Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Lineare Algebra und Geometrie 1

Sommersemester 2012, LVN 250036

am 15. März 2013, 2-stündig

1 (3 Punkte)**.** Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 8 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 7 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}.$$

2 (5 Punkte)**.** Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und betrachte folgende $(n \times n)$-Determinante:

$$D_n := \begin{vmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & c & a & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{vmatrix}$$

Zeige, dass die Rekursionsgleichung $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$ gilt, und berechne damit die $(n \times n)$-Determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

3 (5 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Erkläre wie die Determinante $\det(\varphi) \in \mathbb{K}$ definiert ist. Gehe dabei auch auf die Wohldefiniertheit ein. Zeige weiters $\det(\psi \circ \varphi) = \det(\psi)\det(\varphi)$ für je zwei lineare Abbildungen $\psi, \varphi\colon V \to V$.

4 (4 Punkte)**.** Bestimme alle Eigenwerte, ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten, sowie Basen aller Eigenräume der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

5 (5 Punkte)**.** Bestimme die Jordan'sche Normalform, J, der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

sowie eine invertierbare Matrix S mit $S^{-1}AS = J$.

6 (3 Punkte)**.** Bestimme die Signatur der folgenden reellen quadratischen Form:

$$w^2 + x^2 + 5y^2 - z^2 + 2xy - 2xz + 2yz.$$

7 (5 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler Euklidischer Vektorraum, $W \subseteq V$ ein Teilraum, und $v \in V$. Zeige, dass genau einen Punkt $p \in W$ existiert, der minimalen Abstand zu v hat, d.h. $\exists! p \in W \,\forall w \in W : d(v,p) \leq d(v,w)$. Zeige weiters, dass dieser Punkt p durch $p - v \in W^\perp$ eindeutig charakterisiert ist.

8 (2 Punkte)**.** Zeige, dass jeder Eigenwert eine selbstadjungierten linearen Abbildung auf einem endlich dimensionalen unitären Vektorraum reell ist.

9 (3 Punkte)**.** Bestimme eine Orthonormalbasis des Teilraums

$$W := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^4,$$

und auch eine Orthonormalbasis des orthogonalen Komplements $W^\perp$.

10 (5 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler Euklidischer Vektorraum und $f \colon V \to V$ eine Abbildung, sodass $d(f(v), f(w)) = d(v,w)$, für alle $v, w \in V$. Dabei bezeichnet $d(v,w) = \|w - v\|$ die Euklidische Distanz. Zeige, dass f von der Form $f(v) = \varphi(v) + b$ ist, wobei $\varphi \in O(V)$ und $b \in V$.

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1.

$$\begin{vmatrix} 8 & 7 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 7 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 7 & 8 \\ 7 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8$$

2. Die Rekursionsgleichung lässt sich durch Entwickeln nach der ersten Spalte oder Zeile herleiten. Lösen der Rekursionsgleichung $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$ liefert:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{vmatrix} = n + 1$$

3. Siehe Skriptum, Abschnitt V.4.

4. Der Eigenwerte 3 hat algebraische Vielfachheit 3 und geometrische Vielfachheit 2. Eine Basis des zugehörigen Eigenraums E_3 ist $e_1, e_2 - e_3$. Der einzige weitere Eigenwert ist 5 mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 1. Eine Basis des Eigenraums E_5 ist e_4.

5. Die Matrix A hat nur einen Eigenwert, nämlich 2, und es gilt

$$A - 2I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (A - 2I_4)^2 = 0.$$

Da $\operatorname{rank}(A - 2I_4) = 2$, muss die Jordan'sche Normalform die Gestalt

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix}$$

haben. Um eine Matrix S mit $S^{-1}AS = J$ zu bestimmen benötigen wir einen Vektor b_1, sodass $(A - 2I_4)b_1 \neq 0$. Wir verwenden den zweiten Einheitsvektor und erhalten

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = (A - 2I_4)b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da $\operatorname{img}(A - 2I_4) \not\subseteq \langle b_1, b_2 \rangle$ suchen wir nun einen Vektor b_3, sodass $(A - 2I_4)b_3 \notin \langle b_1, b_2 \rangle$. Wir entscheiden uns für den vierten Einheitsvektor und erhalten

$$b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_4 = (A - 2I_4)b_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher

$$S^{-1}AS = J \quad \text{mit} \quad S = (b_2|b_1|b_4|b_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Ergänzen auf vollstänfige Quadrate liefert:

$$\begin{aligned} w^2 + x^2 + 5y^2 - z^2 + 2xy - 2xz + 2yz &= w^2 + (x + y - z)^2 + 4y^2 - 2z^2 + 4yz \\ &= w^2 + (x + y - z)^2 + (2y + z)^2 - 3z^2 \end{aligned}$$

Die Signatur ist daher $(3, 1)$.

7. Siehe Satz VII.2.32 im Skriptum.

8. siehe Lemma VII.3.7 im Skriptum.

9. Die ersten beiden der Vektoren

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bilden eine Orthonormalbasis von W, und die letzten beiden eine von $W^\perp$.

10. Siehe Satz VII.4.7 im Skriptum.