13. Sei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ eine Matrix mit Singulärwerten $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, ihrer Vielfachheit entsprechend oft gelistet. Betrachte nun die quadratische selbstadjungierte Matrix $B \in M_{(n+m)\times(n+m)}(\mathbb{C})$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass $\sigma_1, \dots, \sigma_k, -\sigma_1, \dots, -\sigma_k$ alle von Null verschiedenen Eigenwerte von B mit Vielfachheit sind. *Hinweis: Wähle eine Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^*$, zeige*

$$\begin{pmatrix} 0 & U \\ V & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & V^* \\ U^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \Sigma \\ \Sigma^* & 0 \end{pmatrix}$$

und berechne die Eigenwerte dieser Matrix.

14. Für jede Matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ betrachte

$$\|A\| := \sup_{0\neq x\in\mathbb{C}^n} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \qquad \|A\|_2 := \big(\operatorname{tr}(A^*A)\big)^{1/2}, \qquad \|A\|_1 := \operatorname{tr}\big((A^*A)^{1/2}\big).$$

Für beliebige unitäre Matrizen $U \in \mathrm{U}_m$ und $V \in \mathrm{U}_n$ zeige:

$$\|UAV^*\| = \|A\|, \qquad \|UAV^*\|_2 = \|A\|_2, \qquad \|UAV^*\|_1 = \|A\|_1.$$

Schließe daraus

$$\|A\| = \max\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}, \quad \|A\|_2 = \sqrt{\sigma_1^2 + \cdots + \sigma_k^2}, \quad \|A\|_1 = \sigma_1 + \cdots + \sigma_k,$$

wobei $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ die Singulärwerte von A bezeichnen. Zeige auch

$$\|A^*\| = \|A\|, \qquad \|A^*\|_2 = \|A\|_2, \qquad \|A^*\|_1 = \|A\|_1$$

sowie

$$\|A\| \leq \|A\|_2 \leq \|A\|_1.$$

15. Zeige, dass $\|A\|_1$ aus dem vorangehenden Beispiel eine Norm auf $M_{m\times n}(\mathbb{C})$ definiert (für $\|A\|$ und $\|A\|_2$ haben wir dies bereits an anderer Stelle verifiziert):

(a) $\|A\|_1 = 0 \Leftrightarrow A = 0$.
(b) $\|\lambda A\|_1 = |\lambda|\|A\|_1$, für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.
(c) $\|A + A'\|_1 \leq \|A\|_1 + \|A'\|_1$, wobei $A, A' \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$.
(d) $\|AA'\|_1 \leq \|A\|_1\|A'\|_1$, wobei $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ und $A' \in M_{n\times k}(\mathbb{C})$.
(e) $|\operatorname{tr}(A)| \leq \|A\|_1$, falls $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.
(f) $\|BA\|_1 \leq \|B\|\|A\|_1$, für alle $B \in M_{l\times m}(\mathbb{C})$.
(g) $\|AB\|_1 \leq \|A\|_1\|B\|$, für alle $B \in M_{n\times k}(\mathbb{C})$.
(h) $\|A\|_1 = \sup_{\|B\|\leq 1} |\operatorname{tr}(BA)|$, wobei das Supremum über alle $B \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ mit $\|B\| \leq 1$ genommen wird.

Hinweis: (a) und (b) sind leicht. Verifiziere dann (e) unter Verwendung einer Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^*$ und $|\operatorname{tr}(V^*U\Sigma)| \leq \operatorname{tr}(\Sigma) = \|\Sigma\|_1$. Anleitung für (f) im Fall $l \geq n$: Sei $A = U\Sigma V^*$ eine Singulärwertzerlegung von A, und $BA = WR$ eine Polarzerlegung von BA, d.h. $W \in M_{l\times n}(\mathbb{C})$, $W^*W = I_n$, $R^* = R \geq 0$.

Schließe daraus: $\|BA\|_1 = \operatorname{tr}(R) = \operatorname{tr}(V^*W^*BU\Sigma) = \sum_i \langle V^*W^*BU\Sigma e_i, e_i\rangle \leq \|V^*W^*BU\|\|\Sigma\|_1 \leq \|B\|\|\Sigma\|_1 = \|B\|\|A\|_1$. *(d) und (g) folgen aus (f) und der vorangehenden Aufgabe. Leite nun (h) her, und verwende diese Darstellung um die Dreiecksungleichng (c) zu zeigen.*

16. Gegeben seien reelle Zahlen x_i und y_i wie folgt:

i	1	2	3	4	5
x_i	1.1	1.9	2.8	2.8	4.1
y_i	7.9	6.1	4.5	3.9	1.5

Bestimme ein lineares Polynom, $p(x) = a + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$, sodass die Summe der Fehlerquadrate, $\sum_{i=1}^5 \left|p(x_i) - y_i\right|^2$, minimal wird. Fertige eine Skizze an!

17. Gegeben seien reelle Zahlen x_i und y_i wie folgt:

i	1	2	3	4	5
x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	1.1	-0.2	1.3	3.9	9.6

Bestimme ein quadratisches Polynom, $p(x) = a + bx + cx^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, sodass die Summe der Fehlerquadrate, $\sum_{i=1}^5 \left|p(x_i) - y_i\right|^2$, minimal wird. Fertige eine Skizze an!

18. Zeige, dass

$$G := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} : b \in \mathbb{K}^k,\ A \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{K}) \right\}$$

eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_{k+1}(\mathbb{K})$ bildet. Zeige weiters, dass

$$G \cong \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^k), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & A \end{pmatrix} \leftrightarrow \big(v \mapsto Av + b\big)$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

19. Zeige, dass eine Abbildung $\alpha\colon V \to W$ genau dann affin ist, wenn sie folgende Eigenschaft besitzt: Für je zwei Punkte $v_1, v_2 \in V$ und jedes $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

$$\alpha\big(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2\big) = \lambda\alpha(v_1) + (1-\lambda)\alpha(v_2).$$

Hinweis: Gehe induktiv vor und verwende

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k = (1-\lambda_k)\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_k}v_1 + \cdots + \frac{\lambda_{k-1}}{1-\lambda_k}v_{k-1}\right) + \lambda_k v_k$$

wobei $\lambda_i \in \mathbb{K}$ *und* $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$.

20. Zeige, dass eine Teilmenge A eines Vektorraums V genau dann einen affinen Teilraum bildet, wenn sie folgende Eigenschaft besitzt: Mit je zwei verschiedenen Punkten $a_1 \neq a_2 \in A$ liegt auch die Gerade durch a_1 und a_2 zur Gänze in A.