Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Lineare Algebra und Geometrie 1

Sommersemester 2012, LVN 250036

am 3. Mai 2013, 2-stündig

1 (3 Punkte)**.** Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2 (4 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum. Was verstehen wir unter einer Orientierung von V? Wieviele verschiedene Orientierungen gibt es auf V? Begründe die Antwort.

3 (2 Punkte)**.** Sei W eine Hyperebene in einem endlich dimensionalen Euklidischen Vektorraum V. Ist die orthogonale Spiegelug an W orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend? Begründe die Antwort.

4 (4 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$ und $\varphi\colon V \to V$ linear. Was verstehen wir unter Eigenwerten, Eigenvektoren und Eigenräumen von φ? Zeige, dass $\lambda \in \mathbb{K}$ genau dann Eigenwert von φ ist, wenn $\det(\varphi - \lambda\,\mathrm{id}_V) = 0$ gilt.

5 (4 Punkte)**.** Bestimme die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten aller Eigenwerte der Matrix

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & & & \\ & 2 & & & \\ & & 4 & & 5 \\ & & & 4 & \\ & & & & 4 \end{smallmatrix}\right).$$

Gib auch Basen aller Eigenräume an. Ist A diagonalisierbar?

6 (2 Punkte)**.** Gib zwei reelle quadratische obere Dreiecksmatrizen A und B an, die die gleichen Eigenwerte mit den gleichen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben, für die aber keine invertierbare Matrix S mit $S^{-1}AS = B$ existiert. Begründe die Antwort, d.h. erkläre warum es eine solche Matrix S nicht geben kann.

7 (3 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler reeller Vektorraum und $\beta\colon V\times V\to\mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform. Nach dem Trägheitssatz von Sylvester existiert eine Basis B von V, sodass $[\beta]_B = \left(\begin{smallmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & 0\end{smallmatrix}\right)$. Zeige nun:

$$p = \max\bigl\{\dim(W) \bigm| W \text{ ist Teilraum von } V \text{ und } \beta|_W > 0\bigr\}.$$

8 (4 Punkte)**.** Formuliere und beweise die Cauchy–Schwarz Ungleichung für unitäre Vektorräume.

9 (2 Punkte)**.** Sei W ein Teilraum eines endlich dimensionalen Euklidischen Vektorraums V. Zeige $W^{\perp\perp} = W$.

10 (4 Punkte)**.** Zeige, dass die Vektoren $b_1 = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}2\\2\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$ und $b_2 = \frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-2\\2\end{smallmatrix}\right)$ ein Orthonormalsystem bilden und ergänze sie zu einer Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$.

11 (3 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum. Wann wird eine lineare Abbildung $\varphi\colon V\to V$ selbstadjungiert genannt? Zeige, dass im selbstadjungierten Fall jeder Eigenwert von φ reell ist.

12 (5 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler Euklidischer Vektorraum und $f\colon V\to V$ eine Abbildung, sodass $d(f(v), f(w)) = d(v,w)$, für alle $v,w\in V$. Dabei bezeichnet $d(v,w) = \|w-v\|$ die Euklidische Distanz. Zeige, dass f von der Form $f(v) = \varphi(v) + b$ ist, wobei $\varphi\in O(V)$ und $b\in V$.

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1.

$$\begin{vmatrix} 0&0&0&0&3&2\\ 0&0&0&0&1&4\\ 0&0&4&3&0&0\\ 0&0&1&2&0&0\\ 2&4&0&0&0&0\\ 1&3&0&0&0&0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3&2&0&0&0&0\\ 1&4&0&0&0&0\\ 0&0&4&3&0&0\\ 0&0&1&2&0&0\\ 0&0&0&0&2&4\\ 0&0&0&0&1&3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3&2\\ 1&4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4&3\\ 1&2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2&4\\ 1&3 \end{vmatrix} = 10 \cdot 5 \cdot 2 = 100.$$

2. Eine Orientierung auf V ist eine Äquivalenzklasse geordneter Basen von V. Dabei heißen zwei Basen B und B' von V äquivalent, wenn die Basiswecheselmatrix $T_{BB'}$ positive Determinante hat. Es gibt genau zwei Orientierungen auf V, vgl. Abschnitt V.5 im Skriptum.

