Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Lineare Algebra und Geometrie 1

Sommersemester 2012, LVN 250036

am 30. November 2012, 2-stündig

1 (3 Punkte)**.** Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2 (3 Punkte)**.** Gib die Formel für die Determinante einer allgemeinen Vandermonde Matrix an und berechne damit die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{pmatrix}.$$

3 (4 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Erkläre wie die Determinante $\det(\varphi) \in \mathbb{K}$ definiert ist. Gehe dabei auch auf die Wohldefiniertheit ein. Zeige weiters $\det(\psi \circ \varphi) = \det(\psi)\det(\varphi)$ für je zwei lineare Abbildungen $\psi, \varphi\colon V \to V$.

4 (3 Punkte)**.** Zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

nilpotent ist und bestimme eine invertierbare Matrix B, sodass $B^{-1}AB$ strikte obere Dreiecksgestalt hat.

5 (4 Punkte)**.** Bestimme eine unitäre Matrix U, sodass $U^{-1}AU$ Diagonalgestalt hat, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6 (3 Punkte)**.** Bestimme die Jordan'sche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

7 (3 Punkte)**.** Bestimme die Signatur der (reellen) quadratischen Form

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4x^2 + 10y^2 + 3z^2 - 4xy - 4xz + 8yz$$

8 (3 Punkte)**.** Ergänze die beiden Vektoren $b_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu einer Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3, b_4 von $\mathbb{R}^4$.

9 (5 Punkte)**.** Formuliere und beweise die Cauchy–Schwarz Ungleichung für Euklidische Vektorräume.

10 (5 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler Euklidischer Vektorraum und $f\colon V \to V$ eine Abbildung, sodass $d(f(v), f(w)) = d(v, w)$, für alle $v, w \in V$. Dabei bezeichnet $d(v, w) = \|w - v\|$ die Euklidische Distanz. Zeige, dass f von der Form $f(v) = \varphi(v) + b$ ist, wobei $\varphi \in O(V)$ und $b \in V$.

11 (4 Punkte)**.** Gib jeweils an ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Für jede orthogonale Matrix A gilt $\det(A) = \pm 1$.

(b) Für je zwei Teilräume W_1 und W_2 eines endlich dimensionalen Euklidischen Vektorraums V gilt: $W_1 = W_2 \Leftrightarrow W_1^\perp = W_2^\perp$.

(c) Jede Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ mit $A^* = -A$ ist diagonalisierbar.

(d) Es existiert eine invertierbare Matrix S, sodass:

$$S^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5! = -120$$

2. Für die allgemeine Formel, siehe Skriptum, Satz V.1.14. Damit erhalten wir:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 1 & 5 & 25 & 125 \end{vmatrix} = (3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4) = 12.$$

3. Siehe Skriptum, Abschnitt V.4.

4. Eine Rechnung ergibt

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also ist A nilpotent. Weiters:

$$\ker(A) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle, \qquad \ker(A^2) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle,$$

$$\ker(A^3) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle.$$

Die Matrix $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{smallmatrix} \right)$ hat daher die gewünschte Eigenschaft,

$$B^{-1}AB = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right).$$

5. Für das charakteristische Polynom von A erhalten wir

$$p = \det(A - zI_4) = \begin{vmatrix} -z & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -z & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -z & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -z & -1 \\ 1 & -z \end{vmatrix}^2 = \left(z^2 + 1\right)^2,$$

die Matrix hat daher zwei Eigenwerte, $\lambda = \pm\mathbf{i}$. Für die Eigenräume erhalten wir

$$E_{\mathbf{i}} = \ker(A - \mathbf{i}I_4) = \ker \begin{pmatrix} -\mathbf{i} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{i} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E_{-\mathbf{i}} = \ker(A + \mathbf{i}I_4) = \ker \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{i} & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathbf{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Es gilt daher

$$U^{-1}AU = U^*AU = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & & & \\ & \mathbf{i} & & \\ & & -\mathbf{i} & \\ & & & -\mathbf{i} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{i} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{i} \end{pmatrix} \in U_4.$$

6. Die Matrix A hat nur einen Eigenwert, nämlich 5, und es gilt

$$A - 5I_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A - 5I_5)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und $(A - 5I_5)^3 = 0$. Da $\operatorname{rank}(A - 5I_5) = 3$ und $\operatorname{rank}(A - 5I_5)^2 = 1$, muss die Jordan'sche Normalform folgende Gestalt haben:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

7. Durch Ergänzen auf vollständige Quadrate erhalten wir:

$$\begin{aligned} q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 4x^2 + 10y^2 + 3z^2 - 4xy - 4xz + 8yz \\ &= (2x - y - z)^2 + 9y^2 + 2z^2 + 6yz \\ &= (2x - y - z)^2 + (3y + z)^2 + z^2. \end{aligned}$$

Die Signatur von q ist daher $(3, 0)$.

8. Betrachten wir $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, so bilden die Vektoren b_1, b_2, v_3, v_4 eine Basis von $\mathbb{R}^4$. Mit Hilfe des Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahrens erhalten wir die gesuchte Orthonormalbasis:

$$\tilde{b}_3 = v_3 - \langle b_1, v_3 \rangle b_1 - \langle b_2, v_3 \rangle b_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{\tilde{b}_3}{\|\tilde{b}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\tilde{b}_4 = v_4 - \langle b_1, v_4 \rangle b_1 - \langle b_2, v_4 \rangle b_2 - \langle b_3, v_4 \rangle b_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \frac{\tilde{b}_4}{\|\tilde{b}_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

9. Siehe Proposition VII.2.9 im Skriptum.

10. Siehe Satz VII.4.7 im Skriptum.

11.

(a) wahr
(b) wahr
(c) wahr
(d) falsch