Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Lineare Algebra und Geometrie 1

Sommersemester 2012, LVN 250036

am 5. Oktober 2012, 2-stündig

1 (3 Punkte)**.** Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2 (2 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Zeige $\det([\varphi]_{BB}) = \det([\varphi]_{CC})$, wobei $[\varphi]_{BB}$ und $[\varphi]_{CC}$ die Matrixdarstellungen von φ bezüglich zweier Basen B und C von V bezeichnen.

3 (5 Punkte)**.** Bestimme eine orthogonale Matrix U, sodass $U^{-1}AU$ Diagonalgestalt hat, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4 (5 Punkte)**.** Bestimme die Jordan'sche Normalform, J, der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

sowie eine invertierbare Matrix S mit $S^{-1}AS = J$.

5 (2 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Wann wird φ triangulierbar genannt?

6. (3 Punkte) Bestimme die Signatur der (reellen) quadratischen Form

$$q\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = 4x^2 + 13y^2 - 3z^2 + 8xy + 8xz + 26yz$$

7 (2 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum, $\varphi\colon V \to V$ selbstadjungiert und $\psi\colon V \to V$ unitär. Zeige, dass dann auch $\psi^{-1}\varphi\psi$ selbstadjungiert ist.

8 (3 Punkte)**.** Zeige, dass $U_n := \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) : A^*A = I_n\}$ bezüglich Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

9 (5 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Teilraum. Zeige: $V = W \oplus W^\perp$ und $W^{\perp\perp} = W$.

10 (2 Punkte)**.** Zeige, dass jeder Eigenwert einer unitären Matrix Absolutbetrag Eins hat.

11 (3 Punkte)**.** Formuliere und beweise die Polarisierungsidentität für reelle symmetrische Bilinearformen.

12 (5 Punkte)**.** Gib jeweils an ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Jede orthogonale Matrix ist (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar.
(b) Jede unitäre Matrix ist diagonalisierbar.
(c) Jede quadratische reelle Matrix ist über $\mathbb{R}$ triangulierbar.
(d) Besitzt eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ genau n verschiedene reelle Eigenwerte, so ist sie über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.
(e) Die folgenden beiden Matrizen sind ähnlich:

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = (-5) \cdot 9 \cdot (-13) = 585$$

2. Bezeichnet T_{BC} die Matrix zum Basiswechsel von C nach B, dann gilt $[\varphi]_{CC} = T_{CB}[\varphi]_{BB}T_{BC} = T_{BC}^{-1}[\varphi]_{BB}T_{BC}$ und daher

$$\begin{aligned} \det\bigl([\varphi]_{CC}\bigr) &= \det\bigl(T_{BC}^{-1}[\varphi]_{BB}T_{BC}\bigr) = \det\bigl(T_{BC}^{-1}\bigr)\det\bigl([\varphi]_{BB}\bigr)\det\bigl(T_{BC}\bigr) \\ &= \det\bigl(T_{BC}\bigr)^{-1}\det\bigl([\varphi]_{BB}\bigr)\det\bigl(T_{BC}\bigr) = \det\bigl([\varphi]_{BB}\bigr), \end{aligned}$$

vgl. Skriptum, Beginn von Abschnitt V.4.

3. Für das charakteristische Polynom von A erhalten wir

$$p = \det(A - zI_4) = \begin{vmatrix} 3-z & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3-z & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3-z & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3-z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3-z & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3-z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-z & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3-z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-z & -1 \\ -1 & 3-z \end{vmatrix}^2 = \bigl((3-z)^2 - 1\bigr)^2,$$

die Matrix hat daher zwei Eigenwerte, $\lambda = 3 \pm 1$. Für die Eigenräume erhalten wir

$$E_2 = \ker(A - 2I_4) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E_4 = \ker(A - 4I_4) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Mit Hilfe des Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahrens erhalten wir Orthonormalbasen der Eigenräume:

$$E_2 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad \text{und} \qquad E_4 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Es gilt daher

$$U^{-1}AU = U^tAU = \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 2 & & \\ & & 4 & \\ & & & 4 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in O_4.$$

