 & 25 \end{pmatrix},$$

bestimme eine invertierbare Matrix $S_i \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$, sodass $S_i^t A_i S_i = \left(\begin{smallmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Welche der Matrizen A_i sind kongruent über $\mathbb{C}$.