3. Bezeichne $\sigma\colon V \to V$ die orthogonale Spiegelung an W. Weiters sei $w_1, \dots, w_n$ eine Basis von W und $0 \neq v \in W^\perp$. Dann ist $B = (w_1, \dots, w_n, v)$ eine Basis von V und es gilt $[\sigma]_{BB} = \left(\begin{smallmatrix} I_n & 0\\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Es folgt $\det(\sigma) = -1$, also ist die Spiegelung σ orientierungsumkehrend.

4. siehe Abschnitt VI.1 im Skriptum.

5. Die Eigenwerte von A sind 2 und 4. Dabei hat 2 algebraische Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1. Der Eigenwert 4 hat algebraische Vielfachheit 3 und geometrischer Vielfachheit 2. Weiters bildet e_1 eine Basis des Eigenraums E_2, und e_3, e_4 bildet eine Basis des Eigenraums E_4.

6. Etwa haben

$$A = \begin{pmatrix} 0&1&&\\ &0&1&\\ &&0&\\ &&&0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0&1&&\\ &0&&\\ &&0&1\\ &&&0 \end{pmatrix}$$

die gewünschten Eigenschaften. Beide Matrizen haben nur den Eigenwert 0 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 2. Da $A^2 \neq 0$ und $B^2 = 0$, kann es keine invertierbare Matrix S mit $S^{-1}AS = B$ geben.

7. siehe Skriptum, zweiter Teil im Beweis von Satz VII.1.35.

8. siehe Skriptum, Proposition VII.2.9.

9. Die Inklusion $W \subseteq W^{\perp\perp}$ ist offensichtlich. Aus der Dimensionsformel für das orthogonale Komplement erhalten wir $\dim(W^{\perp\perp}) = \dim(V) - \dim(W^\perp) = \dim(V) - \big(\dim(V) - \dim(W)\big) = \dim W$, es muss daher $W = W^{\perp\perp}$ gelten, vgl. Korollar VII.2.33 im Skriptum.

10. Eine einfache Rechnung zeigt $\|b_1\| = 1 = \|b_2\|$ und $\langle b_1, b_2\rangle = 0$, also ist b_1, b_2 ein Orthonormalsystem in $\mathbb{R}^4$. Betrachten wir $b_3' := \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ und $b_4' := \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$, dann bildet b_1, b_2, b_3', b_4' eine Basis von $\mathbb{R}^4$. Mit dem Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahren erhalten wir

$$\tilde{b}_3 = b_3' - \langle b_3', b_1\rangle b_1 - \langle b_3', b_2\rangle b_2 = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\\0\end{smallmatrix}\right) - \tfrac{2}{9}\left(\begin{smallmatrix}2\\2\\1\\0\end{smallmatrix}\right) = \tfrac{1}{9}\left(\begin{smallmatrix}5\\-4\\-2\\0\end{smallmatrix}\right)$$

$$b_3 = \frac{\tilde{b}_3}{\|\tilde{b}_3\|} = \tfrac{1}{\sqrt{45}}\left(\begin{smallmatrix}5\\-4\\-2\\0\end{smallmatrix}\right)$$

$$\tilde{b}_4 = b_4' - \langle b_4', b_1\rangle b_1 - \langle b_4', b_2\rangle b_2 - \langle b_4', b_3\rangle b_3 = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) - \tfrac{2}{9}\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\-2\\2\end{smallmatrix}\right) = \tfrac{1}{9}\left(\begin{smallmatrix}0\\-2\\4\\5\end{smallmatrix}\right)$$

$$b_4 = \frac{\tilde{b}_4}{\|\tilde{b}_4\|} = \tfrac{1}{\sqrt{45}}\left(\begin{smallmatrix}0\\-2\\4\\5\end{smallmatrix}\right)$$

Nach Konstruktion ist b_1, b_2, b_3, b_4 eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^4$.

11. vgl. Lemma VII.3.7 im Skriptum.

12. siehe Satz VII.4.7 im Skriptum.