Übungen zu "Lineare Algebra und Geometrie 1"

Sommersemester 2012

Stefan Haller

1. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne $V := F(M_{n\times n}(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ den Vektorraum aller $\mathbb{K}$-wertigen Funktionen auf $M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Zeige, dass folgende Teilmengen Teilräume von V bilden:

(a) $\{\delta \in V : \delta \text{ ist linear in der } k\text{-ten Spalte}\}$.
(b) $\{\delta \in V : \delta \text{ ist multilinear, d.h. linear in jeder Spalte}\}$
(c) $\{\delta \in V : \text{stimmen die } k\text{-te und } l\text{-te Spalte von } A \text{ überein, so gilt } \delta(A) = 0\}$.
(d) $\{\delta \in V : \text{stimmen zwei benachbarte Sp. von } A \text{ überein, so gilt } \delta(A) = 0\}$.
(e) $\{\delta \in V : \text{stimmen zwei Spalten von } A \text{ überein, so gilt } \delta(A) = 0\}$.
(f) $\{\delta \in V : \text{sind die Spalten von } A \text{ linear abhängig, so gilt } \delta(A) = 0\}$.
(g) $\{\delta \in V : \delta \text{ ist multilinear und alternierend}\}$

Hinweis: Für jede Teilmenge $X \subseteq M_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist $\{\delta \in V \mid \forall x \in X : \delta(x) = 0\}$ ein Teilraum von V.

2. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper in dem $2 \neq 0$ gilt. Weiters sei $n \in \mathbb{N}$ und $\delta\colon M_{n\times n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ multilinear. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Sind zwei Spalten von A gleich, so gilt $\delta(A) = 0$.
(b) Bei Vertauschung zweier Spalten von A wechselt $\delta(A)$ das Vorzeichen.

Gib eine multilineare Abbildung $\delta\colon M_{2\times 2}(\mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ an, die (b) aber nicht (a) erfüllt.

3. Berechne folgende Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 & 11 \\ 1 & 0 & 4 & 13 \\ 2 & -1 & 2 & 17 \\ 3 & -1 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

4. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ berechne die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & & & \\ \sin\alpha & \cos\alpha & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 5 & \\ & & & & 7 \end{vmatrix}$$

5. Berechne die Determinante folgender $(n \times n)$-Matrix:

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

6. Zeige $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, für alle $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Gib zwei Matrizen A und B an, für die $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$ gilt.

7. Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $D \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$. Zeige:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D) = \det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix}.$$

8. Zeige

$$\det \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix} = 0,$$

wobei die Sternchen beliebige Eintragungen bezeichnen.

9. Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{K})$, $C \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $D \in M_{m\times m}(\mathbb{K})$. Berechne

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \det \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Dies lässt sich auf Aufgabe 7 zurückführen.

10. Seien $a, b, c \in \mathbb{K}$ und betrachte folgende $(n \times n)$-Determinante:

$$D_n := \begin{vmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{vmatrix}$$

Zeige, dass die Rekursionsgleichung

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$$

gilt und berechne damit die $(n \times n)$-Determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

11. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

einmal mit der Cramer'schen Regel und einmal mit Zeilenumformungen.

12. Löse das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -11 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

einmal mit der Cramer'schen Regel und einmal mit Zeilenumformungen.

13. Berechne die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

einmal mit Hilfe der Formel in Bemerkung V.2.5 und einmal mit Zeilenumformungen.

14. Mit der Notation von Satz V.2.3 zeige, dass auch $\tilde{A}A = \det(A)I_n$ gilt, selbst wenn A nicht invertierbar ist.

15. Sei A eine $(n \times n)$-Matrix mit ganzzahligen Eintragungen und $\det(A) = \pm 1$. Zeige, dass dann auch die Inverse von A nur ganzzahlige Eintragungen besitzt. Zeige auch umgekehrt: haben A und die Inverse von A nur ganzzahlige Eintragungen, dann muss schon $\det(A) = \pm 1$ gelten. Gib auch eine invertierbare Matrix mit ganzzahligen Eintragungen an, deren Inverse nicht ganzzahlig ist.

16. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix. Verwende die Cramer'sche Regel um die Gleichungssysteme $Ax = e_i$ zu lösen, $1 \leq i \leq n$. Leite daraus erneut die Formel $A^{-1} = \det(A)^{-1}\tilde{A}$ aus Satz V.2.3 für invertierbare A her.

17. Zeige, dass die Permutationsgruppe $\mathfrak{S}_n$ genau $n!$ Elemente besitzt. Wieviele Elemente hat die Untergruppe $A_n = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n | \operatorname{sgn}(\sigma) = 1\}$?

18. Schreibe alle Elemente von $\mathfrak{S}_4$ an, bestimme ihre Vorzeichen (Signum) und schreibe damit die Leibniz'sche Formel für (4×4)-Matrizen an.

19. Berechne die (4×4)-Determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \end{vmatrix},$$

einmal mit Leibniz' Formel und einmal mit Zeilen- bzw. Spaltenumformungen.

20. Zeige, dass

$$\phi\colon \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \qquad \phi(\sigma) := \big(e_{\sigma(1)}|e_{\sigma(2)}|\cdots|e_{\sigma(n)}\big),$$

einen Gruppenhomomorphismus bildet, d.h. es gilt $\phi(\sigma\circ\sigma') = \phi(\sigma)\phi(\sigma')$, für je zwei Permutationen $\sigma,\sigma'\in\mathfrak{S}_n$. Schließe daraus

$$\mathrm{sgn}(\sigma) = \det\big(e_{\sigma(1)}|e_{\sigma(2)}|\cdots|e_{\sigma(n)}\big),$$

für jede Permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. *Hinweis: Die rechte Seite definiert einen Homomorphismus $\mathfrak{S}_n \to \{1,-1\}$, der alle Transpositionen auf -1 abbildet, vgl. Lemma V.3.2.* Dies ermöglicht folgende direkte Herleitung der Leibniz'schen Formel, erkläre dabei jedes Gleichheitszeichen:

$$\det(A) = \sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} A_{1,i_1}\cdots A_{n,i_n}\det\big(e_{i_1}|\cdots|e_{i_n}\big)$$
$$= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} A_{1,\sigma(1)}\cdots A_{n,\sigma(n)}\det\big(e_{\sigma(1)}|\cdots|e_{\sigma(n)}\big) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)A_{1,\sigma(1)}\cdots A_{n,\sigma(n)}$$

21. Zeige, dass für jede Matrix $A\in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ die Gleichung

$$\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)A_{1,\sigma(1)}\cdots A_{n,\sigma(n)} = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{sgn}(\sigma)A_{\sigma(1),1}\cdots A_{\sigma(n),n}$$

gilt. Leite daraus und der Leibniz'schen Formel erneut $\det(A)=\det(A^t)$ her.

