Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Lineare Algebra und Geometrie 1

Sommersemester 2012, LVN 250036

am 14. Juni 2013, 2-stündig

1 (3 Punkte)**.** Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 3 & 5 \\ -1 & -5 & 4 & 7 \\ -2 & -14 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2 (5 Punkte)**.** Formuliere und beweise die Formel für die Determinante einer Vandermonde Matrix.

3 (5 Punkte)**.** Formuliere und beweise die Cramer'sche Regel zur Lösung linearer Gleichungssysteme.

4 (5 Punkte)**.** Bestimme die Jordan'sche Normalform J von

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & -3 \\ & 5 & 1 & -2 \\ & & 5 & 1 \\ & & & 5 \end{pmatrix}$$

sowie eine invertierbare Matrix S, sodass $S^{-1}AS = J$.

5 (2 Punkte)**.** Gib zwei reelle quadratische obere Dreiecksmatrizen A und B an, die die gleichen Eigenwerte mit den gleichen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben, für die aber keine invertierbare Matrix S mit $S^{-1}AS = B$ existiert. Begründe die Antwort, d.h. erkläre warum es eine solche Matrix S nicht geben kann.

6 (3 Punkte)**.** Sei B eine geordnete Basis eines endlich dimensionalen Vektorraums V und $\beta\colon V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform. Was verstehen wir unter der Matrixdarstellung $[\beta]_B$ von β bezüglich der Basis B? In welcher Beziehung stehen die Matrizen $[\beta]_B$ und $[\beta]_C$, wenn C eine weitere geordnete Basis von V bezeichnet?

7 (5 Punkte)**.** Sei $\beta\colon V \times V \to \mathbb{C}$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlich dimensionalen komplexen Vektorraum V. Zeige, dass eine geordnete Basis B von V existiert, sodass $[\beta]_B = \left(\begin{smallmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

8 (2 Punkte)**.** Was verstehen wir unter der Signatur einer symmetrischen Bilinearform auf einem endlich dimensionalen reellen Vektorraum?

9 (3 Punkte)**.** Bestimme eine Orthonormalbasis des Teilraums

$$W := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}.$$

10 (5 Punkte)**.** Sei V ein unitärer Vektorraum. Was verstehen wir unter der Norm $\|v\|$ eines Vektors $v \in V$? Zeige, dass für je zwei Vektoren $v, w \in V$ die Dreiecksungleichung $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ gilt.

11 (2 Punkte)**.** Sei $\varphi\colon V \to V$ eine selbstadjungierte lineare Abbildung auf einem endlich dimensionalen unitären Vektorraum V. Zeige $\ker(\varphi) = \operatorname{img}(\varphi)^{\perp}$.

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 3 & 5 \\ -1 & -5 & 4 & 7 \\ -2 & -14 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

2. siehe Satz V.1.14 im Skriptum.

3. siehe Satz V.2.1 im Skriptum.

4. Der einzige Eigenwert von A ist 5 und es gilt:

$$(A-5I) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ & 0 & 1 & -2 \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-5I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (A-5I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Jordan'sche Normalform von A ist daher

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & & \\ & 5 & 1 & \\ & & 5 & 1 \\ & & & 5 \end{pmatrix}.$$

Um eine Matrix S mit $S^{-1}AS = J$ zu bestimmen, benötigen wir einen Vektor v, sodass $(A - \lambda I)^3 v \neq 0$. Wir entscheiden uns für $v = e_4$ und erhalten:

$$(A-5I)^0 v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (A-5I)^1 v = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A-5I)^2 v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A-5I)^3 v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Matrix ist daher

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Etwa haben

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

die gewünschten Eigenschaften. Beide Matrizen haben nur den Eigenwert 0 mit algebraischer Vielfachheit 4 und geometrischer Vielfachheit 2. Da $A^2 \neq 0$ und $B^2 = 0$, kann es keine invertierbare Matrix S mit $S^{-1}AS = B$ geben.

6. siehe Definition VII.1.8 und Proposition VII.1.9 im Skriptum.

7. siehe Satz VII.1.25 im Skriptum.

8. siehe Definition VII.1.36 im Skriptum.

9. Offensichtlich ist

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

eine Orthogonalbasis von W. Normieren liefert die gesuchte Orthonormalbasis:

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Alternativ können wir das Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahren auf eine beliebige Basis von W anwenden, um eine Orthonormalbasis von W zu finden.

10. siehe Proposition VII.2.10.

11. Für $v, w \in V$ gilt $\langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \varphi^*(w) \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle$, denn $\varphi^* = \varphi$. Somit

$$\begin{aligned} v \in \ker(\varphi) &\Leftrightarrow \forall w \in V : \langle \varphi(v), w \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall w \in V : \langle v, \varphi(w) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall w \in V : v \perp \varphi(w) \\ &\Leftrightarrow v \in \operatorname{img}(\varphi)^\perp. \end{aligned}$$

also $\ker(\varphi) = \operatorname{img}(\varphi)^\perp$.