90. Sei V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum. Weiters seien β und β' zwei symmetrische Bilinearformen auf V mit gleicher Signatur. Zeige, dass ein linearer Isomorphismus $\varphi\colon V \to V$ existiert, sodass $\beta' = \varphi^*\beta$, d.h. $\beta'(v,w) = \beta(\varphi(v),\varphi(w))$, für alle $v, w, \in V$. *Hinweis: Satz VII.1.35.* Formuliere und beweise die analoge Aussage für Hermitesche Formen

91. Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $g\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit Signatur (p,q), wobei $p+q=n$. Weiters sei B eine geordnete Basis von V, sodass $[g]_B = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$. Zeige, dass

$$O_{p,q} := \left\{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \;\middle|\; A^t \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix} \right\}$$

bezüglich Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet. Zeige weiters, dass

$$O(V,g) \cong O_{p,q}, \qquad \varphi \leftrightarrow [\varphi]_B,$$

ein Gruppenisomorphismus ist. *Bemerkung: Die Gruppe $O_{3,1}$ (und auch die Gruppe $O_{1,3}$) wird Lorentz Gruppe genannt, und spielt in der Physik eine zentrale Rolle.*

92. Bestimme die Signatur folgender reeller quadratischer Formen:

$$q_1 = -x^2$$
$$q_2 = -4x^2 - 34y^2 - 12xy$$
$$q_3 = 4x^2 + 13y^2 - 3z^2 + 8xy + 8xz + 26yz$$
$$q_4 = 9x^2 + 26y^2 + z^2 + 4w^2 + 6xy - 6xz + 6xw + 18yz - 18yw - 14zw$$

93. Bestimme die Signatur folgender symmetrischer reeller Matrizen:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 13 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Gib jeweils Matrizen $S_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ an, sodass $S_n^t A_n S_n$ die Gestalt $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ hat.

94. Zeige, dass für die adjungierte Matrix folgenden Rechenregeln gelten:
(a) $A^{**} = A$, für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.
(b) $(A+B)^* = A^* + B^*$, für alle $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.
(c) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$, für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.
(d) $(AB)^* = B^* A^*$, für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ und $B \in M_{n\times l}(\mathbb{C})$.
Zeige, dass die Menge der selbstadjungierten Matrizen einen reellen aber keinen komplexen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ bilden.

95. Sei $h\colon V \times V \to \mathbb{C}$ eine Hermitesche Form und $q\colon V \to \mathbb{R}$, $q(v) = h(v,v)$, die damit assozierte quadratische Form. Verifiziere folgende Polarisierungsidentität für $v, w \in V$:

$$h(v,w) = \tfrac{1}{4}\big(q(v+w) - q(v-w)\big) - \mathbf{i}\tfrac{1}{4}\big(q(v+\mathbf{i}w) - q(v-\mathbf{i}w)\big).$$

96. Zeige, dass die Menge der positiv/negativ (semi)definiten Hermiteschen Formen eine konvexe Teilmenge im reellen Vektorraum aller Hermiteschen Formen bildet. *Hinweis: vgl. Bemerkung VII.1.31.* Formuliere und beweise die analoge Aussage für selbstadjungierte Matrizen.

97. Zeige, dass sich jede Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ auf eindeutige Weise in der Form $A = B + \mathbf{i}C$ schreiben lässt, wobei B und C selbstadjungiert sind. *Hinweis: Betrachte $A + A^*$ und $A - A^*$.*

98. Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $C \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Zeige:
(a) $A^tA \geq 0$ und $A^tA > 0$, falls $\operatorname{rank}(A) = n$.
(b) $C^*C \geq 0$ und $C^*C > 0$, falls $\operatorname{rank}(C) = n$.

99. Bezeichne $\mathcal{S}_{p,q} \subseteq M_{2\times 2}^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R})$ die Menge der symmetrischen (2×2)-Matrizen mit Signatur (p, q). Betrachte den linearen Isomorphismus

$$\phi\colon M_{2\times 2}^{\mathrm{sym}}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^3, \qquad \phi\begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

und skizziere die Teilmengen $\phi(\mathcal{S}_{2,0})$, $\phi(\mathcal{S}_{1,1})$, $\phi(\mathcal{S}_{0,2})$ von $\mathbb{R}^3$. *Hinweis: Sylvesterkriterium*

100. Bestimme die Signatur der Hermiteschen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+\mathbf{i} & -\mathbf{i} \\ 2-\mathbf{i} & 9 & 1-2\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1+2\mathbf{i} & 1 \end{pmatrix}.$$

101 (Cosinussatz). Sei V ein Euklidischer Vektorraum, $v, w \in V$, $v \neq 0 \neq w$ und bezeichne α den Winkel zwischen v und w, d.h. $\cos(\alpha) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|}$. Zeige

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\|\cos(\alpha).$$

102. Zeige, dass

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert, für die die Parallelogrammgleichung nicht gilt. Schließe, dass $\| - \|_1$ nicht von einem inneren Produkt auf $\mathbb{R}^n$ induziert wird. *Hinweis: siehe Proposition VII.2.8.*

103. Zeige, dass

$$\langle x, y\rangle = x^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 12 \\ 3 & 12 & 27 \end{pmatrix} y.$$

ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^3$ definiert. Wende das Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahren auf die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ an, um eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des inneren Produkts oben zu bestimmen.