21. Zeige, dass eine Abbildung $\alpha\colon V \to W$ genau dann affin ist, wenn ihr Graph, $G_\alpha := \{(v, \alpha(v)) : v \in V\}$, einen affinen Teilraum von $V \times W$ bildet.

22. Zeige, dass die Punkte

$$a_0 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad a_1 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

ein affines Koordinatensystem von $\mathbb{R}^2$ bilden. Bestimme die affinen und baryzentrischen Koordinaten der Punkte

$$\begin{pmatrix}-4\\9\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix},$$

vgl. Proposition VIII.1.27. Fertige eine Skizze an!

23 (Strahlensatz). Seien a_0, a_1, a_2 drei affin unabhängige Punkte eines Vektorraums V. Zeige, dass $g_1 := \langle a_0, a_1\rangle_{\text{aff}}$ und $g_2 := \langle a_0, a_2\rangle_{\text{aff}}$ zwei Geraden bilden, die sich nur in a_0 schneiden, $g_1 \cap g_2 = \{a_0\}$. Weiters sei $a_1' \in g_1$ mit $a_0 \neq a_1' \neq a_1$ und $a_2' \in g_2$ mit $a_0 \neq a_2' \neq a_2$. Zeige, dass eindeutig Skalare $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ mit

$$a_1' = \lambda_1 a_1 + (1 - \lambda_1) a_0 \qquad \text{und} \qquad a_2' = \lambda_2 a_2 + (1 - \lambda_2) a_0$$

existieren und, dass $0 \neq \lambda_i \neq 1$ gilt. Zeige, dass $h := \langle a_1, a_2\rangle_{\text{aff}}$ und $h' := \langle a_1', a_2'\rangle_{\text{aff}}$ zwei verschiedene Geraden in V sind, für die

$$h \cap g_1 = \{a_1\}, \quad h \cap g_2 = \{a_2\}, \quad h' \cap g_1 = \{a_1'\} \quad \text{und} \quad h' \cap g_2 = \{a_2'\}$$

gilt. Fertige eine Skizze an! Beweise nun den Strahlensatz:

$$h \cap h' = \emptyset \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda_1 = \lambda_2.$$

24. Sei V ein endlich dimensionaler Euklidischer Vektorraum und $\sigma\colon V \to V$ eine Bewegung, sodass $\sigma^2 = \mathrm{id}_V$. Zeige, dass $A := \{v \in V : \sigma(v) = v\}$ einen nicht leeren affinen Teilraum bildet. Zeige weiters, dass σ mit der Spiegelung an A überein stimmt, vgl. Beispiel VIII.1.37.

25. Seien A und A' zwei affine Teilräume eines endlich dimensionalen Euklidischen Vektorraums V. Weiters seien $p, p' \in V$ zwei Punkte, sodass $d(A, p) = d(A', p')$. Zeige, dass eine Bewegung $\alpha\colon V \to V$ existiert, sodass $\alpha(A) = A'$ und $\alpha(p) = p'$.

26. Bestimme alle Mittelpunkte der quadratischen Funktionen, $Q_i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
Q_1\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) &= x^2 - y^2 + 6x - 4y + 4\\
Q_2\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) &= x^2 + y^2 - z - 17\\
Q_3\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right) &= x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 4yz + 2x + 6y + 8z + 5
\end{aligned}$$

27. Sei $Q\colon V \to \mathbb{K}$ eine quadratische Funktion und $\alpha \in \operatorname{Aff}(V)$. Zeige, dass α die Menge der Mittelpunkte von $Q \circ \alpha$ bijektiv auf die Menge der Mittelpunkte von Q abbildet. *Hinweis: Zeige* $\sigma_{\alpha(m)} = \alpha \circ \sigma_m \circ \alpha^{-1}$, *wobei* σ_m *die Spiegelung am Punkt* $m \in V$ *bezeichnet.*

28. Fertige eine Liste aller affinen Normalformen von Quadriken in $\mathbb{C}^3$ an, analog zu Beispiel VIII.2.11.

29. Zu jeder der folgenden Quadriken in $\mathbb{C}^2$ bestimme einen affinen Isomorphismus $\alpha_i\colon \mathbb{C}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^2$, sodass $\alpha_i(E_i)$ Normalform hat, vgl. Beispiel VIII.2.11:

$$E_1 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2 : x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 4 = 0 \right\}$$
$$E_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2 : 2x^2 - 3y^2 - xy + 3x - 2y + 1 = 0 \right\}$$
$$E_3 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^2 : 4xy = 1 \right\}$$

Analog für folgende Quadrik in $\mathbb{C}^3$:

$$E_4 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^3 : x^2 - y^2 + 3z^2 + 2xz + 2\mathbf{i}yz + 2x + 4\mathbf{i}y + 12z + 14 = 0 \right\}.$$

30. Zu jeder der folgenden Quadriken in $\mathbb{R}^3$ bestimme einen affinen Isomorphismus $\alpha_i\colon \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^3$, sodass $\alpha_i(E_i)$ Normalform hat, vgl. Beispiel VIII.2.16:

$$E_1 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 2y^2 + z^2 + 4xy + 2yz + 4x + 6y + 4z + 1 = 0 \right\}$$
$$E_2 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 5y^2 + z^2 + 4xy - 2yz - 2x - 2y - 3z + 2 = 0 \right\}$$
$$E_3 = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 - z^2 + 2xz + 2yz + 2x - 2y + 6z - 2 = 0 \right\}$$

31. Seien F und F' zwei Punkte in $\mathbb{R}^n$ und $2f := d(F, F')$. Weiters sei $a > f$. Zeige, dass

$$E := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, F) + d(x, F') = 2a\}$$

eine Quadrik ist. Zeige, dass eine Bewegung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert, die E auf das Rotationsellipsoid,

$$E' = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \left(\tfrac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\tfrac{x_2}{b}\right)^2 + \cdots + \left(\tfrac{x_n}{b}\right)^2 = 1 \right\},$$

abbildet, wobei $b = \sqrt{a^2 - f^2}$.

32. Sei A eine affine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$ und $F \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt, der nicht in A liegt. Zeige, dass

$$E := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) = d(x, F)\}$$

eine Quadrik ist. Zeige, dass eine Bewegung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ existiert, die E auf das Rotationsparaboloid,

$$E' = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 = 4fx_n \right\},$$

abbildet, wobei $2f := d(A, F)$. Wie sieht die Situation aus, wenn $F \in A$?