Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Lineare Algebra und Geometrie 1

Sommersemester 2012, LVN 250036

am 6. Juli 2012, 2-stündig

1 (3 Punkte)**.** Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 (2 Punkte)**.** Formuliere die Leibniz'sche Formel für die Determinante.

3 (5 Punkte)**.** Bestimme alle Eigenwerte, ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten, sowie Basen aller Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Gib auch eine invertierbare Matrix S an, sodass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

4 (5 Punkte)**.** Bestimme die Jordan'sche Normalform, J, der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & 5 \end{pmatrix},$$

sowie eine invertierbare Matrix S mit $S^{-1}AS = J$.

5 (5 Punkte)**.** Verwende das Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahren um eine Orthonormalbasis des Teilraums

$$W := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$$

zu bestimmen, wobei $\mathbb{R}^4$ mit dem standard inneren Produkt ausgestattet sei.

6 (2 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wann wird eine symmetrische Bilinearform $\beta\colon V \times V \to \mathbb{K}$ nicht degeneriert genannt?

7 (3 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und β eine symmetrische Bilinearform auf V. Weiters seien B und C zwei Basen von V. Formuliere und beweise die Gleichung, die die Matrixdarstellungen $[\beta]_B$ und $[\beta]_C$ miteinander in Beziehung bringt.

8 (4 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum und $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Nach dem Trägheitssatz von Sylvester existiert eine Basis B von V, sodass $[\beta]_B = \left(\begin{smallmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Zeige nun:

$$p = \max\bigl\{\dim(W) \bigm| W \text{ ist Teilraum von } V \text{ und } \beta|_W > 0\bigr\}.$$

9 (4 Punkte)**.** Formuliere und beweise die Cauchy–Schwarz Ungleichung für unitäre Vektorräume.

10 (2 Punkte)**.** Zeige, dass die Determinante einer unitären Matrix Absolutbetrag Eins hat.

11 (5 Punkte)**.** Gib jeweils an ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Jede reelle quadratische Matrix hat mindestens einen reellen Eigenwert.
(b) Jede symmetrische reelle Matrix ist über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.
(c) Jede komplexe quadratische Matrix ist triangulierbar.
(d) Jede Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, für die $A^2 = A$ gilt, ist über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.
(e) Die folgenden beiden Matrizen sind ähnlich:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 11 & 6 \end{vmatrix} = - \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}}_{=1\cdot 2\cdot 3=6} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 9 & 5 & 0 \\ 20 & 11 & 6 \end{vmatrix}}_{4\cdot 5\cdot 6=120} = -720.$$

2. Siehe Satz V.3.6 im Skriptum.

3. Für das charakteristische Polynom von A erhalten wir

$$p = \det \begin{pmatrix} 3-z & 0 & -2 \\ 1 & 1-z & -1 \\ 1 & 0 & -z \end{pmatrix} = (1-z)^2(2-z),$$

die Matrix hat daher zwei Eigenwerte, $\lambda = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und $\mu = 2$ mit algebraischer Vielfachheit 1. Für die Eigenräume erhalten wir

$$E_1 = \ker(A - I_3) = \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$$E_2 = \ker(A - 2I_3) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte λ und μ sind daher 2 bzw. 1. Da algebraische und geometrische Vielfachheiten übereinstimmen, ist A diagonalisierbar, es gilt

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei} \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Das charakteristische Polynom von A ist $p = (2-z)^3$, der einzige Eigenwert ist daher $\lambda = 2$. Es gilt

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad (A - 2I_3)^2 = 0.$$

Daraus können wir bereits die Jordan'sche Normalform ablesen,

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Um eine Matrix S mit $S^{-1}AS = J$ zu bestimmen, benötigen wir einen Vektor b_1 mit $(A - 2I_3)b_1 \neq 0$. Wir verwenden den ersten Einheitsvektor, $b_1 = e_1$, und berechnen den zweiten Basisvektor, $b_2 = (A - 2I_3)b_1 = \left(\begin{smallmatrix} -2 \\ -2 \\ -6 \end{smallmatrix}\right)$. Für den dritten Basisvektor, b_3, muss $b \notin \langle b_1, b_2 \rangle$ und $(A - 2I_3)b_3 = 0$ gelten. Wir verwenden $b_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und erhalten

$$S^{-1}AS = J, \qquad \text{wobei} \qquad S = (b_3|b_2|b_1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Die Vektoren $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ bilden eine Basis von W. Wenden wir darauf das Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahren an erhalten wir:

$$b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_2 = v_2 - \langle b_1, v_2 \rangle b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \frac{\tilde{b}_2}{\|\tilde{b}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_3 = v_3 - \langle b_1, v_3 \rangle b_1 - \langle b_2, v_3 \rangle b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{6} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = \frac{\tilde{b}_3}{\|\tilde{b}_3\|} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren b_1, b_2, b_3 bilden daher eine Orthonormalbasis von W.

6. Siehe Definition VII.1.14 im Spriptum.

7. Siehe Proposition VII.1.9 im Skriptum.

8. Siehe Skriptum, zweiter Teil im Beweis von Satz VII.1.35.

9. Siehe Proposition VII.2.9 im Skriptum.

10. Sei U eine unitäre Matrix, d.h. $U^*U = I_n$. Mit den Rechenregeln für die Determinante erhalten wir

$$1 = \det(I_n) = \det(U^*U) = \det(U^*)\det(U) = \overline{\det(U)}\det(U) = |\det(U)|^2,$$

also hat $\det(U)$ Absolutbetrag Eins.

11.

(a) falsch, etwa hat die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ keinen reellen Eigenwert.
(b) wahr, siehe Korollar VII.3.16 im Skriptum.
(c) wahr, siehe Korollar VI.2.26 im Skriptum.
(d) wahr, jeder Projektor ist diagonalisierbar, siehe Beispiel VI.1.7 im Skriptum.
(e) falsch, siehe Korollar VI.3.20 im Skriptum.