Name	Matrikelnummer	Studienkennzahl

Prüfung zu

Lineare Algebra und Geometrie 1

Sommersemester 2012, LVN 250036

Beispieltest vom 21. Juni 2012, 2-stündig

1 (3 Punkte)**.** Berechne die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

2 (2 Punkte)**.** Ist $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^3$?

3 (2 Punkte)**.** Wann wird eine Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ diagonalisierbar genannt?

4 (5 Punkte)**.** Bestimme alle Eigenwerte, ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten, sowie Basen aller Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 3 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}.$$

Gib auch eine invertierbare Matrix S an, sodass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

5 (5 Punkte)**.** Bestimme die Jordan'sche Normalform, J, der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 4 \\ -11 & 7 & 7 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

sowie eine invertierbare Matrix S mit $S^{-1}AS = J$.

6. (3 Punkte) Bestimme die Signatur der (reellen) quadratischen Form

$$q\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = x^2 + 5y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 16yz$$

7 (3 Punkte)**.** Seien $\varphi, \psi\colon V \to V$ zwei kommutierende lineare Abbildung auf einem endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V, d.h. $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$. Weiters sei $v \in V$ ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$. Zeige, dass dann auch $\psi(v)$ ein Eigenvektor von φ ist und bestimme seinen Eigenwert.

8 (2 Punkte)**.** Sei $\beta\colon V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische Bilinearform auf einem endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Was verstehen wir unter der Matrixdarstellung $[\beta]_B$ von β bezüglich einer geordneten Basis B von V?

9 (3 Punkte)**.** Sei $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform auf einem endlich dimensionalen reellen Vektorraum V. Zeige $\det([\beta]_B) > 0$, für jede geordnete Basis B von V.

10 (3 Punkte)**.** Zeige, dass $O_n := \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A^t A = I_n\}$ bezüglich Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

11 (3 Punkte)**.** Zeige, dass

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^t B)$$

ein inneres Produkt auf $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ definiert.

12 (3 Punkte)**.** Formuliere und beweise die Dreiecksungleichung für unitäre Vektorräume.

13 (3 Punkte)**.** Bestimme die QR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Punkte:	0–20	$20\frac{1}{2}$–25	$25\frac{1}{2}$–30	$30\frac{1}{2}$–35	$35\frac{1}{2}$–40
Note:	5	4	3	2	1

Punkte: **Beurteilung:**

Lösungen

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & 0 & 8 & 9 \\ 8 & 5 & 3 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 8 & 5 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \big(4 \cdot 5 - 3 \cdot 3\big) = 66.$$

2. Ja, denn $\det \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 20 > 0$.

3. siehe Skriptum

4. Für das charakteristische Polynom von A erhalten wir

$$p = \begin{vmatrix} -1-z & 0 & 0 \\ 3 & 5-z & 3 \\ -3 & -6 & -4-z \end{vmatrix} = (-1-z)\big((5-z)(-4-z)+18\big) = (1+z)^2(2-z),$$

die Matrix hat daher zwei Eigenwerte: $\lambda = 2$ mit algebraischer Vielfachheit 1 und $\mu = -1$ mit algebraischer Vielfachheit 2. Für die Eigenräume erhalten wir:

$$E_2 = \ker(A - 2I_3) = \ker \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$E_{-1} = \ker(A + I_3) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$$

Die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte λ und μ sind daher 1 bzw. 2. Da geometrische und algebraische Vielfachheiten übereinstimmen, ist die Matrix diagonalisierbar, es gilt

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

5. Das charakteristische Polynom von A ist $p = z^3$, der einzige Eigenwert ist daher $\lambda = 0$. Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 4 & 4 \\ -11 & 7 & 7 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A^3 = 0.$$

Daraus können wir bereits die Jordan'sche Normalform ablesen,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Um eine Matrix S mit $S^{-1}AS = J$ zu bestimmen, benötigen wir einen Vektor v mit $A^2v \neq 0$. Wir verwenden den ersten Einheitsvektor, $v = e_1$. Es ist dann

$$b_1 = A^2v = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad b_2 = A^1v = \begin{pmatrix} -6 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_3 = A^0v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis und es gilt

$$S^{-1}AS = J, \qquad \text{wobei} \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 3 & -11 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Durch Ergänzen auf vollständige Quadrate erhalten wir

$$\begin{aligned} q\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) &= x^2 + 5y^2 + 9z^2 + 4xy + 6xz + 16yz \\ &= (x + 2y + 3z)^2 + y^2 + 4yz \\ &= (x + 2y + 3z)^2 + (y + 2z)^2 - 4z^2 \end{aligned}$$

Die Signatur von q ist daher $(2, 1)$.

