Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Lineare Algebra und Geometrie 1

Sommersemester 2012, LVN 250036

am 11. Oktober 2013, 2-stündig

1 (3 Punkte)**.** Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2 (4 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\varphi\colon V \to V$ linear. Erkläre wie die Determinante $\det(\varphi) \in \mathbb{K}$ definiert ist. Gehe dabei auch auf die Wohldefiniertheit ein. Zeige weiters $\det(\psi \circ \varphi) = \det(\psi)\det(\varphi)$ für je zwei lineare Abbildungen $\psi, \varphi\colon V \to V$.

3 (3 Punkte)**.** Zeige, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

nilpotent ist und bestimme eine invertierbare Matrix B, sodass $B^{-1}AB$ strikte obere Dreiecksgestalt hat.

4 (5 Punkte)**.** Bestimme die Jordan'sche Normalform, J, der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -3 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

sowie eine invertierbare Matrix S mit $S^{-1}AS = J$.

5 (2 Punkte)**.** Ergänze die beiden Vektoren $b_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $b_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ zu einer Orthonormalbasis b_1, b_2, b_3, b_4 von $\mathbb{R}^4$.

6 (4 Punkte)**.** Formuliere und beweise die Cauchy–Schwarz Ungleichung für unitäre Vektorräume.

7 (4 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Teilraum. Zeige: $V = W \oplus W^\perp$ und $W^{\perp\perp} = W$.

8 (2 Punkte)**.** Ist die reelle quadratische Form

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4x^2 + 10y^2 + 3z^2 - 4xy - 4xz + 8yz$$

positiv definit?

9 (5 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum. Wann wird eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ selbstadjungiert genannt? Zeige, dass im selbstadjungierten Fall jeder Eigenwert von φ reell ist und, dass $\ker(\varphi) = \operatorname{img}(\varphi)^\perp$ gilt.

10 (3 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler unitärer Vektorraum. Wann wird eine Abbildung $\varphi\colon V \to V$ unitär genannt? Zeige, dass im unitären Fall jeder Eigenwert von φ Absolutbetrag Eins hat.

11 (5 Punkte)**.** Sei V ein endlich dimensionaler Euklidischer Vektorraum und $f\colon V \to V$ eine Abbildung, sodass $d(f(v), f(w)) = d(v, w)$, für alle $v, w \in V$. Dabei bezeichnet $d(v, w) = \|w - v\|$ die Euklidische Distanz. Zeige, dass f von der Form $f(v) = \varphi(v) + b$ ist, wobei $\varphi \in O(V)$ und $b \in V$.

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = (-5) \cdot 9 \cdot (-13) = 585$$

2. Siehe Skriptum, Abschnitt V.4.

3. Eine Rechnung ergibt

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also ist A nilpotent. Weiters:

$$\ker(A) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle, \qquad \ker(A^2) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle,$$

$$\ker(A^3) = \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix} \right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \right\rangle.$$

Die Matrix $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{smallmatrix} \right)$ hat daher die gewünschte Eigenschaft,

$$B^{-1}AB = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right).$$

4. Das charakteristische Polynom von A ist $p = (1-z)^3$, der einzige Eigenwert ist daher $\lambda = 1$. Es gilt

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & -6 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \qquad (A - I_3)^2 = 0.$$

Daraus können wir bereits die Jordan'sche Normalform ablesen,

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Um eine Matrix S mit $S^{-1}AS = J$ zu bestimmen, benötigen wir einen Vektor b_1 mit $(A - I_3)b_1 \neq 0$. Wir verwenden den zweiten Einheitsvektor, $b_1 = e_2$, und berechnen den zweiten Basisvektor, $b_2 = (A - I_3)b_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix} \right)$. Für den dritten

Basisvektor, b_3, muss $b_3 \notin \langle b_1, b_2 \rangle$ und $(A - I_3)b_3 = 0$ gelten. Wir verwenden $b_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und erhalten

$$S^{-1}AS = J, \qquad \text{wobei} \qquad S = (b_3|b_2|b_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Eine moegliche Loesung ist: $b_3 = \frac{1}{5}\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $b_4 = \frac{1}{5}\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$.

6. Siehe Proposition VII.2.9 im Skriptum.

7. Siehe Proposition VII.1.22 im Skriptum.

8. Durch Ergänzen auf vollständige Quadrate erhalten wir:

$$\begin{aligned} q\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) &= 4x^2 + 10y^2 + 3z^2 - 4xy - 4xz + 8yz \\ &= (2x - y - z)^2 + 9y^2 + 2z^2 + 6yz \\ &= (2x - y - z)^2 + (3y + z)^2 + z^2. \end{aligned}$$

Die Signatur von q ist daher $(3, 0)$ und somit q positiv definit.

9. Für den ersten Teil vgl. Lemma VII.3.7 im Skriptum. Für $v, w \in V$ gilt $\langle \varphi(v), w \rangle = \langle v, \varphi^*(w) \rangle = \langle v, \varphi(w) \rangle$, denn $\varphi^* = \varphi$. Somit

$$\begin{aligned} v \in \ker(\varphi) &\Leftrightarrow \forall w \in V : \langle \varphi(v), w \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall w \in V : \langle v, \varphi(w) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall w \in V : v \perp \varphi(w) \\ &\Leftrightarrow v \in \operatorname{img}(\varphi)^\perp. \end{aligned}$$

also $\ker(\varphi) = \operatorname{img}(\varphi)^\perp$.

10. Sei $\varphi\colon V \to V$ unitär, d.h. $\varphi^*\varphi = \mathrm{id}_V$. Dann gilt

$$\|\varphi(v)\|^2 = \langle \varphi(v), \varphi(v) \rangle = \langle (\varphi^*\varphi)(v), v \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$$

und daher $\|\varphi(v)\| = \|v\|$, für jedes $v \in V$. Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert und $0 \neq v \in V$ mit $\varphi(v) = \lambda v$. Dann folgt

$$|\lambda|\|v\| = \|\lambda v\| = \|\varphi(v)\| = \|v\|,$$

also $|\lambda| = 1$, vgl. Korollar VII.4.5.

11. siehe Satz VII.4.7 im Skriptum.