22. Zeige, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ offen in $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ ist. Zeige, dass $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ abgeschlossen in $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ ist. *Hinweis: Die Determinantenfunktion ist stetig.*

23. Seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi\in\mathrm{end}(V)$, B eine geordnete Basis von V und $[\varphi]_{BB}\in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ die Matrix von φ bezüglich B. Zeige, dass $\mathrm{tr}\big([\varphi]_{BB}\big)$ nicht von der Basis B abhängt und daher

$$\mathrm{tr}\colon \mathrm{end}(V)\to\mathbb{K}, \qquad \mathrm{tr}(\varphi) = \mathrm{tr}\big([\varphi]_{BB}\big).$$

wohldefiniert ist. Zeige auch:

(a) Die Spur ist linear, d.h. $\mathrm{tr}(\varphi_1+\varphi_2) = \mathrm{tr}(\varphi_1)+\mathrm{tr}(\varphi_2)$ und $\mathrm{tr}(\lambda\varphi) = \lambda\,\mathrm{tr}(\varphi)$.
(b) $\mathrm{tr}(\psi\circ\varphi) = \mathrm{tr}(\varphi\circ\psi)$.
(c) $\mathrm{tr}(\varphi^t) = \mathrm{tr}(\varphi)$.
(d) $\mathrm{tr}(\mathrm{id}_V) = \dim(V)$.

für $\varphi,\psi,\varphi_1,\varphi_2\in\mathrm{end}(V)$ und $\lambda\in\mathbb{K}$. *Hinweis: Gehe wie in Korollar V.4.2 vor.*

24. Seien W und W' zwei komplementäre Teilräume eines endlich-dimensionalen Vektorraums V, d.h. $V = W\oplus W'$. Weiters bezeichne $\pi\colon V\to V$ die Projektion auf W längs W' und $\sigma\colon V\to V$ die Spiegelung an W längs W'. Berechne $\mathrm{tr}(\pi)$ und $\det(\sigma)$. Berechne auch $\det(\lambda\,\mathrm{id}_V)$, wobei $\lambda\in\mathbb{K}$.

25. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, W ein Teilraum von V und $\varphi\colon V \to V$ linear, sodass $\varphi(W) \subseteq W$. Zeige

$$\det(\varphi) = \det(\varphi|_W)\det(\bar{\varphi}),$$

wobei $\varphi|_W\colon W \to W$ die Einschränkung von φ bezeichnet, und $\bar{\varphi}$ die auf dem Quotientenraum V/W induzierte lineare Abbildung $\bar{\varphi}\colon V/W \to V/W$, $\bar{\varphi}([v]) = [\varphi(v)]$ bezeichnet. *Hinweis: Dies lässt sich durch geschickte Wahl einer Basis von V auf Aufgabe 7 zurückführen.*

26. Sei V ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass

$$\mathrm{GL}^+(V) := \{\varphi \in \mathrm{end}(V) : \det(\varphi) > 0\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(V)$ bildet.

27. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{K}$. Zeige, dass der Homomorphismus $\det\colon \mathrm{GL}(V) \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ surjektiv ist.

28. Betrachte die beiden geordneten Basen $B = (b_1, b_2, b_3)$ und $B' = (b'_1, b'_2, b'_3)$ von $\mathbb{R}^3$, wobei:

$$b_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}, \quad b'_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad b'_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}, \quad b'_3 = \begin{pmatrix}0\\7\\8\end{pmatrix}$$

Sind B und B' gleichorientiert? Welche dieser Basen ist bezüglich der Standardorientierung auf $\mathbb{R}^3$ positiv orientiert?

29. Zeige, dass für jedes $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ folgende Zahlen übereinstimmen:

(a) $\mathrm{rank}(A)$
(b) das größte k, für das es eine invertierbare $(k \times k)$-Untermatrix von A gibt
(c) das größte k, für das es eine $(k \times k)$-Untermatrix von A gibt, deren Determinante nicht verschwindet

Dabei verstehen wir unter einer $(k \times k)$-Untermatrix von A jede Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{pmatrix}$$

wobei $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$ und $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leq n$ und a_{ij} die Eintragung von A in der i-ten Zeile und j-ten Spalte bezeichnet.

30. Sei V ein endlich-dimensionaler komplexer Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ (komplex) linear. Es bezeichne $V_{\mathbb{R}}$ den zugrundeliegenden reellen Vektorraum und $\varphi_{\mathbb{R}}\colon V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ dieselbe Abbildung, aufgefasst als reell lineare Abbildung. Zeige

$$\det(\varphi_{\mathbb{R}}) = \left|\det(\varphi)\right|^2,$$

und schließe daraus, dass im invertierbaren Fall $\varphi_{\mathbb{R}}$ orientierungsbewahrend ist. *Hinweis: Ist* $B = (b_1, \ldots, b_n)$ *eine Basis des komplexen Vektorraums* V*, dann bildet* $\tilde{B} = (b_1, \mathbf{i}b_1, b_2, \mathbf{i}b_2, \ldots, b_n, \mathbf{i}b_n)$ *eine Basis des reellen Vektorraums* $V_{\mathbb{R}}$*, und es gilt*

$$[\varphi_{\mathbb{R}}]_{\tilde{B}\tilde{B}} = \left(\begin{array}{cc|c|cc} x_{11} & -y_{11} & \cdots & x_{1n} & -y_{1n} \\ y_{11} & x_{11} & \cdots & y_{1n} & x_{1n} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \hline x_{n1} & -y_{n1} & \cdots & x_{nn} & -y_{nn} \\ y_{n1} & x_{n1} & \cdots & y_{nn} & x_{nn} \end{array}\right), \textit{wobei} \quad [\varphi]_{BB} = \begin{pmatrix} z_{11} & \cdots & z_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & \cdots & z_{nn} \end{pmatrix}$$

und $z_{ij} = x_{ij} + \mathbf{i}y_{ij}$. *Die gewünschte Gleichung lässt sich mittels Induktion nach* n *zeigen, für den Induktionsschritt betrachte zunächst den Fall* $z_{21} = z_{31} = \cdots = z_{n1} = 0$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\operatorname{tr}(\varphi)$ und $\operatorname{tr}(\varphi_{\mathbb{R}})$?