7. Da v Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ ist, gilt $\varphi(v) = \lambda v$. Mit $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$ folgt $\varphi(\psi(v)) = \psi(\varphi(v)) = \psi(\lambda v) = \lambda\psi(v)$, also ist auch $\psi(v)$ Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ.

8. Siehe Definition VII.1.8.

9. Es existiert eine Basis C von V, sodass $[\beta]_C = I_n$, wobei $n = \dim(V)$. Bezeichnet $S := T_{CB} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ die Transformationsmatrix zum Basiswechsel von B nach C, dann gilt

$$[\beta]_B = S^t[\beta]_C S = S^t S.$$

Wir erhalten

$$\det\bigl([\beta]_B\bigr) = \det\bigl(S^t S\bigr) = \det(S^t)\det(S) = \det(S)^2 > 0,$$

vgl. den ersten Teil des Beweises von Satz VII.1.42.

10. Zunächst ist jedes $A \in O_n$ invertierbar mit Inverser $A^{-1} = A^t$. Es gilt daher auch $(A^{-1})^t A^{-1} = AA^{-1} = I_n$, also $A^{-1} \in O_n$. Für $A, B \in O_n$ gilt $A^tA = I_n = B^tB$, also $(AB)^t(AB) = B^tA^tAB = B^tI_nB = B^tB = I_n$, und daher auch $AB \in O_n$. Offensichtlich ist $I_n \in O_n$, denn $I_n^t I_n = I_n$. Dies zeigt, dass O_n eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ bildet.

11. Für $A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\langle A, B_1 + B_2\rangle = \mathrm{tr}\bigl(A^t(B_1 + B_2)\bigr) = \mathrm{tr}(A^tB_1) + \mathrm{tr}(A^tB_2) = \langle A, B_1\rangle + \langle A, B_2\rangle$$

und

$$\langle A, \lambda B\rangle = \mathrm{tr}\bigl(A^t(\lambda B)\bigr) = \lambda\,\mathrm{tr}(A^tB) = \lambda\langle A, B\rangle,$$

also ist $\langle -,- \rangle$ linear in der zweiten Variable. Weiters gilt

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^t B) = \mathrm{tr}\big((A^t B)^t\big) = \mathrm{tr}(B^t A) = \langle B, A\rangle,$$

somit ist $\langle -,- \rangle$ also symmetrisch. Daraus folgt auch

$$\langle A_1 + A_2, B\rangle = \langle B, A_1 + A_2\rangle = \langle B, A_1\rangle + \langle B, A_2\rangle = \langle A_1, B\rangle + \langle A_2, B\rangle$$

und

$$\langle \lambda A, B\rangle = \langle B, \lambda A\rangle = \lambda\langle B, A\rangle = \lambda\langle A, B\rangle,$$

d.h. $\langle -,- \rangle$ ist auch linear in der ersten Variable. Damit ist gezeigt, dass $\langle -,- \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ bildet. Diese ist positiv definit, denn

$$\begin{aligned}\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}(A^t A) = \sum_{i=1}^n (A^t A)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (A^t)_{ij} A_{ji}& \\ = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ji} A_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{ji}^2 > 0,&\end{aligned}$$

für alle $0 \neq A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

12. siehe Skriptum, Proposition VII.2.10.

13. Wenden wir das Gram–Schmidt Orthonormalisierungsverfahren auf die Spalten

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

der Matrix A an, erhalten wir

$$b_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{b}_2 = v_2 - \langle b_1, v_2\rangle b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \frac{\tilde{b}_2}{\|\tilde{b}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{b}_3 = v_3 - \langle b_1, v_3\rangle b_1 - \langle b_2, v_3\rangle b_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{6}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{6}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$b_3 = \frac{\tilde{b}_3}{\|\tilde{b}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt daher $A = QR$, wobei

$$Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \in O_3$$

und

$$R = Q^{-1}A = Q^tA = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{2} & 4/\sqrt{2} & 6/\sqrt{2} \\ 0 & 3/\sqrt{3} & 6/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 6/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix},$$

eine obere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonaleinträgen.