47. Sei $\sigma\colon \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ eine Projektivität mit $\sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$ und bezeichne die Menge der Fixpunkte mit $\mathrm{Fix}(\sigma) := \{p \in \mathbb{C}\mathrm{P}^n : \sigma(p) = p\}$. Zeige,

$$\mathrm{Fix}(\sigma) = P \cup Q,$$

wobei P und Q zwei projektive Teilräume in $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ bezeichnen, für die $P \cap Q = \emptyset$ und $\dim(P) + \dim(Q) = \dim(\mathbb{C}\mathrm{P}^n) - 1$ gilt. Zeige weiters, dass eine invariante Hyperebene $H \subseteq \mathbb{C}\mathrm{P}^n$ existiert, d.h. $\sigma(H) = H$, sodass die Einschränkung $\sigma|_A\colon A \to A$ auf den affinen Teil, $A := \mathbb{C}\mathrm{P}^n \setminus H$, eine affine Spiegelung ist.

48. Sei $E \subseteq P(V)$ eine projektive Quadrik und $P \subseteq P(V)$ ein projektiver Teilraum. Zeige, dass $E \cap P$ eine projektive Quadrik in P ist.

49. Für jede der folgenden projektiven Quadriken bestimme eine Projektivität, die diese auf Normalform wie in Satz VIII.4.7 bringt:

(a) $E = \big\{[x : y : z] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \,\big|\, x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 4xy - 2xz = 0\big\}$
(b) $E = \big\{[x : y : z] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \,\big|\, xy = 0\big\}$
(c) $E = \big\{[x : y : z : w] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^3 \,\big|\, x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz + 2zw = 0\big\}$

50. Für jede der folgenden affinen Quadriken $E_0 \subseteq \mathbb{R}^3$ bestimme eine projektive Quadrik in $E \subseteq \mathbb{R}\mathrm{P}^3$ mit affinem Teil E_0, d.h. so, dass $\iota^{-1}(E) = E_0$ gilt, wobei $\iota\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^3$, $\iota\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) = [1 : x : y : z]$, die Standardeinbettung bezeichnet:

(a) $E_0 = \big\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\}$.
(b) $E_0 = \big\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x^2 + y^2 - z^2 = 1\big\}$.
(c) $E_0 = \big\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x^2 + y^2 = z\big\}$.
(d) $E_0 = \big\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x^2 = 0\big\}$. (In diesem Fall ist E nicht eindeutig bestimmt)

Bestimme in jedem Beispiel auch die Menge (Quadrik) aller Fernpunkte von E.

51. Für endlich dimensionale Vektorräume $V_1, \dots, V_n$ zeige

$$\dim(V_1 \times \cdots \times V_n) = \dim(V_1) + \cdots + \dim(V_n).$$

52. Beweise Lemma IX.1.3, d.h. zeige, dass die direkte Summe $\bigoplus_{i \in I} V_i$ zusammen mit den kanonischen Inklusionen $\iota_i\colon V_i \to \bigoplus_{j \in I} V_j$ durch die universelle Eigenschaft, bis auf kanonischen Isomorphismus, eindeutig bestimmt ist.

53. Sei b_i, $i \in I$, eine Basis von V. Zeige, dass die linearen Abbildungen $\mathbb{K} \to V$, $\iota_i(\lambda) := \lambda b_i$, einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} \mathbb{K} \xrightarrow{\cong} V$$

induzieren.

54. Seien V_i Vektorräume, $i \in I$. Weiters bezeichnen $\pi_i\colon \prod_{j\in J} V_j \to V_i$ die kanonischen Projektionen und $\iota_i\colon V_i \to \bigoplus_{j\in I}$ die kanonischen Inklusionen. Zeige, dass eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\phi\colon \bigoplus_{i\in I} V_i \to \prod_{i\in I} V_i$$

existiert, sodass $\pi_i \circ \phi \circ \iota_j = \delta_{i,j}$, für alle $i, j \in I$. Zeige, dass ϕ für endliche Indexmengen I ein Isomorphismus ist. Zeige weiters, dass ϕ für unendliche Indexmengen zwar injektiv, aber i.A. nicht surjektiv ist.

55. Beweise Proposition IX.2.7, genauer: Für $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in L(V, V')$, $\psi, \psi_1, \psi_2 \in L(W, W')$, $\varphi' \in L(V', V'')$, $\psi' \in L(W', W'')$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:
(a) $\mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_W = \mathrm{id}_{V\otimes W}$
(b) $(\varphi' \circ \varphi) \otimes (\psi' \circ \psi) = (\varphi' \otimes \psi') \circ (\varphi \otimes \psi)$
(c) $(\varphi_1 + \varphi_2) \otimes \psi = \varphi_1 \otimes \psi + \varphi_2 \otimes \psi$
(d) $\varphi \otimes (\psi_1 + \psi_2) = \varphi \otimes \psi_1 + \varphi \otimes \psi_2$
(e) $(\lambda\varphi) \otimes \psi = \lambda(\varphi \otimes \psi) = \varphi \otimes (\lambda\psi)$
Dabei bezeichnet $\varphi \otimes \psi\colon V \otimes W \to V' \otimes W'$ das Tensorprodukt linearer Abbildungen.