31. Für jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ bezeichne $S_\sigma = (e_{\sigma(1)}|\cdots|e_{\sigma(n)})$ die entsprechende Permutationsmatrix.

a) Zeige:

$$(S_\sigma)^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} S_\sigma = \begin{pmatrix} \lambda_{\sigma(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

b) Sei D eine $(n \times n)$-Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen und A eine weitere $(n \times n)$-Matrix. Zeige, dass $AD = DA$ genau dann gilt, wenn A eine Diagonalmatrix ist. Zeige anhand eines Beispiels, dass die Voraussetzung an die Diagonaleinträge von D wirklich notwendig ist.

c) Sei D eine $(n \times n)$-Diagonalmatrix mit paarweise verschiedenen Diagonaleinträgen und S eine invertierbare Matrix, sodass auch $S^{-1}DS$ eine Diagonalmatrix bildet. Zeige, dass dann S von der Form $S = AS_\sigma$ sein muss, wobei A eine invertierbar $(n \times n)$-Diagonalmatrix bezeichnet und $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. *Hinweis: Zeige zunächst mit Hilfe von a), dass o.B.d.A.* $S^{-1}DS = D$ *angenommen werden kann, und verwende dann b).*

32. Bestimme alle Eigenwerte und Eigenräume folgender reeller Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Matrizen sind diagonalisierbar? Gib im diagonalisierbaren Fall Matrizen S an, sodass $S^{-1}AS$ bzw. $S^{-1}BS$ Diagonalmatrizen bilden.

33. Wie im vorangehenden Beispiel nun für die reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 20 & 30 \\ -2 & -12 & -18 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -8 & 6 \\ 0 & -15 & 11 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

34. Bestimme alle Eigenwerte und Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{K}$. Ist A diagonalisierbar?

35. Sei $q \in \mathbb{K}[z]$ ein Polynom und D eine Dreiecksmatrix,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}. \quad \text{Zeige} \quad q(D) = \begin{pmatrix} q(\lambda_1) & * & \cdots & * \\ & q(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & q(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

36. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ eine diagonalisierbare lineare Abbildung und $q \in \mathbb{K}[z]$ ein Polynom. Zeige, dass dann auch $q(\varphi)$ diagonalisierbar ist und bestimme das Spektrum von $q(\varphi)$.

37. Erkläre warum die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

über dem Körper $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ nicht diagonalisierbar ist. Zeige, dass sie über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sehr wohl diagonalisierbar ist, bestimme ihre Eigenwert und Eigenräume sowie eine invertierbare Matrix S, sodass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

38. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ linear, $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert von φ und $E_\lambda = \ker(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V)$ der entsprechende Eigenraum. Darüber hinaus, sei $\psi\colon V \to V$ eine weitere lineare Abbildung, die mit φ kommutiert, d.h. $\varphi\psi = \psi\varphi$. Zeige, dass ψ die Eigenräume von φ invariant lässt, d.h. $\psi(E_\lambda) \subseteq E_\lambda$.

39. Betrachte die Folge $0, 1, 2, 7, 20, 61, 182, \ldots$ Genauer sei

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_n = 2x_{n-1} + 3x_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Bestimme eine explizite Formel für x_n. Gehe dabei wie in Beispiel VI.1.26 vor.

40. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$.

(a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Eigenwerten und Eigenräumen von A und denen von μA, wobei $0 \neq \mu \in \mathbb{K}$?

(b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Eigenwerten und Eigenräumen von A und denen von A^{-1}, falls A invertierbar ist.

(c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Eigenwerten von A und denen von A^t?

Gehe jeweils auch auf die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten ein.

41. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Zeige
$$\tfrac{d}{dt}\big|_0 \det(I_n + tA) = \operatorname{tr}(A).$$
Hinweis: Es existiert $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, sodass $S^{-1}AS$ eine obere Dreiecksmatrix ist. Erkläre warum obige Formel auch für reelle Matrizen $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ richtig bleibt.

42. Zeige, dass jedes Polynom der Form $p = p_0 + p_1 z + \cdots + p_{n-1}z^{n-1} + (-1)^n z^n$, wobei $p_i \in \mathbb{K}$, als charakteristisches Polynom einer Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ auftritt. Berechne dazu das charakteristische Polynom der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & (-1)^{n-1}p_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & \ddots & 0 & (-1)^{n-1}p_{n-2} \\ & & 1 & (-1)^{n-1}p_{n-1} \end{pmatrix}$$
mittels Induktion nach n.

43. Zeige, dass $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ dicht in $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ liegt, d.h. in jeder Umgebung einer Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ gibt es invertierbare Matrizen. Betrachte dazu die Familie von Matrizen $A - t$, $t \in \mathbb{R}$, und zeige, dass es beliebig kleine t gibt für die $A - t$ invertierbar ist.

44. Sei p eine Primzahl. Zeige, dass der Körper $\mathbb{Z}_p$ nicht algebraisch abgeschlossen ist. *Hinweis: Betrachte das Polynom $q = 1 + (z-1)(z-2)\cdots(z-p)$.*

45. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\pi\colon V \to V$ ein Projektor, d.h. $\pi^2 = \pi$. Bestimme alle Eigenwerte und Eigenräume sowie das charakteristische Polynom von π. Gib jeweils auch die geometrische und algebraische Vielfachheit der Eigenwerte an.

46. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, betrachte den Vektorraum der glatten Funktionen, $V := C^\infty(I, \mathbb{R})$, und bezeichne $D\colon V \to V$, $D(f) := f'$, den Ableitungsoperator. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $f_\lambda \in V$, $f_\lambda(x) := e^{\lambda x}$. Zeige, dass f_λ Eigenvektor von D ist und bestimme den Eigenwert.

47. Sei $P \in M_{n\times n}(\mathbb{K}[z])$ eine Matrix von Polynomen. Zeige, dass $\det(P)$ linear in jeder Spalte ist, d.h. für beliebige Polynome $p_{ij}, \tilde{p}_{ij}, q \in \mathbb{K}[z]$ gilt
$$\det\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j}+\tilde{p}_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nj}+\tilde{p}_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & \tilde{p}_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & \tilde{p}_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$
und
$$\det\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & qp_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & qp_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} = q\det\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nj} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$
Zeige weiters $\det(P^t) = \det(P)$, vgl. Aufgabe 21, und schließe daraus, dass $\det(P)$ auch linear in jeder Spalte ist.

