Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Lineare Algebra und Geometrie 1

Sommersemester 2012, LVN 250036

am 1. Februar 2013, 2-stündig

1 (3 Punkte)**.** Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 (5 Punkte)**.** Formuliere und beweise die Formel für die Determinante einer Vandermonde Matrix.

3 (2 Punkte)**.** Was verstehen wir unter einer Orientierung eines endlich dimensionalen reellen Vektorraums?

4 (2 Punkte)**.** Seien W und W' zwei komplementäre Teilräume eines reellen Vektorraums $V = W \oplus W'$, sodass $\dim(W) = 2$ und $\dim(W') = 3$. Ist die Spiegelung an W längs W' orientierungs-umkehrend oder orientierungs-erhaltend? Begründe die Antwort!

5 (5 Punkte)**.** Bestimme die Jordan'sche Normalform, J, der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 5 & -6 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

sowie eine invertierbare Matrix S mit $S^{-1}AS = J$.

6 (3 Punkte)**.** Was verstehen wir unter einem inneren Produkt auf einem reellen Vektorraum, und was ist das orthogonale Komplement eines Teilraums?

7 (4 Punkte)**.** Betrachte den Teilraum

$$W := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Bestimme eine Orthonormalbasis von W und auch eine Orthonormalbasis des orthogonalen Komplements $W^{\perp}$.

8 (5 Punkte)**.** Sei W ein Teilraum eines endlich dimensionalen Euklidischen Vektorraums V. Zeige $V = W \oplus W^\perp$.

9 (4 Punkte)**.** Formuliere und beweise die Dreiecksungleichung für die Norm eines unitären Vektorraums.

10 (3 Punkte)**.** Bestimme die Signatur der (reellen) quadratischen Form

$$q\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = 4x^2 + 10y^2 + 3z^2 - 4xy - 4xz + 8yz$$

11 (2 Punkte)**.** Was verstehen wir unter der Adjungierten einer linearen Abbildung zwischen endlich dimensionalen unitären Vektorräumen?

12 (2 Punkte)**.** Zeige, dass jeder Eigenwert eine selbstadjungierten linearen Abbildung auf einem endlich dimensionalen unitären Vektorraum reell ist.

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) = -2.$$

2. siehe Skriptum, Satz V.1.14.

3. Siehe Skriptum, Abschnitt V.5.

4. Die Spiegelung hat Determinante -1 und ist daher orientierungs-umkehrend.

5. Das charakteristische Polynom von A ist $p = (2-z)^3$, der einzige Eigenwert ist daher $\lambda = 2$. Es gilt

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (A-2I_3)^2 = 0.$$

Daraus können wir bereits die Jordan'sche Normalform ablesen,

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Um eine Matrix S mit $S^{-1}AS = J$ zu bestimmen, benötigen wir einen Vektor b_1 mit $(A-2I_3)b_1 \neq 0$. Wir verwenden den zweiten Einheitsvektor, $b_1 = e_2$, und berechnen den zweiten Basisvektor, $b_2 = (A-2I_3)b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Für den dritten Basisvektor, b_3, muss $b_3 \notin \langle b_1, b_2 \rangle$ und $(A-2I_3)b_3 = 0$ gelten. Wir verwenden $b_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und erhalten

$$S^{-1}AS = J, \qquad \text{wobei} \qquad S = (b_3|b_2|b_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Siehe Skriptum, Definition VII.2.1 und Definition VII.2.30.

7. Mit Hilfe des Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahrens erhalten wir fogende Orthonormalbasis von W:

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \qquad b_2 = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$$

Eine Orthonormalbasis des Komplements $W^{\perp}$ ist:

$$b_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8. siehe Skriptum, Satz VII.2.32.

9. siehe Skriptum, Proposition VII.2.10.

10. Durch Ergänzen auf vollständige Quadrate erhalten wir:

$$\begin{aligned} q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 4x^2 + 10y^2 + 3z^2 - 4xy - 4xz + 8yz \\ &= (2x - y - z)^2 + 9y^2 + 2z^2 + 6yz \\ &= (2x - y - z)^2 + (3y + z)^2 + z^2. \end{aligned}$$

Die Signatur von q ist daher $(3, 0)$.

11. siehe Skriptum, Proposition VII.3.2.

12. siehe Lemma VII.3.7 im Skriptum.