Übungen zu “Lineare Algebra und Geometrie 2”

Wintersemester 2012/13

Stefan Haller

1. Sei $\varphi\colon V \to V$ eine selbstadjungierte Abbildung auf einem endlich dimensionalen Euklidischen oder unitären Vektorraum V. Weiters bezeichne $\lambda_{\min}$ den kleinsten und $\lambda_{\max}$ den größten Eigenwert von φ. Zeige:

$$\lambda_{\min}\operatorname{id}_V \leq \varphi \leq \lambda_{\max}\operatorname{id}_V .$$

2. Seien $\varphi, \psi\colon V \to V$ zwei kommutierende semipositive Abbildungen, d.h. $\varphi \geq 0$, $\psi \geq 0$ und $\varphi\psi = \psi\varphi$. Zeige, dass auch $\varphi\psi \geq 0$ gilt.

3. Bestimme die Quadratwurzeln folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2\mathbf{i} \\ -2\mathbf{i} & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Bestimme Polarzerlegungen folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{i} \\ -3\mathbf{i} & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Bestimme Sinulärwertzerlegungen folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Für jedes $t \in \mathbb{R}$ zeige:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ alle Eigenwerte von A, ihrer Vielfachheit entsprechend oft gelistet. Zeige, dass $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ die Eigenwerte von e^A sind. *Hinweis: A ist triangulierbar.* Schließe daraus:

$$\det\bigl(e^A\bigr) = e^{\operatorname{tr}(A)}.$$

Gilt diese Gleichung auch für reelle Matritzen?

8. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Für $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ mit $AB = BA$ zeige:

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Schließe daraus, dass e^A stets invertierbar ist mit Inverser,

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

Zeige dass, $\mathbb{K} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $t \mapsto e^{tA}$, ein Gruppenhomomorphismus ist und, dass

$$\tfrac{d}{dt} e^{tA} = Ae^{tA}$$

gilt. Gib auch zwei (nicht kommutierende) Matrizen an, für die $e^{A+B} \neq e^A e^B$.

9. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zeige

$$(e^A)^* = e^{A^*},$$

für jede Matrix $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. Zeige weiters:

(a) Ist A schiefsymmetrisch, d.h. $A^* = -A$, dann ist e^A unitär bzw. orthogonal. Zeige auch, dass sich jede unitäre Matrix in der Form e^A schreiben lässt, wobei $A^* = -A$. Ist A eindeutig bestimmt? Was lässt sich im reellen Fall sagen? *Hinweis: Unitäre Abbildungen sind normal und daher diagonalisierbar.*

(b) Ist A symmetrisch, d.h. $A^* = A$, dann ist e^A positiv. Zeige auch, dass sich jede positive Matrix in der Form e^A schreiben lässt, wobei $A^* = A$. Ist A eindeutig bestimmt?

10. Bestimme die Pseudoinversen folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

11. Sei $A = U\Sigma V^*$ eine Singulärwertzerlegung von $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$, d.h.

$$U \in \mathrm{U}_m, \quad V \in \mathrm{U}_n, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & \sigma_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_i > 0.$$

Zeige, $A^+ = V\Sigma^+U^*$. Verwende dies um die Pseudoinverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 5 zu berechnen.

12. Zeige

$$A^+ = (A^*A)^+A^* = A^*(AA^*)^+$$

für jede reelle oder komplexe Matrix A. *Hinweis: Mit Hilfe der Singulärwertzerlegung, lässt sich dies auf Diagonalmatrizen zurückführen. Alternativ, lässt sich auch nachrechnen, dass $(A^*A)^+A^*$ die vier Eigenschaften hat, die A^+ charakterisieren, und daher mit A^+ übereinstimmen muss.*