48. Sei $P = (p_1|\cdots|p_n) \in M_{n\times n}(\mathbb{K}[z])$ eine Matrix von Polynomen. Zeige $\det(p_{\sigma(1)}|\cdots|p_{\sigma(n)}) = \operatorname{sign}(\sigma)\det(P) \in \mathbb{K}[z]$, für jede Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

49. Seien $P, Q \in M_{n\times n}(\mathbb{K}[z])$ zwei Matrizen, deren Eintragungen Polynome sind. Zeige $\det(PQ) = \det(P)\det(Q) \in \mathbb{K}[z]$ auf zwei Arten: Für unendliche Körper unter Verwendung von $(\det(P))(\lambda) = \det(P(\lambda))$, $\lambda \in \mathbb{K}$, und dann für beliebige Körper. *Anleitung für den zweiten Teil:*

1.) Zeige, dass $\det(PQ)$ und $\det(P)\det(Q)$ beide linear in jeder Spalte von Q sind, siehe Aufgabe 47, und schließe daraus, dass es o.B.d.A. genügt Matrizen der Form $Q = (e_{i_1}|\cdots|e_{i_n})$ zu betrachten.
2.) Zeige, dass $\det(PQ) = 0 = \det(Q)$, falls Q zwei gleiche Spalten besitzt, und schließe daraus, dass es o.B.d.A. genügt Permutationsmatrizen $Q = (e_{\sigma(1)}|\cdots|e_{\sigma(n)})$ zu betrachten, wobei $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
3.) Verwende Aufgabe 48 um den Beweis abzuschließen.

50. Zeige, dass für jede Matrix $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$ die Relation

$$\det(A) = \tfrac{1}{2}\Big(\operatorname{tr}(A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)\Big)$$

gilt und analog für $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{K})$

$$\det(A) = \tfrac{1}{6}\Big(\operatorname{tr}(A)^3 - 3\operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(A^2) + 2\operatorname{tr}(A^3)\Big).$$

Hinweis: Es genügt dies für algebraisch abgeschlossene Körper, d.h. triangulierbare Matrizen, zu zeigen.

51. Betrachte die Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 3, \quad \sigma(3) = 4, \quad \ldots \quad \sigma(n-1) = n, \quad \sigma(n) = 1,$$

und die assoziierte Permutationsmatrix

$$A = (e_{\sigma(1)}|\cdots|e_{\sigma(n)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{C}),$$

Bestimme alle komplexen Eigenwerte von A sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheit. Ist A diagonalisierbar? *Freiwillige Zusatzaufgabe: Bestimme eine Eigenbasis von A.*

52. Seien $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ zwei Matrizen von denen mindestens eine invertierbar ist. Zeige, dass AB und BA die selben Eigenwerte mit den gleichen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben.

53. Welche der folgenden reellen Matrizen sind triangulierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -9 & -1 \end{pmatrix}.$$

Gib im triangulierbaren Fall jeweils invertierbare Matrizen S an, sodass $S^{-1}AS$, $S^{-1}BS$, etc. obere Dreiecksgestalt besitzt.

54. Wie in der vorangehenden Aufgabe nun mit den reellen Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 18 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & -8 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 8 & 12 & 5 \end{pmatrix}.$$

55. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) φ ist triangulierbar, d.h. es existiert eine Basis B von V, sodass $[\varphi]_{BB}$ obere Dreiecksgestalt hat.

(b) Es existieren Teilräume $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V$ mit $\dim(V_i) = i$ und $\varphi(V_i) \subseteq V_i$, für jedes $i = 1, \dots, n$.

56. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Zeige, dass φ genau dann triangulierbar ist, wenn $\varphi^t\colon V^* \to V^*$ triangulierbar ist. Schließe daraus, dass eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ genau dann triangulierbar ist, wenn die transponierte Matrix $A^t \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ triangulierbar ist.

57. Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Für jede der Matrizen

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & 1 & & \\ & & & \lambda & 1 & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & 0 & & \\ & & & \lambda & 1 & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 0 & & & \\ & & \lambda & 1 & & \\ & & & \lambda & 1 & \\ & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

bestimme die Dimensionen der Teilräume

$$E_\lambda = \ker(A-\lambda) \subseteq \ker\bigl((A-\lambda)^2\bigr) \subseteq \cdots \subseteq \ker\bigl((A-\lambda)^N\bigr) = \tilde{E}_\lambda$$

sowie das minimale N für das $\ker\bigl((A-\lambda)^N\bigr) = \tilde{E}_\lambda$ gilt, wobei A jeweils eine der Matrizen bezeichnet.

58. Für $\varepsilon \in \mathbb{K}$ zeige:

$$S^{-1}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} \lambda & \varepsilon & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & \varepsilon \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \varepsilon & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon^{n-1} \end{pmatrix}$$

59. Verifiziere den Satz von Caley–Hamilton anhand folgender Matrix,

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ -3 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

d.h. bestimme das charakteristische Polynom p von A und berechne $p(A)$.

60. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ eine Matrix, deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt, d.h. $p = (\lambda_1 - z)^{m_1} \cdots (\lambda_k - z)^{m_k}$, wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte und $m_1, \dots, m_k$ ihre algebraischen Vielfachheiten bezeichnen. Beweise erneut den Satz von Caley–Hamilton, d.h. $p(A) = 0$, nun in Matrixschreibweise. *Anleitung:*

(1) Nach Satz VI.3.7 über die Primärzerlegung existiert $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, sodass

$$B := S^{-1}AS = \begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \cdots & * \\ & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix} \in M_{m_i \times m_i}(\mathbb{K}).$$

(2) Wie sehen die Diagonaleinträge des i-ten Diagonalblocks von $(B - \lambda_i I_n)$ aus?
(3) Wie sieht der i-te Diagonalblock von $(B - \lambda_i I_n)^{m_i}$ aus?
(4) Schließe daraus, dass $p(B) = (\lambda_1 I_n - B)^{m_1} \cdots (\lambda_k I_n - B)^{m_k} = 0$.
(5) Folgere $p(A) = 0$.

61. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Weiters sei $\psi\colon V \to V$ linear und kommutiere mit φ, d.h. $\varphi\psi = \psi\varphi$. Zeige, $\psi(\tilde{E}_\lambda) \subseteq \tilde{E}_\lambda$, wobei $\tilde{E}_\lambda$ den verallgemeinerten Eigenraum zu einem Eigenwert λ von φ bezeichnet.

62. Seien $\varphi, \psi\colon V \to V$ zwei kommutierende nilpotente lineare Abbildungen. Zeige, dass dann auch $\varphi + \psi$ nilpotent ist. Gib zwei (nicht kommutierende) nilpotente Abbildungen an, deren Summe nicht nilpotent ist.

63. Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ eine diagonalisierbare lineare Abbildung. Weiters sei $V = W \oplus W'$ eine invariante Zerlegung, d.h. $\varphi(W) \subseteq W$ und $\varphi(W') \subseteq W'$. Zeige, dass dann auch die Einschränkungen $\varphi|_W\colon W \to W$ und $\varphi|_{W'}\colon W' \to W'$ diagonalisierbar sind.

64. Zeige, dass die einzige diagonalisierbare und nilpotente lineare Abbildung die Nullabbildung ist.

65. Seien $\varphi, \psi\colon V \to V$ zwei kommutierende diagonalisierbare lineare Abbildungen. Zeige, dass φ und ψ gleichzeitige diagonalisierbar sind, d.h. es existiert eine Basis B von V, sodass $[\varphi]_{BB}$ und $[\psi]_{BB}$ Diagonalmatrizen sind.

66. Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bestimme eine diagonalisierbare Matrix D sowie eine nilpotente Matrix N, sodass $A = D + N$ und $DN = ND$.

67. Zeige folgende Formel für die k-te Potenz eines $(n \times n)$-Jordanblocks:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \cdots & \binom{k}{n}\lambda^{k-n-1} \\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \ddots & \vdots \\ & & \lambda^k & \ddots & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} \\ & & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ & & & & \lambda^k \end{pmatrix}$$

Hinweis: Induktion nach k.

68. Bestimme die Jordan'sche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 & -1 \\ & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

sowie eine invertierbar Matrix S, sodass $S^{-1}AS$ Normalform hat.

69. Bestimme die Jordan'sche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 4 \\ & & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & 3 & 0 & 1 & 2 \\ & & & & 3 & 0 & 0 \\ & & & & & 3 & 1 \\ & & & & & & 3 \end{pmatrix}$$

sowie eine invertierbar Matrix S, sodass $S^{-1}AS$ Normalform hat.

70. Bestimme die Jordan'sche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -7 & -33 & -22 & 33 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 9 & 6 & -11 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & -8 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

sowie eine invertierbar Matrix S, sodass $S^{-1}AS$ Normalform hat.

71. Bestimme die Jordan'schen Normalformen folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 10 & 4 & 1 \\ -20 & -15 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 24 & -12 \\ -1 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & 0 \\ 18 & 1 & 1 & 1 \\ -23 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser Matrizen sind ähnlich zueinander?

72. Betrachte einen Jordanblock der Form

$$A = J_{2m}(\alpha, \beta) := \begin{pmatrix} \begin{matrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{matrix} & I_2 & & \\ & \begin{matrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{matrix} & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ & & & \begin{matrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{matrix} \end{pmatrix} \in M_{2m\times 2m}(\mathbb{R}),$$

wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $\beta > 0$. Bestimme

$$\dim\ker\Big(\big((A - \alpha I_{2m})^2 + \beta^2 I_{2m}\big)^r\Big),$$

für jedes $r \in \mathbb{N}$.

73. Bestimme die eindeutige Primfaktorzerlegung des reellen Polynoms

$$p = z^{10} - z^9 + 6z^8 - 6z^7 + 9z^6 - 9z^5 + 4z^4 - 4z^3 \in \mathbb{R}[z].$$

Fasse dann p als komplexes Polynom auf, $p \in \mathbb{C}[z]$, und bestimme seine Primfaktorzerlegung über $\mathbb{C}$. *Hinweis: Die Nullstellen sind* $0, 1, \pm\mathbf{i}, \pm 2\mathbf{i}$.

74. Zeige, dass das Polynom $p \in \mathbb{Q}[z]$, $p = z^3 + 2$, irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

75. Für jede komplexe Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ sei $\bar{A} \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ jene Matrix, die wir erhalten indem wir jeden Eintrag durch seinen komplex konjugierten ersetzen, d.h. $\bar{A}_{i,j} = \overline{A_{i,j}}$. Zeige:

(a) $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$, für alle $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.
(b) $\overline{\lambda A} = \bar{\lambda}\bar{A}$, für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.
(c) $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$, für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ und $B \in M_{n\times k}(\mathbb{C})$.

76. Bestimme die relle Jordan'sche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{6\times 6}(\mathbb{R}).$$

77. Bestimme das Minimalpolynom der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & & & & & & \\ & 5 & 1 & & & & & \\ & & 5 & 0 & & & & \\ & & & 5 & 1 & & & \\ & & & & 5 & 0 & & \\ & & & & & 5 & 1 & \\ & & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & & & 5 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Das Minimalpolynom ist ein Teiler des charakteristischen Polynoms.

78. Bestimme das Minimalpolynom $m_A \in \mathbb{K}[z]$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} J_{m_{1,1}}(\lambda_1) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & J_{m_{1,n_1}}(\lambda_1) & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & J_{m_{k,1}}(\lambda_k) & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J_{m_{k,n_k}}(\lambda_k) \end{pmatrix},$$

wobei $k, n_i, m_{i,j} \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ und $J_m(\lambda)$ den Jordanblock der Größe m mit Eigenwert λ bezeichnet. Zeige weiters:

$$\deg(m_A) = \sum_{i=1}^{k} \max\{m_{i,j} \mid j = 1, \ldots, n_i\}.$$

79. Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Zeige, dass die Menge der Bilinearformen auf V bezüglich der Operationen

$$(\beta_1 + \beta_2)(v, w) := \beta_1(v, w) + \beta_2(v, w), \qquad (\lambda\beta)(v, w) = \lambda\beta(v, w).$$

einen $\mathbb{K}$-Vektorraum bildet. Zeige weiters, dass die Menge der symmetrischen Bilinearformen ein Teilraum ist. Formuliere und beweise die analoge Aussage für Sesquilinearformen (Hermitesche Formen).

80. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to \mathbb{K}$ eine Abbildung, die linear in der ersten Eintragung und symmetrisch ist, d.h. es gelte

$$\beta(v + v', w) = \beta(v, w) + \beta(v', w), \quad \beta(\lambda v, w) = \lambda\beta(v, w), \quad \beta(w, v) = \beta(v, w),$$

für alle $v, v', w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeige, dass β eine symmetrische Bilinearform ist, d.h. zeige, dass β dann auch linear in der zweiten Eintragung sein muss. Formuliere und beweise die analoge Aussage für Hermitesche Formen.

81. Bestimme die Matrix (bezüglich der Standardbasis) der symmetrischen Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ mit quadratischer Form:

$$q\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 7xz - 6yz.$$

82. Sei $\beta\colon V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform mit assoziierter quadratischer Form $q(v) = \beta(v, v)$. Zeige, dass q der sogenannte *Parallelogrammgleichung* genügt, d.h. für alle $v, w \in V$ gilt

$$q(v + w) + q(v - w) = 2q(v) + 2q(w).$$

Formuliere und beweise die analoge Aussage für Hermitesche Formen.

83. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform. Zeige, dass

$$O(V, \beta) := \big\{\varphi \in \mathrm{GL}(V) \bigm| \forall v, w \in V : \beta(\varphi(v), \varphi(w)) = \beta(v, w)\big\}$$

bezüglich Komposition von Abbildungen eine Gruppe bildet. Zeige weiters, dass im Fall $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$,

$$O(V, \beta) = \big\{\varphi \in \mathrm{GL}(V) \bigm| \forall v \in V : q(\varphi(v)) = q(v)\big\},$$

wobei $q(v) = \beta(v, v)$ die assozierte quadratische Form bezeichnet. Formuliere und beweise die analoge Aussage für Hermitesche Formen.

84. Sei $\varphi\colon W \to V$ eine lineare Abbildung und $\beta\colon V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform. Zeige, dass $\varphi^*\beta$,

$$\varphi^*\beta\colon W \times W \to \mathbb{K}, \qquad (\varphi^*\beta)(w_1, w_2) := \beta\big(\varphi(w_1), \varphi(w_2)\big),$$

eine symmetrische Bilinearform auf W definiert. Zeige:

$$(\varphi \circ \psi)^*\beta = \psi^*(\varphi^*\beta) \qquad \text{und} \qquad (\mathrm{id}_V)^*\beta = \beta$$

für jede weitere lineare Abbildung $\psi\colon U \to W$, sowie

$$\varphi^*(\beta_1 + \beta_2) = \varphi^*\beta_1 + \varphi^*\beta_2 \qquad \text{und} \qquad \varphi^*(\lambda\beta) = \lambda\varphi^*\beta$$

für symmetrische Bilinearformen β, β_1, β_2 auf V und $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeige weiters:

(a) Ist β positiv/negativ semidefinit, dann ist $\varphi^*\beta$ positiv/negativ semidefinit.
(b) Ist β positiv/negativ def. und φ injektiv, dann ist $\varphi^*\beta$ positiv/negativ def.
(c) Ist β nicht-degeneriert und φ injektiv, dann ist auch $\varphi^*\beta$ nicht degeneriert.
(d) $\iota^*\beta = \beta|_W$, wobei $\iota\colon W \to V$ die Inklusion eines Teilraums bezeichnet.
(e) $O(V, \beta) = \{\varphi \in \mathrm{GL}(V) \mid \varphi^*\beta = \beta\}$.

Formuliere und beweise analoge Eigenschaften Hermitescher Formen.

85 (Frobeniushomomorphismus). Sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit endlicher Charakteristik, $p = \mathrm{char}(\mathbb{K})$. Zeige, dass die Abbildung

$$F\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}, \qquad F(x) = x^p,$$

ein Körperhomomorphismus ist, d.h. es gilt

$$F(x+y) = F(x) + F(y) \qquad \text{und} \qquad F(xy) = F(x)F(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{K}$. Für die Fixpunktmenge von F zeige weiters,

$$\mathrm{Fix}(F) := \{x \in \mathbb{K} \mid F(x) = x\} = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}.$$

Hinweis: Nach dem kleinen Satz von Fermat gilt $n^p \equiv n \mod (p)$*, für jede Primzahl* p *und alle* $n \in \mathbb{Z}$*. Auch ist* $\binom{p}{i}$ *durch* p *teilbar, für alle* $0 < i < p$*.*

86. Sei $\beta\colon V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform und $W := \ker(\beta)$. Zeige, dass

$$\bar{\beta}\colon V/W \times V/W \to \mathbb{K}, \qquad \bar{\beta}([v],[v']) := \beta(v, v'),$$

eine wohldefinierte symmetrische Bilinearform definiert, die nicht-degeneriert ist.

87. Zwei symmetrische Matrizen $A, B \in M^{\mathrm{sym}}_{n\times n}(\mathbb{K})$ werden *kongruent* genannt, falls $S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ existiert, sodass $B = S^tAS$. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation auf $M^{\mathrm{sym}}_{n\times n}(\mathbb{K})$ ist. Formuliere und beweise die analoge Aussage für Hermitesche Formen.

88. Sei V ein endlich dimensionaler komplexer Vektorraum. Weiters seien β und β' zwei symmetrische Bilinearformen auf V mit $\mathrm{rank}(\beta) = \mathrm{rank}(\beta')$. Zeige, dass ein linearer Isomorphismus $\varphi\colon V \to V$ existiert, sodass $\beta' = \varphi^*\beta$, d.h. $\beta'(v, w) = \beta(\varphi(v), \varphi(w))$, für alle $v, w, \in V$. *Hinweis: Satz VII.1.25.*

89. Für jede der folgenden symmetrischen Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{i} & 2 \\ 0 & 2 & -4-7\mathbf{i} \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 8 & 13 & 18 \\ 11 & 18 & 25 \end{pmatrix},$$

bestimme eine invertierbare Matrix $S_i \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$, sodass $S_i^tA_iS_i = \left(\begin{smallmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Welche der Matrizen A_i sind kongruent über $\mathbb{C}$.

90. Sei V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum. Weiters seien β und β' zwei symmetrische Bilinearformen auf V mit gleicher Signatur. Zeige, dass ein linearer Isomorphismus $\varphi\colon V \to V$ existiert, sodass $\beta' = \varphi^*\beta$, d.h. $\beta'(v,w) = \beta(\varphi(v),\varphi(w))$, für alle $v,w,\in V$. *Hinweis: Satz VII.1.35.* Formuliere und beweise die analoge Aussage für Hermitesche Formen

91. Sei V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum und $g\colon V\times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform mit Signatur (p,q), wobei $p+q=n$. Weiters sei B eine geordnete Basis von V, sodass $[g]_B = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix}$. Zeige, dass

$$O_{p,q} := \left\{ A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \;\middle|\; A^t \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} I_p & \\ & -I_q \end{pmatrix} \right\}$$

bezüglich Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet. Zeige weiters, dass

$$O(V,g) \cong O_{p,q}, \qquad \varphi \leftrightarrow [\varphi]_B,$$

ein Gruppenisomorphismus ist. *Bemerkung: Die Gruppe $O_{3,1}$ (und auch die Gruppe $O_{1,3}$) wird Lorentz Gruppe genannt, und spielt in der Physik eine zentrale Rolle.*

92. Bestimme die Signatur folgender reeller quadratischer Formen:

$$q_1 = -x^2$$
$$q_2 = -4x^2 - 34y^2 - 12xy$$
$$q_3 = 4x^2 + 13y^2 - 3z^2 + 8xy + 8xz + 26yz$$
$$q_4 = 9x^2 + 26y^2 + z^2 + 4w^2 + 6xy - 6xz + 6xw + 18yz - 18yw - 14zw$$

93. Bestimme die Signatur folgender symmetrischer reeller Matrizen:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 6 & 13 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Gib jeweils Matrizen $S_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ an, sodass $S_n^t A_n S_n$ die Gestalt $\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ hat.

94. Zeige, dass für die adjungierte Matrix folgenden Rechenregeln gelten:
(a) $A^{**} = A$, für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.
(b) $(A+B)^* = A^* + B^*$, für alle $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.
(c) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$, für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.
(d) $(AB)^* = B^* A^*$, für alle $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ und $B \in M_{n\times l}(\mathbb{C})$.
Zeige, dass die Menge der selbstadjungierten Matrizen einen reellen aber keinen komplexen Teilraum von $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ bilden.

95. Sei $h\colon V\times V \to \mathbb{C}$ eine Hermitesche Form und $q\colon V \to \mathbb{R}$, $q(v) = h(v,v)$, die damit assozierte quadratische Form. Verifiziere folgende Polarisierungsidentität für $v, w \in V$:

$$h(v,w) = \tfrac{1}{4}\big(q(v+w) - q(v-w)\big) - \mathbf{i}\tfrac{1}{4}\big(q(v+\mathbf{i}w) - q(v-\mathbf{i}w)\big).$$

96. Zeige, dass die Menge der positiv/negativ (semi)definiten Hermiteschen Formen eine konvexe Teilmenge im reellen Vektorraum aller Hermiteschen Formen bildet. *Hinweis: vgl. Bemerkung VII.1.31.* Formuliere und beweise die analoge Aussage für selbstadjungierte Matrizen.

97. Zeige, dass sich jede Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ auf eindeutige Weise in der Form $A = B + \mathbf{i}C$ schreiben lässt, wobei B und C selbstadjungiert sind. *Hinweis: Betrachte $A + A^*$ und $A - A^*$.*

98. Seien $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $C \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$. Zeige:
(a) $A^tA \geq 0$ und $A^tA > 0$, falls $\operatorname{rank}(A) = n$.
(b) $C^*C \geq 0$ und $C^*C > 0$, falls $\operatorname{rank}(C) = n$.

99. Bezeichne $\mathcal{S}_{p,q} \subseteq M^{\mathrm{sym}}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ die Menge der symmetrischen (2×2)-Matrizen mit Signatur (p, q). Betrachte den linearen Isomorphismus

$$\phi\colon M^{\mathrm{sym}}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^3, \qquad \phi\begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

und skizziere die Teilmengen $\phi(\mathcal{S}_{2,0})$, $\phi(\mathcal{S}_{1,1})$, $\phi(\mathcal{S}_{0,2})$ von $\mathbb{R}^3$. *Hinweis: Sylvesterkriterium*

100. Bestimme die Signatur der Hermiteschen Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+\mathbf{i} & -\mathbf{i} \\ 2-\mathbf{i} & 9 & 1-2\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1+2\mathbf{i} & 1 \end{pmatrix}.$$

101 (Cosinussatz). Sei V ein Euklidischer Vektorraum, $v, w \in V$, $v \neq 0 \neq w$ und bezeichne α den Winkel zwischen v und w, d.h. $\cos(\alpha) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\|w\|}$. Zeige

$$\|v - w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\|\cos(\alpha).$$

102. Zeige, dass

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|$$

eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert, für die die Parallelogrammgleichung nicht gilt. Schließe, dass $\|-\|_1$ nicht von einem inneren Produkt auf $\mathbb{R}^n$ induziert wird. *Hinweis: siehe Proposition VII.2.8.*

103. Zeige, dass

$$\langle x, y\rangle = x^t \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 12 \\ 3 & 12 & 27 \end{pmatrix} y.$$

ein inneres Produkt auf $\mathbb{R}^3$ definiert. Wende das Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahren auf die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ an, um eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ bezüglich des inneren Produkts oben zu bestimmen.

104. Betrachte den von den Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$$

aufgespannten Teilraum W in $\mathbb{R}^4$. Verwende das Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahren, um eine Orthonormalbasis von W sowie einen Normalektor, $v \in W^\perp$, zu bestimmen.

105. Bestimme die QR-Zerlegung der invertierbaren Matrizen

$$A = \begin{pmatrix}2 & -2\\2 & 4\end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix}-2 & -4 & -5\\1 & 3 & 6\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

106 (Operatornorm). Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen Euklidischen oder unitären Vektoräumen. Zeige

$$\|\varphi\| := \sup_{0 \neq v \in V} \frac{\|\varphi(v)\|}{\|v\|} = \sup_{v \in V,\, \|v\|=1} \|\varphi(v)\| < \infty,$$

und verifiziere, dass dies eine Norm auf dem Vektorraum $L(V,W)$ definiert die folgende Eigenschaften besitzt:

(a) $\|\varphi(v)\| \leq \|\varphi\|\|v\|$, für jedes $v \in V$.
(b) $\|\psi \circ \varphi\| \leq \|\psi\|\|\varphi\|$, für jede weiter lineare Abbildung $\psi\colon W \to U$.
(c) $\|\varphi^*\| = \|\varphi\|$
(d) $\|\varphi^*\varphi\| = \|\varphi\|^2$

107 (Kreuzprodukt). Sei a, b ein Orthonormalsystem in $\mathbb{R}^3$, d.h. $\|a\| = 1 = \|b\|$ und $\langle a, b\rangle = 0$. Zeige, dass $a, b, a \times b$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ ist. Schließe daraus, dass die Matrix $A := (a|b|a \times b)$ orthogonal ist. Berechne $\det(A)$.