4. Die Matrix A hat nur einen Eigenwert, nämlich 3, und es gilt

$$A - 3I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A - 3I_4)^2 = 0.$$

Da $\operatorname{rank}(A - 3I_4) = 2$, muss die Jordan'sche Normalform die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & 1 \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

haben. Um eine Matrix S mit $S^{-1}AS = J$ zu bestimmen benötigen wir einen Vektor b_1, sodass $(A - 3I_4)b_1 \neq 0$. Wir verwenden den zweiten Einheitsvektor und erhalten

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = (A - 3I_4)b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\operatorname{img}(A - 3I_4) \not\subseteq \langle b_1, b_2 \rangle$ suchen wir nun einen Vektor b_3, sodass $(A - 3I_4)b_3 \notin \langle b_1, b_2 \rangle$. Wir entscheiden uns für den vierten Einheitsvektor und erhalten

$$b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = (A - 3I_4)b_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher

$$S^{-1}AS = J \quad \text{mit} \quad S = (b_2|b_1|b_4|b_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Siehe Definition VI.2.23 im Skriptum.

6. Durch Ergänzen auf vollständige Quadrate erhalten wir:

$$\begin{aligned} q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 4x^2 + 13y^2 - 3z^2 + 8xy + 8xz + 26yz \\ &= (2x + 2y + 2z)^2 + 9y^2 - 7z^2 + 18yz \\ &= (2x + 2y + 2z)^2 + (3y + 3z)^2 - 16z^2. \end{aligned}$$

Die Signatur von q ist daher $(2, 1)$.

7. Da $\varphi = \varphi^*$ haben wir

$$(\psi^*\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*\psi^{**} = \psi^*\varphi^*\psi = \psi^*\varphi\psi,$$

also ist $\psi^*\varphi\psi$ selbstadjungiert. Da $\psi^{-1} = \psi^*$, ist also auch $\psi^{-1}\varphi\psi$ selbstadjungiert.

8. Zunächst ist jedes $A \in U_n$ invertierbar mit Inverser $A^{-1} = A^*$. Es gilt daher auch $(A^{-1})^*A^{-1} = AA^{-1} = I_n$, also $A^{-1} \in U_n$. Für $A, B \in U_n$ gilt $A^*A = I_n = B^*B$, also $(AB)^*(AB) = B^*A^*AB = B^*I_nB = B^*B = I_n$, und daher auch $AB \in U_n$. Offensichtlich ist $I_n \in U_n$, denn $I_n^*I_n = I_n$. Dies zeigt, dass U_n eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ bildet.

9. Siehe Satz VII.2.32 und Korollar VII.2.33 im Skriptum.

10. Sei $\varphi\colon V \to V$ unitär, d.h. $\varphi^*\varphi = \mathrm{id}_V$. Dann gilt

$$\|\varphi(v)\|^2 = \langle\varphi(v), \varphi(v)\rangle = \langle(\varphi^*\varphi)(v), v\rangle = \langle v, v\rangle = \|v\|^2$$

und daher $\|\varphi(v)\| = \|v\|$, für jedes $v \in V$. Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert und $0 \neq v \in V$ mit $\varphi(v) = \lambda v$. Dann folgt

$$|\lambda|\|v\| = \|\lambda v\| = \|\varphi(v)\| = \|v\|,$$

also $|\lambda| = 1$, vgl. Korollar VII.4.5.

11. Siehe Proposition VII.1.22 im Skriptum.

12.

(a) falsch, etwa ist die orthogonale Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ nicht diagonalisierbar (über $\mathbb{R}$).
(b) wahr, unitäre Matrize sind normal und lassen sich nach dem Spektralsatz für normale Operatoren diagonalisieren.
(c) falsch, etwa besitzt die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ keinen einzigen reellen Eigenwert und kann daher nicht triangulierbar sein.
(d) wahr, vgl. Proposition VI.1.15.
(e) wahr, siehe Korollar VI.3.20.