56. Seien V und W zwei Vektorräume. Zeige, dass i.A. nicht jedes Element in $V \otimes W$ elementar, d.h. von der Form $v \otimes w$, ist. *Hinweis: Für einen endlich dimensionalen Vektorraum V gilt $V^* \otimes V = \mathrm{end}(V)$, und die elementaren Tensoren $\alpha \otimes w \in V^* \otimes V$, wobei $\alpha \in V^*$ und $w \in V$, entsprechen den linearen Abbildungen der Form $V \to V$, $v \mapsto \alpha(v)w$. Zeige, dass die identische Abbildung nicht von dieser Form ist, falls $\dim(V) \geq 2$.*

57. Sei $\varphi\colon V \to V$ und $\psi\colon W \to W$ zwei lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen. Zeige

$$\mathrm{tr}\big(V \otimes W \xrightarrow{\varphi\otimes\psi} V \otimes W\big) = \mathrm{tr}(\varphi)\,\mathrm{tr}(\psi)$$

und

$$\det\big(V \otimes W \xrightarrow{\varphi\otimes\psi} V \otimes W\big) = \det(\varphi)^{\mathrm{tr}(\psi)} \det(\psi)^{\mathrm{tr}(\varphi)}.$$

Hinweis: Betrachte Basen von V und W, und berechne die Darstellung von $\varphi\otimes\psi$ bezüglich der induzierten Basis von $V \otimes W$.

58. Seien $\varphi\colon V \to W$ und $\psi\colon W \to U$ zwei lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vekotrräumen über $\mathbb{K}$. Fassen wir $\varphi \in V^* \otimes W$ und $\psi \in W^* \otimes U$ auf, dann ist $\varphi\otimes\psi \in V^* \otimes W \otimes W^* \otimes U$. Bezeichnet $\mathrm{tr}\colon W \otimes W^* \to \mathbb{K}$ die kanonische Kontraktion, dann ist $(\mathrm{id}_{V^*} \otimes \mathrm{tr} \otimes \mathrm{id}_U)(\varphi\otimes\psi) \in V^* \otimes \mathbb{K} \otimes U = V^* \otimes U$. Zeige, dass dieses Element genau der Komposition $\psi \circ \varphi\colon V \to U$ entspricht.

59. Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ ein Teilkörper, $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen, $B = (b_1, \dots, b_n)$ eine geordnete Basis von V und $C = (c_1, \dots, c_m)$ eine geordnete Basis von W. Weiters bezeichnen

$B_{\mathbb{L}} = (b_1 \otimes 1, \dots, b_n \otimes 1)$ und $C_{\mathbb{L}} = (c_1 \otimes 1, \dots, c_n \otimes 1)$ die entsprechenden Basen der $\mathbb{L}$-Vektorräume $V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ und $W \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$. Für die Matrixdarstellung der $\mathbb{L}$-linearen Abbildung $\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}} \colon V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L} \to W \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ zeige:

$$[\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}}]_{C_{\mathbb{L}} B_{\mathbb{L}}} = [\varphi]_{CB}.$$

Schließe daraus:

$$\mathrm{tr}_{\mathbb{L}}\big(\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}}\big) = \mathrm{tr}_{\mathbb{K}}(\varphi) \qquad \text{und} \qquad \det_{\mathbb{L}}\big(\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{L}}\big) = \det_{\mathbb{K}}(\varphi).$$

60. Sei V ein komplexer Vektorraum, bezeichne $V_{\mathbb{R}}$ den zugrundeliegenden reellen Vektorraum und betrachte dessen Komplexifizierung, $V_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Konstruiere einen kanonischen $\mathbb{C}$-linearen Isomorphismus

$$V_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V \oplus \bar{V},$$

wobei $\bar{V}$ den komplexen Vektorraum bezeichnet, den wir aus V erhalten indem wir die Skalarmultiplikation umdefinieren.

61. Sei $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ ein Teilkörper und V, W zwei Vektorräume über $\mathbb{K}$. Konstruiere kanonische Isomorphismen von $\mathbb{L}$-Vektorräumen:

$$(V \oplus W) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L} = (V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}) \oplus (W \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L})$$

und

$$(V \otimes W) \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L} = (V \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}) \otimes_{\mathbb{L}} (W \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{L}).$$

62. Es bezeichne

$$D := \big\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \,\big|\, \forall i > j : A_{ij} = 0\big\}$$

die Menge aller oberen Dreiecksmatrizen und

$$D^q := \big\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{K}) \,\big|\, \forall i \neq j - q : A_{ij} = 0\big\}$$

die Teilmenge aller Matrizen, deren nicht-triviale Einträge in der q-ten Nebendiagonale liegen. Zeige, dass $D = \bigoplus_{q=0}^{n-1} D^q$ bezüglich Matrizenmultiplikation eine graduierte Algebra bildet.

63. Zeige $V \otimes V = \Lambda^2 V \oplus S^2 V$, für jeden Vektorraum V.

64. Sei $\varphi \colon V \to V$ linear und $\dim(V) = n$. Zeige:

$$\Lambda^n \varphi = \det(\varphi)\, \mathrm{id}_{\Lambda^n}.$$

Hinweis: in Beispiel IX.5.6 haben wir dies bereits für diagonalisierbare φ gezeigt.

65. Sei $\varphi \colon V \to V$ linear und $\dim(V) = n$. Zeige:

$$\det(\varphi + z\, \mathrm{id}_V) = \sum_{q=0}^{n} \mathrm{tr}\big(\Lambda^q \varphi\big) z^{n-q}.$$

Hinweis: in Beispiel IX.5.7 haben wir dies bereits für diagonalisierbare φ gezeigt.

66. Sei $v \in V$. Zeige, dass $i_v \colon \Lambda^q V^* \to \Lambda^{q-1} V^*$,

$$(i_v\alpha)(v_2, \dots, v_q) := \alpha(v, v_2, \dots, v_q),$$

eine graduierte Derivation ist, d.h. es gilt

$$i_v(\alpha \wedge \beta) = (i_v\alpha) \wedge \beta + (-1)^{pq} \alpha \wedge i_v\beta,$$

für alle $\alpha \in \Lambda^p V^*$ und $\beta \in \Lambda^q V^*$.