108. Zeige, dass

$$O_n = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A^tA = I_n\}$$

eine kompakte Teilmenge von $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$ ist. *Hinweis: Zeige, dass O_n beschränkt und abgschlossen ist; die Norm $\|A\|^2 = \mathrm{tr}(A^tA)$ auf $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ist dabei hilfreich.* Zeige auch, dass

$$U_n = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) : A^*A = I_n\}$$

eine kompakte Teilmenge von $M_{n\times n}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2} = \mathbb{R}^{2n^2}$ ist.

109. Zeige $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$, für jede Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. Folgere daraus, $|\det(A)| = 1$, für jede unitäre Matrix $A \in U_n$. Zeige, analog, dass $\det(A) \in \{\pm 1\}$, für jede orthogonale Matrix $A \in O_n$.

110 (Legendre-Polynome). Betrachte den Euklidischen Vektorraum der stetigen Funktionen, $C^0([-1,1],\mathbb{R})$, mit innerem Produkt

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

Wende das Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahren auf die linear unabhängige Teilmenge $1, x, x^2, x^3$ an, und bestimme so eine Orthonormalbasis des davon aufgespannten Teilraums.

111. Betrachte den Vektorraum der stetigen Funktionen, $C^0([0,2\pi],\mathbb{C})$, mit innerem Produkt

$$\langle f,g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)dt.$$

Zeige, dass die Funktionen $e^{\mathbf{i}nt}$, $n\in\mathbb{Z}$, ein Orthonormalsystem bilden.

112. Zeige, dass die Menge der reellen bzw. komplexen oberen Dreiecksmatrizen mit positiven Diagonaleinträgen eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bzw. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ bilden.

113. Seien W und W' zwei komplementäre Teilräume eines endlich dimensionalen reellen Vektorraums V, d.h. $V = W \oplus W'$. Zeige, dass ein inneres Produkt auf V existiert, für das $W^\perp = W'$ gilt. Formuliere und beweise die analoge Aussage für komplexe Vektorräume.

114. Bestimme die Matrix (bezüglich der Standardbasis) der Orthogonalprojektion auf den Teilraum

$$W = \left\langle \begin{pmatrix}2\\2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$$

von $\mathbb{R}^4$, sowie den Abstand $d(v,W)$ des Punktes $v = \left(\begin{smallmatrix}3\\-1\\1\\-2\end{smallmatrix}\right)$ zu W.

115. Sei V ein endlich dimensionaler Euklidischer oder unitärer Vektorraum und $p\colon V\to V$ ein Projektor, $p^2 = p$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) p ist selbstadjungiert, d.h. $p^* = p$.
(b) $V = \mathrm{img}(p)\oplus\ker(p)$ ist eine orthogonale Zerlegung, d.h. $\ker(p) = \mathrm{img}(p)^\perp$.
(c) p ist die Orthogonalprojektion auf $\mathrm{img}(p)$.

116. Sei V ein endlich dimensionaler Euklidischer oder unitärer Vektorraum, bezeichne $\iota\colon W\to V$ die Inklusion eines Teilraums und $p\colon V\to W$ die Orthogonalprjektion. Zeige $\iota^* = p$ und $p^* = \iota$.

117. Sei V ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum. Zeige, dass

$$\langle v, w\rangle_{\mathbb{R}} := \mathrm{Re}(\langle v, w\rangle)$$

ein inneres Produkt auf dem zugrundeliegenden reellen Vektorraum $V_{\mathbb{R}} = V$ liefert. Für eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ bezeichne $\varphi_{\mathbb{R}}\colon V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ die selbe Abbildung, aber als reell lineare Abbildung aufgefasst. Zeige weiters:

(a) Ist $\varphi\colon V \to V$ selbstadjungiert, so ist $\varphi_{\mathbb{R}}\colon V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ symmetrisch.
(b) Ist $\varphi\colon V \to V$ unitär, so ist $\varphi_{\mathbb{R}}\colon V_{\mathbb{R}} \to V_{\mathbb{R}}$ orthogonal.

118. Sei V ein endlich dimensionaler Euklidischer oder unitärer Vetorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Zeige:

$$\varphi(W) \subseteq W \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^*(W^\perp) \subseteq W^\perp$$

119. Für jede der folgenden symmetrischen Matrizen A bestimme eine orthogonale Matrix U, sodass $U^{-1}AU = U^tAU$ Diagonalgestalt hat:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

120. Für jede der folgenden selbstadjungierten Matrizen A bestimme eine unitäre Matrix U, sodass $U^{-1}AU = U^*AU$ Diagonalgestalt hat:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 6 & -2\mathbf{i} \\ 2\mathbf{i} & 9 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2\mathbf{i} & 2 \\ 2\mathbf{i} & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

121. Zeige, dass die Drehung ρ_E^θ in Beispiel VII.4.4 nicht von der Wahl der Orthonormalbasis B abhängt. *Hinweis: Die Gruppe SO_2 ist Abelsch.*

122. Seien a_1 und a_2 zwei linear unabhängige Einheitsvektoren eines endlich dimensionalen Euklidischen Vektorraums, $\|a_1\| = 1 = \|a_2\|$, und bezeichne α den Winkel zwischen a_1 und a_2. Weiters seien $\sigma_{a_1}, \sigma_{a_2}\colon V \to V$ die orthogonalen Spiegelungen an $a_1^\perp$ bzw. $a_2^\perp$. Zeige, dass die Komposition $\rho := \sigma_{a_1}\sigma_{a_2}\colon V \to V$ mit der Drehung in dem von a_1 und a_2 erzeugten 2-dimensionalen Teilraum $E \subseteq V$ um den Winkel $\theta = 2\alpha$ übereinstimmt, d.h. zeige, $\rho = \rho_E^\theta$, mit der Notation in Beispiel VII.4.4. *Hinweis: Die Verdoppelungsformel für den Cosinus lautet:* $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$.