33. Betrachte den Kegel

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0 \right\}$$

und eine affine Isometrie $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\varphi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = A\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) + b$, wobei $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, $A^*A = I_2$, und $b \in \mathbb{R}^3$. Zeige, dass $\varphi^{-1}(K)$ eine Quadrik ist. Welche Quadriken in $\mathbb{R}^2$ lassen sich in dieser Form darstellen, für eine geeignete affine Isometrie $\varphi$?

34. Betrachte das einschalige Rotationshyperboloid

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : (\tfrac{x}{a})^2 + (\tfrac{x}{a})^2 - (\tfrac{z}{b})^2 = 1 \right\},$$

wobei $a, b > 0$. Zeige, dass die Gerade

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

in $H$ liegt, d.h. $g \subseteq H$. Zeige weiters, dass wir durch Rotation der Geraden $g$ um die $z$-Achse, ganz $H$ erhalten, d.h.

$$H = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} \rho_\theta(g), \qquad \rho_\theta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \rho_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gibt es noch weitere Geraden, die in $H$ liegen?

35. Bestimme eine Bewegung, die die Quadrik

$$E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2xy + \sqrt{2}x + 3\sqrt{2}y - 2 = 0 \right\}$$

auf Normalform bringt.

36. Bestimme eine Bewegung, die die Quadrik

$$E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : 52x^2 + 73y^2 + 72xy + 80x + 190y + 25 = 0 \right\}$$

auf Normalform bringt.

37. Sei $a > b > 0$. Bestimme alle Bewegungen $\alpha\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, die die Ellipse

$$E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2 : (\tfrac{x}{a})^2 + (\tfrac{y}{b})^2 = 1 \right\}$$

bewahren, $\alpha(E) = E$. *Hinweis: Zeige zunächst, dass jede solche Bewegung linear sein muss.*

38. Betrachte folgende drei Punkte in $\mathbb{RP}^3$:

$$P_1 = [0:1:2:3], \quad P_2 = [0:1:2:4], \quad P_3 = [1:1:1:1].$$

Zeige, dass $E := \langle P_1, P_2, P_3 \rangle_{\mathrm{proj}}$ eine projektive Ebene ist und bestimme $a_i$, sodass

$$E = \left\{ [x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{RP}^3 : a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \right\}.$$

39. Bestimme den Durchschnitt folgender drei projektiver Ebenen in $\mathbb{R}\mathrm{P}^3$:

$$E_1 = \left\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \;\middle|\; x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}$$
$$E_2 = \left\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \;\middle|\; x_0 - x_1 + x_2 - x_3 = 0\right\}$$
$$E_3 = \left\{[x_0 : x_1 : x_2 : x_3] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \;\middle|\; x_0 + 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0\right\}$$

40. Für $j = 0, \ldots, n$ betrachte die affine Hyperebene

$$A_j := e_j + \langle e_0, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_n \rangle$$

in $\mathbb{K}^{n+1}$ und die damit assoziierte Einbettung

$$\iota_j \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}\mathrm{P}^n, \qquad \iota_j(x_1, \ldots, x_n) := [x_1 : \cdots : x_j : 1 : x_{j+1} : \cdots : x_n],$$

wobei $e_j \in \mathbb{K}^{n+1}$ den $j$-ten Einheitsvektor bezeichnet. Zeige,

$$\mathbb{K}\mathrm{P}^n = \bigcup_{j=0}^{n} \iota_j(\mathbb{K}^n),$$

d.h. die Bilder der Einbettungen $\iota_j$ überdecken ganz $\mathbb{K}\mathrm{P}^n$.

41. Auf der Sphäre $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ betrachte die Relation $x \sim y :\Leftrightarrow x = \pm y$. Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation bildet, und dass die Inklusion $S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ eine wohldefinierte Bijektion $S^n/{\sim} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}\mathrm{P}^n$ induziert. Insbesonder erhalten wir so eine Identifikation $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = S^2/{\sim}$, d.h. die Punkte der projektiven Ebene $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ können mit Paaren von Antipodalpunkten auf $S^2$ identifiziert werden. Wie lassen sich die projektiven Geraden in diesem Bild beschreiben?

42. Zeige, dass jede Projektivität $\pi \colon \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ wenigstens einen Fixpunkt besitzt, d.h. es existiert $P \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ mit $\pi(P) = P$. Gib auch eine Projektivität $\pi \colon \mathbb{R}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^1$ an, die keinen einzigen Fixpunkt hat.

43. Bestimme die sechs Projektivitäten $\mathbb{K}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{K}\mathrm{P}^1$ in der Form $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$, die die Punkte 0, 1, $\infty$ permutieren.

44. Bestimme das Doppelverhältnis folgender Punkte in $\mathbb{K}\mathrm{P}^1$:

$$P_0 = [1:2], \quad P_1 = [3:4], \quad P_2 = [5:6], \quad P_3 = [7:8].$$

45. Zeige, dass die Punkte

$$P_0 = [1:1:0], \quad P_1 = [0:1:1], \quad P_2 = [1:2:1], \quad P_3 = [1:0:-1]$$

auf einer projektiven Gerade in $\mathbb{K}\mathrm{P}^2$ liegen, und bestimme ihr Doppelverhältnis.

46. Für vier Punkte $P_0, P_1, P_2, P_3$ auf einer projektiven Gerade zeige:

$$\mathrm{DV}(P_1, P_0, P_2, P_3) = \frac{1}{\mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3)} = \mathrm{DV}(P_0, P_1, P_3, P_2)$$

sowie

$$\mathrm{DV}(P_2, P_1, P_0, P_3) = 1 - \mathrm{DV}(P_0, P_1, P_2, P_3) = \mathrm{DV}(P_0, P_3, P_2, P_1)$$